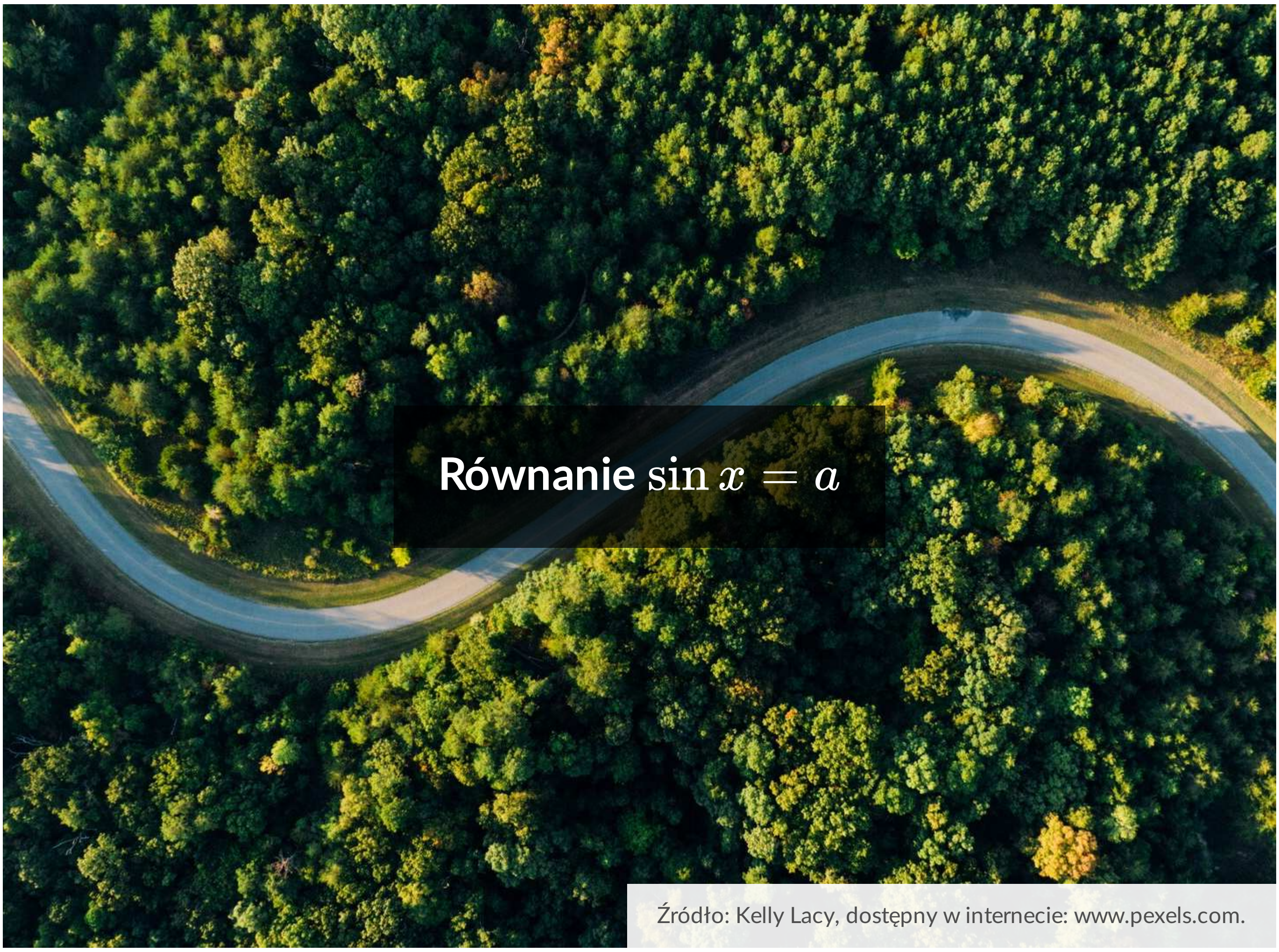
Równanie $\sin x = a$

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Źródło: Kelly Lacy, dostępny w internecie: www.pexels.com.

