



Równoważne przekształcanie układów równań

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Gra edukacyjna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Źródło: Rainer Bleek, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Aby rozwiązać algebraicznie układy równań liniowych, możemy przekształcać je równoważnie tak, aby zostały doprowadzone do najprostszej postaci. Postępując w ten sposób, po każdym przekształceniu otrzymujemy układ prostszy, ale równoważny danemu. Mamy zatem pewność, że rozwiązanie układu równań, który otrzymamy w ostatnim kroku, jest rozwiązaniem układu wyjściowego.

W tym materiale zajmiemy się twierdzeniami i metodami, które pozwalają nam sprawnie wykonać takie przekształcenia.

Twoje cele

- Sformułujesz definicję układu równań równoważnych.
- Wskażesz równoważne układy równań.
- Przekształcisz układ równań tak, aby otrzymać układ równoważny.
- Określisz przekształcenie pozwalające uzyskać układ równoważny.

Przeczytaj

Definicja: Równania równoważne

Równania liniowe nazywamy równoważnymi, gdy mają ten sam zbiór rozwiązań.

Twierdzenie: Równania równoważne

- Jeśli w danym równaniu uprościmy wyrażenia znajdujące się po każdej stronie znaku równości (opuścimy nawiasy, wykonamy redukcję wyrazów podobnych), to otrzymane równanie jest równoważne danemu.
- Jeśli do obu stron danego równania dodamy tę samą liczbę (to samo wyrażenie), to otrzymane równanie jest równoważne danemu.
- Jeśli obie strony danego równania pomnożymy przez tę samą liczbę (to samo wyrażenie), która w dziedzinie równania nie przyjmuje wartości równych zero, to otrzymane równanie jest równoważne danemu.

Definicja: Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Układem równań liniowych z dwiema niewiadomymi nazywamy koniunkcję dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Układ taki przyjmuje postać:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

gdzie:

x oraz y – oznaczają niewiadome,

a_1, a_2, b_1 oraz b_2 – współczynniki przy niewiadomych odpowiednio x oraz y , przy czym przynajmniej jedna z pary liczb a_1 i a_2 oraz b_1 i b_2 jest różna od zera,

c_1 i c_2 – nazywamy wyrazami wolnymi.

Definicja: Rozwiązanie układu równań

Rozwiązaniem takiego układu równań jest każda para liczb spełniających jednocześnie każde równanie danego układu równań.

Przy czym taki układ równań może mieć jedno rozwiązanie, nieskończenie wiele rozwiązań lub nie mieć rozwiązania.

Definicja: Równoważne układy równań

Dwa układy równań liniowych nazywamy równoważnymi, gdy mają ten sam zbiór rozwiązań.

Przykład 1

Dany jest układ równań

$$\begin{cases} \frac{(x+3)^2}{3} + 2 \cdot (x - 2y^2) = \frac{1}{3}x^2 - (2y - 1)^2 \\ \frac{2x-y}{2} + \frac{3y-4x}{3} = \frac{x-1}{3} \end{cases}$$

Przekształcimy równoważnie równania wchodzące w jego skład.

$$\begin{cases} \frac{(x+3)^2}{3} + 2 \cdot (x - 2y^2) = \frac{1}{3}x^2 - (2y - 1)^2 & \text{mnożymy obie strony równania przez 3} \\ \frac{2x-y}{2} + \frac{3y-4x}{3} = \frac{x-1}{3} & \text{mnożymy obie strony równania przez 6} \end{cases}$$

W otrzymanym układzie równoważnym

$$\begin{cases} (x+3)^2 + 6 \cdot (x - 2y^2) = x^2 - 3 \cdot (2y - 1)^2 & \text{stosujemy wzory skróconego mnożenia} \\ 3 \cdot (2x - y) + 2 \cdot (3y - 4x) = 2 \cdot (x - 1) & \text{usuwamy nawiasy} \end{cases}$$

W otrzymanym układzie równoważnym

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 9 + 6 \cdot (x - 2y^2) = x^2 - 3 \cdot (4y^2 - 4y + 1) & \text{usuwamy nawias} \\ 6x - 3y + 6y - 8x = 2x - 2 & \text{redukujemy wyrazy podobne} \end{cases}$$

