Wyznaczanie miejsca zerowego funkcji opisanej za pomocą wzoru

Wyznaczanie miejsca zerowego funkcji opisanej za pomocą wzoru

Źródło: Frank Wittkowski from Pixabay, domena publiczna.

Opis funkcji za pomocą wzoru algebraicznego jest jednym ze sposobów przedstawiania funkcji.
W jaki sposób możemy wtedy wyznaczyć jej miejsce zerowe?
Czy każde rozwiązanie równania $f(x) = 0$ jest miejscem zerowym funkcji f?

Na te pytania uzyskasz odpowiedź analizując poniższy materiał.

> **Twoje cele**
>
> - Wyznaczysz miejsce zerowe funkcji opisanej za pomocą wzoru.
> - Sprawdzisz, czy dana liczba jest miejscem zerowym funkcji.
> - Udowodnisz, że dana liczba jest miejscem zerowym funkcji.

Przeczytaj

W poniższych przykładach skorzystamy z definicji miejsca zerowego funkcji.

Definicja: Miejsce zerowe funkcji

Miejscem zerowym funkcji f nazywamy taki argument x, dla którego:

$$f(x) = 0$$

Przykład 1

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru.

a) $f(x) = 7 - x^2$, gdy $x \in \mathbb{Q}$,

b) $f(x) = 7 - x^2$, gdy $x \in \mathbb{R}$.

Wyznaczymy miejsca zerowe (o ile istnieją) funkcji f.

Rozwiązanie:

Funkcja f, w obu podpunktach, opisana jest za pomocą takiego samego wzoru. Różne są tylko dziedziny funkcji.

Wyznaczymy miejsca zerowe funkcji f rozwiązując równanie

$f(x) = 0$.

$7 - x^2 = 0$

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

$\left(\sqrt{7} - x\right)\left(\sqrt{7} + x\right) = 0$

Iloczyn jest równy zero wtedy, gdy co najmniej jeden z czynników jest równy zero.

$\sqrt{7} - x = 0$ lub $\sqrt{7} + x = 0$

Stąd $x_1 = \sqrt{7}$, $x_2 = -\sqrt{7}$.

Ad. a). Funkcja f nie posiada miejsc zerowych, ponieważ dziedziną funkcji jest zbiór liczb wymiernych.

Ad. b). Funkcja f ma dwa miejsca zerowe, ponieważ dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych.
Są nimi liczby: $-\sqrt{7}, \sqrt{7}$.

Przykład 2

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru.

$f(x) = x(x+4)(3x-2)$, gdy $x \in \mathbb{Z}$.

Wyznaczymy miejsca zerowe (o ile istnieją) funkcji f.

Rozwiązanie:

W celu wyznaczenia miejsc zerowych funkcji f rozwiążemy równanie

$f(x) = 0$.

$x(x+4)(3x-2) = 0$

Iloczyn jest równy zero wtedy, gdy co najmniej jeden z czynników jest równy zero.

$x = 0$ lub $x + 4 = 0$ lub $3x - 2 = 0$

Stąd $x_1 = 0$, $x_2 = -4$, $x_3 = \frac{2}{3}$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór liczb całkowitych, czyli funkcja posiada dwa miejsca zerowe.

Są nimi liczby: $-4, 0$.

Przykład 3

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru.

$f(x) = x^2 + 6x - (x+3)^2 + 9$, gdy $x \in \mathbb{R}$.

Wykażemy, że funkcja f posiada nieskończenie wiele miejsc zerowych.

Rozwiązanie:

Przekształcimy tożsamościowo wzór opisujący funkcję f.

$f(x) = x^2 + 6x - (x+3)^2 + 9$

Zastosujemy wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$f(x) = x^2 + 6x - \left(x^2 + 6x + 9\right) + 9$

Opuszczamy nawias pamiętając o zmianie znaków jednomianów.

$f(x) = x^2 + 6x - x^2 - 6x - 9 + 9$

Przeprowadzamy redukcję wyrazów podobnych.