Poznałeś już wykres funkcji trygonometrycznej $y = \sin x$.

Znasz już także podstawowe własności tego wykresu: środki symetrii i osie symetrii. Zapoznałeś się również z charakterystycznymi własnościami funkcji sinus: jest ona funkcją okresową i jej zbiorem wartości jest przedział $\langle -1,\ 1\rangle$. Wykorzystamy opisane powyżej fakty do rozwiązywania równań postaci: $\sin\ x = a$.

Twoje cele

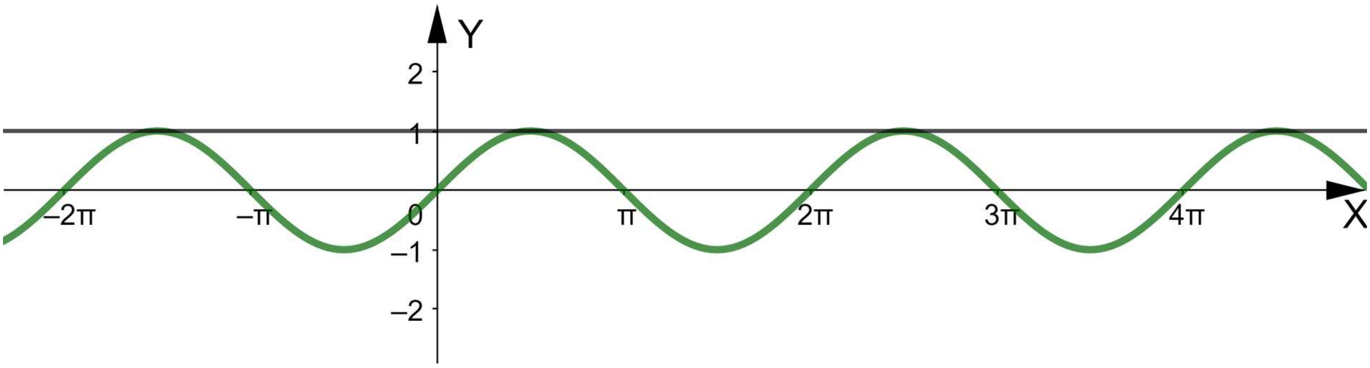
- Rozwiążesz równanie postaci: $\sin\ x = a$ w zadanym przedziale.
- Rozwiążesz równanie postaci: $\sin\ x = a$ w zbiorze liczb rzeczywistych.
- Rozwiążesz równanie postaci: $\sin(cx + d) = a$ w zbiorze liczb rzeczywistych.

Przeczytaj

Rozwiązywanie równań: $\sin x = 1$, $\sin x = -1$

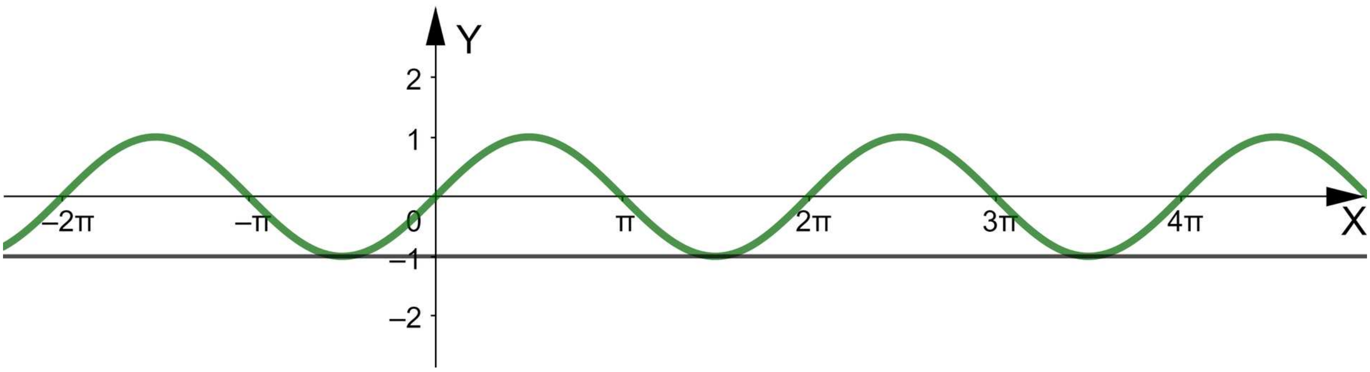
Rozpocznijmy rozwiązywanie równań postaci $\sin x = a$ od następującej obserwacji: ponieważ zbiorem wartości funkcji $y = \sin x$ jest przedział $\langle -1, 1 \rangle$, zatem dla liczb $a \notin \langle -1, 1 \rangle$ równanie $\sin x = a$ nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.