W otrzymanym układzie równoważnym

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 9 + 6x - 12y^2 = x^2 - 12y^2 + 12y - 3 & \text{redukujemy wyrazy podobne} \\ -4x + 3y = -2 \end{cases}$$

W otrzymanym układzie równoważnym

$$\begin{cases} 12x - 12y = -12 & \text{dzielimy obie strony równania przez 12} \\ -4x + 3y = -2 \end{cases}$$

Otrzymaliśmy układ równań

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ -4x + 3y = -2 \end{cases}$$

równoważny do układu

$$\begin{cases} \frac{(x+3)^2}{3} + 2 \cdot (x - 2y^2) = \frac{1}{3}x^2 - (2y - 1)^2 \\ \frac{2x-y}{2} + \frac{3y-4x}{3} = \frac{x-1}{3} \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para liczb $\begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \end{cases}$ (sprawdź).

Nie jest to jednak łatwe do odgadnięcia. Dzięki twierdzeniom, które są przedstawione poniżej, możemy bez problemu wyznaczyć takie rozwiązanie.

Twierdzenie: Równoważny układ równań

Jeśli z jednego układu równań wyznaczymy jedną niewiadomą jako funkcję drugiej i otrzymane wyrażenie podstawimy do drugiego równania, to układ równań złożony z pierwszego równania i tak przekształconego drugiego równania jest równoważny danemu.

Przykład 2

Dane są układy równań $\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = 7 \end{cases}$ oraz $\begin{cases} x = 15 - y \\ 15 - y - y = 7 \end{cases}$.

Na podstawie powyższego twierdzenia są to układy równoważne.

Sprawdzimy prawdziwość tej tezy.

Z drugiego równania układu równań $\begin{cases} x = 15 - y \\ 15 - y - y = 7 \end{cases}$ możemy łatwo obliczyć, że $y = 4$.

Wtedy, podstawiając tę wartość do pierwszego równania, otrzymujemy $x = 11$.

Zatem rozwiązaniem drugiego układu równań jest para liczb $\begin{cases} x = 11 \\ y = 4 \end{cases}$.

Sprawdzimy, czy para ta spełnia pierwszy układ równań $\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = 7 \end{cases}$.

Podstawiamy podane wartości $\begin{cases} x = 11 \\ y = 4 \end{cases}$ w miejsca niewiadomych w równaniach składowych i sprawdzamy, czy lewe strony są równe odpowiednio prawym stronom tych równań.

$$L_1 = x + y = 11 + 4 = 15 = P_1$$

$$L_2 = x - y = 11 - 4 = 7 = P_2$$

A więc para liczb $\begin{cases} x = 11 \\ y = 4 \end{cases}$ spełnia również pierwszy układ równań.

Zgodnie z definicją układy $\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = 7 \end{cases}$ oraz $\begin{cases} x = 15 - y \\ 15 - y - y = 7 \end{cases}$ są więc równoważne.

Przykład 3

Dany jest układ równań $\begin{cases} -3y + x = 14 \\ 2x + 3 \cdot (x + y) = -2 \end{cases}$.

Przekształcając równoważnie jego równania składowe oraz stosując powyższe twierdzenie, otrzymamy kolejne układy równoważne i znajdziemy spełniającą go parę liczb.

$$\begin{cases} -3y + x = 14 \\ 2x + 3 \cdot (x + y) = -2 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy niewiadomą x .

Drugie równanie przekształcamy równoważnie, opuszczając nawias i redukując wyrażenia podobne po lewej stronie równania.

$$\begin{cases} x = 14 + 3y \\ 2x + 3x + 3y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 14 + 3y \\ 5x + 3y = -2 \end{cases}$$

Wyznaczony w pierwszym równaniu x , podstawiamy do drugiego równania. Zgodnie z twierdzeniem, otrzymujemy układ równoważny.

$$\begin{cases} x = 14 + 3y \\ 5 \cdot (14 + 3y) + 3y = -2 \end{cases}$$

Pierwsze równanie przepisujemy, a drugie rozwiązujemy, przekształcając równoważnie, opuszczając najpierw nawias, a następnie redukując wyrazy podobne.

$$\begin{cases} x = 14 + 3y \\ 70 + 15y + 3y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 14 + 3y \\ 70 + 18y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 14 + 3y \\ 18y = -72 \mid : 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 14 + 3y \\ y = -4 \end{cases}$$

Obliczoną w ten sposób wartość niewiadomej y , wstawiamy do pierwszego równania, ponownie korzystając z podanego wyżej twierdzenia.