$f(x) = 0$

Po zastosowaniu wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy oraz przeprowadzeniu redukcji wyrazów podobnych otrzymaliśmy

$f(x) = 0$.

Funkcja f dla każdej liczby rzeczywistej przyjmuje wartość 0.

Stąd wniosek, że każda liczba należąca do dziedziny funkcji jest jej miejscem zerowym.

Przykład 4

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru.

$f(x) = \frac{2 \cdot (x-4)\left(x-2\sqrt{2}\right)}{2x^2-16}$

Wyznaczymy dziedzinę tej funkcji oraz sprawdzimy, która z liczb: 4 czy $2\sqrt{2}$ jest jej miejscem zerowym.

Rozwiązanie:

Wyznaczmy dziedzinę funkcji f. Pamiętamy, że mianownik ułamka musi być liczbą różną od zera.

Mianownik ułamka musi być liczbą różną od zera. Rozwiązujemy równanie, które jest zapisane w mianowniku.

$2x^2 - 16 \neq 0$

Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias.

$2 \cdot \left(x^2 - 8\right) \neq 0$

Obie strony równania podzieliliśmy przez 2.

$x^2 - 8 \neq 0$

Stosujemy wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

$\left(x - 2\sqrt{2}\right)\left(x + 2\sqrt{2}\right) \neq 0$

Iloczyn jest równy zero wtedy, gdy co najmniej jeden z czynników jest równy zero. Zatem, aby mianownik był różny od zera, każdy z czynników musi być różny od zera.

$$\left(x-2\sqrt{2}\right)\neq 0 \wedge \left(x+2\sqrt{2}\right)\neq 0$$

Otrzymaliśmy dwa rozwiązania.

$$x\neq 2\sqrt{2}\ \wedge\ x\neq -2\sqrt{2}$$

Wyznaczyliśmy dziedzinę funkcji f.

$$D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right\}$$

W celu wyznaczenia miejsc zerowych rozwiążemy równanie $f(x)=0$.

$$\frac{2\cdot(x-4)\left(x-2\sqrt{2}\right)}{2x^2-16}=0$$

Ułamek jest równy 0 wtedy, gdy licznik tego ułamka jest równy 0.

$$2\cdot(x-4)\left(x-2\sqrt{2}\right)=0$$

Iloczyn jest równy 0 wtedy, gdy co najmniej jeden z czynników jest równy 0.

$$x-4=0\ \vee\ x-2\sqrt{2}=0$$

Otrzymaliśmy dwa rozwiązania równania. Sprawdzamy, która z otrzymanych liczb należy do dziedziny funkcji f.

$$x=4\ \vee\ x=2\sqrt{2}$$

Do dziedziny funkcji f należy liczba 4, a nie należy liczba $2\sqrt{2}$.

Możemy zapisać, że funkcja ma tylko jedno miejsce zerowe. Jest nim liczba 4.

$$x_0=4$$

Odpowiedź:

Tylko liczba 4 jest miejscem zerowym funkcji f.

Przykład 5

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru.

$f(x)=(x+2)^2-x(x+1)-3x$, gdy $x\in\mathbb{R}$.

Wykażemy, że funkcja f nie ma miejsc zerowych.

Rozwiązanie:

Przekształcimy tożsamościowo wzór opisujący funkcję f.

$f(x) = (x+2)^2 - x(x+1) - 3x$

Zastosujemy wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$f(x) = x^2 + 4x + 4 - x(x+1) - 3x$

Wykonamy mnożenie jednomianu przez sumę algebraiczną.

$f(x) = x^2 + 4x + 4 - x^2 - x - 3x$

Przeprowadzimy redukcję wyrazów podobnych.

$f(x) = 4$

Po zastosowaniu wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy oraz przeprowadzeniu redukcji wyrazów podobnych otrzymaliśmy

$f(x) = 4$.

Funkcja f dla każdej liczby rzeczywistej przyjmuje wartość 4.

Stąd wniosek, że funkcja f nie posiada miejsc zerowych.

Przykład 6

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru.

$f(x) = \frac{3ax-6}{x^2+5}$, gdy $x \in \mathbb{R}$.