Na początek rozwiążemy równanie $\sin x = 1$.



Zauważmy, że w przedziale $\langle 0, 2\pi)$ funkcja $y = \sin x$ przyjmuje wartość 1 tylko dla argumentu $x = \frac{\pi}{2}$. Funkcja $y = \sin x$ jest funkcją okresową o okresie zasadniczym $T = 2\pi$, zatem wszystkie rozwiązania równania mają postać: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Postępując analogicznie rozwiązujemy równanie $\sin x = -1$.



Rozwiązaniem równania $\sin x = -1$ jest każda liczba postaci $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Rozwiązywanie równań: $\sin x = a$

Aby rozwiązać równanie $\sin x = a$ wykorzystamy wykresy funkcji $y = \sin x$ i $y = a$. Na aplecie możemy poruszać suwakiem. Zwróćmy uwagę, że prosta $y = a$ przecina wykres w dwóch typach punktów; jedne z nich są pokolorowane na czerwono, pozostałe na pomarańczowo. Zauważmy, że punkty pokolorowane na czerwono są w stałych odległościach równych 2π. Podobna sytuacja ma miejsce w przypadku punktów pokolorowanych na pomarańczowo. Zatem będą istnieć dwie serie rozwiązań.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DfIlfNzML

Pozostaje ustalić, jakie są zależności między punktami czerwonymi i pomarańczowymi.

Wykorzystajmy poniższy aplet.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DfIlfNzML

Poruszajmy suwakiem. Zauważmy, że punkt czerwony w czasie przesuwania suwaka jest położony symetrycznie do punktu pomarańczowego względem prostej o równaniu $x = \frac{\pi}{2}$. Podobnie zachowują się pierwsze współrzędne tych punktów, co oznacza, że spełniają zależność: $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{\pi}{2}$. Stąd dostajemy, że $x_1 = \pi - x_2$.

Twierdzenie: o rozwiązywaniu równania trygonometrycznego

Możemy zatem zapisać algorytm szukania rozwiązań równania $\sin x = a$.

- Znajdujemy jedno rozwiązanie x_0 takie, że $\sin x_0 = a$.
- Zapisujemy pierwszą serię rozwiązań: $x_0 + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- Znajdujemy drugie rozwiązanie $\pi - x_0$.
- Zapisujemy drugą serię rozwiązań: $\pi - x_0 + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Uwaga:

W przypadku równań $\sin x = 1,\ \sin x = -1$ jest tylko jedna seria rozwiązań.

Przykład 1

Rozwiążemy w zbiorze liczb rzeczywistych równanie: $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Najpierw wyznaczymy jedno rozwiązanie równania $\sin x = -\frac{1}{2}$. Ponieważ $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, korzystając z nieparzystości funkcji sinus, otrzymujemy: $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$. Zatem poszukiwanym x_0 jest liczba $-\frac{\pi}{6}$. Wobec tego rozwiązaniami równania $\sin x = -\frac{1}{2}$ są: $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 2

Rozwiążemy równanie: $\sin x = -\frac{1}{2}$ w przedziale $\langle -\pi, 3\pi\rangle$.

Korzystając z rozwiązania przykładu 1 poszukamy rozwiązań, które znajdują się w przedziale $\langle -\pi, 3\pi\rangle$. Są to: $-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$.