Rozwiązujemy równanie, obliczając wartość niewiadomej x .

$$\begin{cases} x = 14 + 3 \cdot (-4) \\ y = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$$

Rozwiązaniem danego w przykładzie **układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi**

$$\begin{cases} -3y + x = 14 \\ 2x + 3 \cdot (x + y) = -2 \end{cases} \text{ jest para liczb } \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}.$$

Przykład 4

Dane są układy równań $\begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ -2x + 5y = -5 \end{cases}$ oraz $\begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ 0x + 2y = 6 \end{cases}$.

Sprawdzimy, czy zgodnie z powyższym twierdzeniem są to **układy równoważne**.

Z drugiego równania układu równań $\begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ 0x + 2y = 6 \end{cases}$ możemy łatwo obliczyć, że $y = 3$.

Wtedy, podstawiając tę wartość do pierwszego równania, otrzymujemy

$$\begin{cases} 2x - 3 \cdot 3 = 11 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 20 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 3 \end{cases}$$

Zatem rozwiązaniem drugiego układu równań jest para liczb $\begin{cases} x = 10 \\ y = 3 \end{cases}$.

Sprawdzimy, czy para ta spełnia pierwszy układ równań $\begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ -2x + 5y = -5 \end{cases}$.

Podstawiamy w tym celu, podane wartości $\begin{cases} x = 10 \\ y = 3 \end{cases}$ w miejsca niewiadomych w równaniach składowych i sprawdzamy, czy lewe strony są równe odpowiednio prawym stronom tych równań.

$$L_1 = 2x - 3y = 2 \cdot 10 - 3 \cdot 3 = 11 = P_1$$

$$L_2 = -2x + 5y = -2 \cdot 10 + 5 \cdot 3 = -5 = P_2$$

A więc para liczb $\begin{cases} x = 10 \\ y = 3 \end{cases}$ spełnia również pierwszy układ równań.

Zgodnie z definicją układy równań $\begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ -2x + 5y = -5 \end{cases}$ oraz $\begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ 0x + 2y = 6 \end{cases}$ są więc równoważne.

Zauważmy, że w powyższym przykładzie drugie równanie w drugim układzie jest sumą równań z pierwszego układu. Zanotujmy spostrzeżenie:

Jeśli obie strony każdego z równań (lub jednego z nich) danego układu równań pomnożymy przez dowolne liczby różne od zera, a następnie równania te dodamy stronami i tak otrzymanym równaniem zastąpimy jedno z równań układu, to otrzymamy układ równań równoważny danemu.

Przykład 5

Dany jest układ równań $\begin{cases} \sqrt{3}x + \sqrt{2}y = \sqrt{2} \\ \sqrt{6}x + y = 1 \end{cases}$.

Przekształcając równoważnie równania składowe oraz stosując powyższe twierdzenie, otrzymamy kolejne układy równoważne i ostatecznie znajdziemy zbiór rozwiązań wyjściowego układu.

Obie strony pierwszego równania mnożymy przez $(-\sqrt{2})$.

$$\begin{cases} -\sqrt{6}x - 2y = -2 \\ \sqrt{6}x + y = 1 \end{cases}$$

Równania dodamy stronami i tak otrzymanym równaniem zastąpimy pierwsze z równań układu.

Otrzymany układ równań jest, zgodnie z twierdzeniem, równoważny danemu.

$$\begin{cases} -2y + y = -2 + 1 \\ \sqrt{6}x + y = 1 \end{cases}$$

Redukując wyrazy podobne, rozwiązujemy pierwsze równanie.

$$\begin{cases} y = 1 \\ \sqrt{6}x + y = 1 \end{cases}$$

Obliczoną w ten sposób wartość niewiadomej y , wstawiamy do drugiego równania i obliczamy wartość niewiadomej x .

$$\begin{cases} y = 1 \\ \sqrt{6}x + 1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ \sqrt{6}x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Rozwiązaniem danego w przykładzie układu równań liniowych $\begin{cases} \sqrt{3}x + \sqrt{2}y = \sqrt{2} \\ \sqrt{6}x + y = 1 \end{cases}$ jest

para liczb $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$.