Wyznaczymy a tak, aby miejscem zerowym funkcji f była liczba (-2).

Rozwiązanie:

Rozwiążemy równanie $f(-2) = 0$.

$\frac{3a\cdot(-2)-6}{(-2)^2+5} = 0$

$\frac{-6a-6}{4+5} = 0$

$\frac{-6a-6}{9} = 0$

Obie strony równania mnożymy przez 9.

$-6a = 6$

Obie strony równania dzielimy przez liczbę (-6).

$a = -1$

Odpowiedź:

Liczba (-2) jest miejscem zerowym funkcji f wtedy, gdy $a = -1$.

Ważne!

Aby wyznaczyć miejsce zerowe funkcji opisanej za pomocą wzoru należy rozwiązać równanie $f(x) = 0$.

Słownik

miejsce zerowe funkcji

argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość równą 0

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj przykłady przedstawione w animacji. Spróbuj je rozwiązać samodzielnie, a następnie porównaj je z tymi, które są podane w animacji.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1DvTsMBP

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej wyznaczania miejsca zerowego funkcji.

Po przeanalizowaniu animacji wykonaj poniższe polecenia.

Polecenie 2

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru.

$f(x) = \frac{x^2+10x+25}{x^2+5x}$

Wyznacz jej dziedzinę oraz oblicz jej miejsca zerowe (o ile istnieją).

Polecenie 3

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru.

$f(x) = 3a - 3x^2.$

Wyznacz a tak, aby miejscem zerowym funkcji f była liczba $(-1, 5)$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Anna Jeżewska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wyznaczanie miejsca zerowego funkcji opisanej za pomocą wzoru

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje. Zakres podstawowy.

Uczeń:

2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza miejsca zerowe funkcji opisanej za pomocą wzoru
- sprawdza, czy dana liczba jest miejscem zerowym funkcji
- udowadnia, że dana liczba jest miejscem zerowym funkcji

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- konkurs zadaniowy
- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e‑materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele lekcji oraz ustala z uczniami kryteria osiągnięcia sukcesu.
2. Uczniowie biorą udział w konkursie zadaniowym, którego celem jest przypomnienie sposobów rozwiązywania równań.
   Przykładowe zadania konkursowe.
   a) $4x^2 - (1-2x)^2 = 11 - 2x$,
   b) $(2x-3)^2 - 6 \cdot (5-2x) = (2x-5)(2x+5) + 4$,
   c) $(2x-4)(x-2) = (x-2)(x+6)$,
   d) $2x^2 + 3x = 0$,
   e) $\sqrt{x-2} = 2$.
   Uczeń, który najszybciej rozwiązał zadania oraz uzyskał poprawne wyniki otrzymuje ocenę bardzo dobry.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie samodzielnie analizują przykłady zamieszczone w sekcji „Przeczytaj”.
2. Po upływie wyznaczonego czasu łączą się w pary i wymieniają się uzyskanymi wiadomościami.
3. Uczniowie oglądają animację przedstawiającą przykłady wyznaczania miejsca zerowego funkcji opisanej za pomocą wzoru i rozwiązują samodzielnie wskazane polecenia.
4. Dyskusja ‑ jak wyznaczyć miejsce zerowe funkcji?
5. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela i wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jeden z uczniów podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazując na mocne i słabe strony pracy uczniów.
3. Nauczyciel ocenia indywidualną pracę i zaangażowanie poszczególnych uczniów.

Praca domowa:

1. Uczniowie rozwiązują w domu ćwiczenia, których nie rozwiązywali w czasie zajęć.
2. Zadanie dla chętnych:
   Określ dziedzinę i wyznacz miejsce zerowe funkcji:
   a) $f(x) = \sqrt{8-4x}$,
   b) $f(x) = \frac{\sqrt{x-7}}{x^2+2}$,
   c) $f(x) = \frac{\frac{1}{3}x^2-3}{\sqrt{x-1}}$.

Materiały pomocnicze:

Miejsce zerowe funkcji

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać na zajęciach pokazujących zastosowanie równań.