Przykład 3

Rozwiążemy równanie $2\sin\ 3x = \sqrt{3}$ w przedziale $(-\pi, \pi)$. Przekształcamy równanie do postaci: $\sin\ 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Podstawiamy $z = 3x$, czyli otrzymujemy równanie $\sin z = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Znajdujemy jedno rozwiązanie: $z_0 = \frac{\pi}{3}$. Zatem rozwiązaniami równania $\sin z = \frac{\sqrt{3}}{2}$ są: $z = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $z = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Ponieważ $z = 3x$, wówczas rozwiązaniami równania $2\sin\ 3x = \sqrt{3}$ są $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$ lub $x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Pozostaje wybrać rozwiązania z przedziału $(-\pi, \pi)$: $-\frac{5\pi}{9}, -\frac{4\pi}{9}, \frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}$.

A teraz pokażemy, jak można rozwiązywać równania trygonometryczne z parametrem.

Przykład 4

Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ równanie $\sin(2x-1) = |a-1| - 3$ ma przynajmniej jedno rozwiązanie?

Ponieważ zbiorem wartości funkcji $y = \sin(2x-1)$ jest przedział $\langle -1, 1\rangle$, zatem muszą być spełnione dwie nierówności: $-1 \leq |a-1| - 3$ i $|a-1| - 3 \leq 1$. Wówczas $2 \leq |a-1|$ i $|a-1| \leq 4$. Wobec tego otrzymujemy $a \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 3, +\infty)$ i $a \in \langle -3, 5\rangle$, skąd otrzymujemy odpowiedź: $a \in \langle -3, -1\rangle \cup \langle 3, 5\rangle$.

Słownik

rozwiązanie równania z jedną niewiadomą

liczba spełniająca równanie, czyli liczba, która po podstawieniu za zmienną daje równość liczby po prawej i lewej stronie równania

zbiór rozwiązań równania z jedną niewiadomą

zbiór liczb spełniających równanie

Animacja

Zapoznaj się z poniższym filmem. Następnie spróbuj rozwiązać zadania pod nim zamieszczone.

Trwa wczytywanie danych ..

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DmXkeAfEj

Film nawiązujący do treści materiału dotyczący równania sinus X równe A.

Polecenie 1

Rozwiąż równanie $\sin(4x) = \sin(3x)$

Polecenie 2

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równanie $\sin x = a$

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:
Zakres rozszerzony 2) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych: sinus, cosinus, tangens;
Zakres rozszerzony 3) wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje równanie postaci: $\sin x = a$ w zadanym przedziale,
- rozwiązuje równanie postaci: $\sin x = a$ w zbiorze liczb rzeczywistych,
- rozwiązuje równanie postaci: $\sin(cx + d) = a$ w zbiorze liczb rzeczywistych,
- analizuje metody rozwiązywania równania postaci $\sin x = a$.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;

- opowiadanie.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj".

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi wybraną osobę o odczytanie tematu lekcji tj. „Równanie $\sin x = a$", a następnie określa cele i kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do wspomnianego tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi, aby wybrany uczeń przeczytał polecenie numer 1 z sekcji „Animacja". Uczniowie zapoznają się z materiałem i zapisują ewentualne problemy z jego zrozumieniem. Następnie dzielą się na grupy i ponownie analizują jego treść wspólnie wyjaśniając zaistniałe wątpliwości.
2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się". Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. Kolejne ćwiczenia nr 3-5 uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inna parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi, zapisują problemy, które napotkali podczas rozwiązywania ćwiczeń.
4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia numer 6, 7 i 8 po wykonaniu każdego z nich następuje omówienie rozwiązania przez nauczyciela.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Równanie $\sin x = a$” i inicjuje krótką rozmowę na temat kryteriów sukcesu. Czego się uczniowie nauczyli? Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie i – jeśli to potrzebne – uzupełnia informacje.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Równanie $\sin x = a$”).

Materiały pomocnicze:

- Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Animacja” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Równanie $\sin x = a$”.