Przykład 6

Wróćmy do układu równań z Przykładu 1:

$$\begin{cases} \frac{(x+3)^2}{3} + 2 \cdot (x - 2y^2) = \frac{1}{3}x^2 - (2y - 1)^2 \\ \frac{2x-y}{2} + \frac{3y-4x}{3} = \frac{x-1}{3} \end{cases}$$

Przekształcając równoważnie jego równania składowe, doprowadziliśmy układ do prostszej postaci:

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ -4x + 3y = -2 \end{cases}$$

Stosując przedstawione w materiale twierdzenia możemy znaleźć jego rozwiązanie.

I METODA:

Wyznaczamy z pierwszego równania niewiadomą x i podstawiamy do drugiego równania.

Drugie równanie przekształcamy równoważnie, opuszczając nawias i redukując wyrażenia podobne po lewej stronie równania.

$$\begin{cases} x = y - 1 \\ -4 \cdot (y - 1) + 3y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y - 1 \\ -4y + 4 + 3y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y - 1 \\ -y = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y - 1 \\ y = 6 \end{cases}$$

Obliczoną w ten sposób wartość niewiadomej y , wstawiamy do pierwszego równania i obliczamy wartość niewiadomej x .

$$\begin{cases} x = 6 - 1 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \end{cases}$$

II METODA:

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ -4x + 3y = -2 \end{cases}$$

Obie strony pierwszego równania mnożymy przez 4.

$$\begin{cases} 4x - 4y = -4 \\ -4x + 3y = -2 \end{cases}$$

Równania dodamy stronami i tak otrzymanym równaniem zastąpimy drugie z równań układu. Otrzymany układ równań jest, zgodnie z twierdzeniem, równoważny danemu.

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ -4y + 3y = -4 - 2 \end{cases}$$

Redukując wyrazy podobne, rozwiązujemy drugie równanie.

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ -y = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ y = 6 \end{cases}$$

Obliczoną w ten sposób wartość niewiadomej y , wstawiamy do pierwszego równania i obliczamy wartość niewiadomej x .

$$\begin{cases} x - 6 = -1 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} \frac{(x+3)^2}{3} + 2 \cdot (x - 2y^2) = \frac{1}{3}x^2 - (2y - 1)^2 \\ \frac{2x-y}{2} + \frac{3y-4x}{3} = \frac{x-1}{3} \end{cases} \text{ jest para liczb } \begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \end{cases}.$$

Słownik

układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi

układ równań postaci:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases},$$

gdzie przynajmniej jedna z pary liczb a_1 i a_2 oraz b_1 i b_2 jest różna od zera

równoważne układy równań

układy równań, które mają ten sam zbiór rozwiązań

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Zagraj w grę. Twoim zadaniem będzie połączenie ze sobą równoważnych układów równań. Nazwij wykonane przekształcenie.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1G3CXbaF>

Polecenie 2

Wykonaj domino matematyczne (10 kamieni) z równoważnymi układami równań tak, aby utworzyły zamknięty układ. Przekaż je grupie uczniów z Twojej klasy. Określ jakie przekształcenie zostało wykonane.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐

Jeśli z jednego równania układu równań wyznaczymy jedną niewiadomą i otrzymane wyrażenie podstawimy do drugiego równania, to układ równań złożony z pierwszego równania i tak przekształconego drugiego równania jest równoważny danemu.

☐

Jeśli obie strony pierwszego z równań danego układu równań pomnożymy przez liczbę ujemną, a następnie równania te dodamy stronami i tak otrzymanym równaniem zastąpimy jedno z równań układu, to otrzymamy układ równań równoważny danemu.

☐

Jeśli zamienimy kolejność równań w układzie, to otrzymany układ nie jest równoważny danemu.

☐

Jeśli obie strony pierwszego równania danego układu równań pomnożymy przez liczbę różną od zera, to nie otrzymamy układu równoważnego danemu.

☐

Jeśli każde z równań układu przekształcimy równoważnie do najprostszej postaci, to otrzymamy układ równoważny danemu.

Ćwiczenie 2



Połącz w pary równoważne układy równań .

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = x^2 + y^2 + 4 \\ (x-2)(x+2) + y = (x-3)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 7y = 6 \\ 5x + y = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot (x+6) + 3 \cdot (y+2) = 5 \\ x + y - 2 \cdot (x-2y) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ 6x + y = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2x-y}{2} - \frac{3x-2y}{3} = 1 \\ \frac{x}{5} - \frac{y}{4} = \frac{1}{20} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 6 \\ 4x - 5y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 \cdot (x-2y) - (2-5y) = x+4 \\ \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{3} = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 18 + 3y = 5 \\ x + y - 2x + 4y = 4 \end{cases}$$

Ćwiczenie 3



Ułóż równoważne układy równań w kolejności zgodnej z opisanymi przekształceniami.

1. Mnożymy przez 2 obie strony pierwszego równania.
2. Dodajemy równania stronami i zapisujemy tak otrzymane równanie jako pierwsze równanie w układzie. Drugie równanie pozostaje bez zmian.
3. Redukujemy wyrażenia podobne w pierwszym równaniu. Obliczamy wartość niewiadomej y .
4. Podstawienie otrzymanej wartości y do drugiego równania. Zmiana kolejności równań w układzie.
5. Obliczamy wartość niewiadomej x .

$$\begin{cases} -0,5x + 2y = 10 \\ x + 3y = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y + 3y = 20 + 22 \\ x + 3y = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 6 \\ x + 3y = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 4y = 20 \\ x + 3y = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3 \cdot 6 = 22 \\ y = 6 \end{cases}$$

Ćwiczenie 4



Przyciągnij opis przekształcenia, jakie należało wykonać, aby otrzymać każdy kolejny równoważny układ równań.

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} 5x - 3x - 3y - 10 = 8 - x - 4y \\ -2x - 3y = 16 \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{l} 3x + y = 18 \\ -2x - 3y = 16 \end{array} \right., \\
 & \left\{ \begin{array}{l} y = 18 - 3x \\ -2x - 3 \cdot (18 - 3x) = 16 \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{l} y = 18 - 3x \\ -2x - 54 + 9x = 16 \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{l} y = 18 - 3x \\ 7x = 70 \end{array} \right., \\
 & \left\{ \begin{array}{l} y = 18 - 3x \\ x = 10 \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{l} x = 10 \\ y = 18 - 3 \cdot 10 \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{l} x = 10 \\ y = -12 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Przekształcenie	$\left\{ \begin{array}{l} 5x - 3 \cdot (x + y) - 10 = 8 - (x + 4y) \\ -2x - 3y = 16 \end{array} \right.,$
	$\left\{ \begin{array}{l} 5x - 3x - 3y - 10 = 8 - x - 4y \\ -2x - 3y = 16 \end{array} \right.,$
	$\left\{ \begin{array}{l} 3x + y = 18 \\ -2x - 3y = 16 \end{array} \right.,$
	$\left\{ \begin{array}{l} y = 18 - 3x \\ -2x - 3 \cdot (18 - 3x) = 16 \end{array} \right.,$
	$\left\{ \begin{array}{l} y = 18 - 3x \\ -2x - 54 + 9x = 16 \end{array} \right.,$
	$\left\{ \begin{array}{l} y = 18 - 3x \\ 7x = 70 \end{array} \right.,$
	$\left\{ \begin{array}{l} y = 18 - 3x \\ x = 10 \end{array} \right.,$
	$\left\{ \begin{array}{l} x = 10 \\ y = 18 - 3 \cdot 10 \end{array} \right.,$
	$\left\{ \begin{array}{l} x = 10 \\ y = -12 \end{array} \right.,$

Ćwiczenie 5



Dany układ równań przekształćano równoważnie, tak aby doprowadzić go do najprostszej postaci i uzyskać jego rozwiązanie.

Podaj poprawną kolejność zapisu.

$$\begin{cases} \frac{2x-y}{3} - \frac{2y-x}{2} = \frac{1}{6} \\ 2 \cdot (x+y) - 3 \cdot (y-x) = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 4x - 2y - 6y + 3x = 1 \\ 5x - y = -4 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 2 \cdot (2x - y) - 3 \cdot (2y - x) = 1 \\ 2x + 2y - 3y + 3x = -4 \end{cases}$$



$$\begin{cases} -33x = 33 \\ y = 5x + 4 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \cdot (-1) + 4 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 7x - 40x - 32 = 1 \\ y = 5x + 4 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 7x - 8y = 1 \\ y = 5x + 4 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 7x - 8 \cdot (5x + 4) = 1 \\ y = 5x + 4 \end{cases}$$



Ćwiczenie 6



Dany układ równań przekształcano równoważnie, tak aby doprowadzić go do najprostszej postaci i uzyskać jego rozwiązanie.

Podaj poprawną kolejność zapisu.

$$\begin{cases} (x-3)^2 - (y-2)^2 = (x-y)(x+y) + 9 \\ 6 \cdot (x+y) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x + 4y = 4 \\ 6x + 6y = 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 4y + 6y = 4 + 1 \\ 6x + 6y = 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 10y = 5 \\ 6x + 6y = 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x^2 - 6x + 9 - y^2 + 4y - 4 = x^2 - y^2 + 9 \\ 6x + 6y = 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ 6x + 6 \cdot \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} -6x + 4y + 5 = 9 \\ 6x + 6y = 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 6x = 1 - 3 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$



Ćwiczenie 7



Przekształć równoważnie układ równań do najprostszej postaci. Podaj rozwiązanie tego układu.

$$\begin{cases} 2 \cdot (3y - x) + 5 \cdot (x - y) = 11 \\ \frac{x+y}{4} - 3 \cdot \frac{1-x}{2} = \frac{15+y}{4} \end{cases}$$

Ćwiczenie 8



Znajdź rozwiązanie układu równań, dodając do siebie odpowiednio przekształcone jego równania składowe.

$$\begin{cases} (2x - 3)^2 - (1 - 2x)^2 = 3 \cdot (y + 1) \\ (y - 4)^2 - (3 - y)^2 = 2 \cdot (x + 2) \end{cases}$$

Dla nauczyciela

Autor: Beata Wojciechowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równoważne przekształcanie układów równań

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny.

IV. Układy równań. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi; podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- formułuje definicję równoważnych układów równań
- wskazuje równoważne układy równań
- przekształca układ równań tak, aby otrzymać układ równoważny
- określa przekształcenie pozwalające uzyskać układ równoważny

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- mapa myśli
- dyskusja
- JIGSAW

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają sobie w grupach wiadomości i umiejętności związane z pojęciem równania równoważnego oraz przekształceniami równań równoważnych.
3. Przedstawiciele grup krótko przypominają zasady równoważnego przekształcania równań.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli klasę na trzy grupy – uczniowie pracują metodą JIGSAW.
2. Każda grupa pracuje nad innym rodzajem równoważnych przekształceń układów równań.
 - Grupa 1
Równoważne przekształcanie równań wchodzących w skład układu równań. Uczniowie mogą skorzystać z części teoretycznej oraz Przykładu 1.
 - Grupa 2
Równoważne przekształcanie układu równań poprzez wyznaczenie jednej niewiadomej jako funkcji drugiej i podstawienie otrzymanego wyrażenie do drugiego równania. Uczniowie mogą skorzystać z części teoretycznej oraz Przykładu 2 i Przykładu 3.
 - Grupa 3
Równoważne przekształcanie układu równań poprzez pomnożenie obu stron każdego z równań (lub jednego z nich) danego układu przez dowolne liczby

różne od zera, a następnie dodanie tych równań stronami i zastąpienie tak otrzymanym równaniem jednego z równań układu. Uczniowie mogą skorzystać z części teoretycznej oraz Przykładu 4 i Przykładu 5.

3. Uczniowie tworzą trzyosobowe grupy – w ich skład wchodzi jeden z przedstawicieli każdej z początkowych grup. Przedstawiciele grup prezentują poznaną metodę, przekazują sposoby jej zastosowania.
4. Uczniowie ponownie łączą się w grupy wyznaczone na początku zajęć. Wymieniają się uzyskaną wiedzą, grają wspólnie w grę edukacyjną i rozwiązują ćwiczenia interaktywne.
5. Nauczyciel kontroluje pracę grup, wyjaśnia wątpliwości.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń krótko podsumowuje najważniejsze informacje z lekcji.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, których nie zdążyli wykonać na lekcji.

Materiały pomocnicze:

- [Rozwiązywanie równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą](#)
- [Układ dwóch równań liniowych](#)

Wskazówki metodyczne:

Gra edukacyjna może być wykorzystana przez uczniów do utrwalenia wiadomości z lekcji oraz podczas lekcji omawiających poszczególne metody rozwiązywania układów równań.