Działania na logarytmach

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

> *W matematyce raz udowodnione twierdzenie na zawsze zachowuje swoją prawdziwość.*
>
> Roman Sikorski (1920 — 1983) – polski matematyk

Zawartość tego materiału pozwoli Ci na utrwalenie i rozwinięcie umiejętności związanych z logarytmami. W przykładach pokazane są zastosowania twierdzenia na logarytm iloczynu, twierdzenia na logarytm ilorazu, twierdzenia na logarytm potęgi. Czyli twierdzeń, które powinny być Ci już znane. Przypomnimy sobie też przydatne wzory, wynikające bezpośrednio z definicji logarytmu.

Zapoznając się z zamieszczonymi w materiale przykładami, staraj się je najpierw rozwiązać, a dopiero następnie porównaj z proponowanym rozwiązaniem. Przedstawione rozwiązania celowo nie są w każdym przypadku najprostsze, aby sprowokować Cię do poszukiwania efektywniejszych rozwiązań.

Materiał dotyczący rozwiązywania prostych nierówności logarytmicznych wykracza nieco poza obowiązkowe treści wynikające bezpośrednio z podstawy programowej, ale wiadomości dotyczące tych zagadnień mogą Ci się przydać przy określaniu własności funkcji logarytmicznej i jej zastosowaniach.

> **Twoje cele**
>
> - Wykorzystasz wzór na logarytm potęgi, przekształcając wyrażenia zapisane za pomocą logarytmów.
> - Rozwiniesz umiejętności zamiany sumy (różnicy) logarytmów na logarytm jednomianu.
> - Przekształcisz wyrażenia arytmetyczne zawierające logarytmy.
> - Zapiszesz w prostszej postaci wyrażenia algebraiczne, korzystając z poznanych wzorów logarytmicznych.
> - Dobierzesz odpowiednią strategię, rozwiązując nietypowe problemy matematyczne zawierające logarytmy.

Przeczytaj

Na początek przypomnijmy, że nie obliczamy logarytmów z liczby 0 i liczb ujemnych, gdyż potęga a^x (dla $a > 0$, $a \neq 1$) nie przyjmuje ani wartości równej 0, ani wartości ujemnych.

Kilka przydatnych wzorów, wynikających bezpośrednio z definicji logarytmu.

Jeśli $a > 0$, $a \neq 1$ i $x > 0$ to:		
$\log_a 1 = 0$	$\log_a a = 1$	$a^{\log_a x} = x$

Przykład 1

Zapisane powyżej wzory wykorzystamy obliczając wartość wyrażenia $W = \log_7 1 \cdot \log_8 9 - \log_2\left(\sqrt{4}\right) + \sqrt[3]{5^{\log_5 8}}$.

Zauważmy najpierw, że

$$\log_7 1 = 0$$

$$\log_2\left(\sqrt{4}\right) = \log_2 2 = 1$$

$$\sqrt[3]{5^{\log_5 8}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Wynika stąd, że

$$W = 0 \cdot \log_8 9 - 1 + 2 = 1$$

Przykład 2

Wykażemy, że wartość wyrażenia $M = \sqrt{49^{1-\log_7 4}}$ jest liczbą większą od $1,5$.

Zapiszemy najpierw wyrażenie $49^{1-\log_7 4}$ w prostszej postaci.

W tym celu skorzystamy z podanych wyżej wzorów, z twierdzenia o logarytmie potęgi i twierdzenia o logarytmie ilorazu.

$$49^{1-\log_7 4} = 7^{2-2\cdot\log_7 4} = 7^{\log_7 49 - \log_7 16} = 7^{\log_7 \frac{49}{16}} = \frac{49}{16}$$

Wracamy do obliczania wartości wyrażenia W.

$$W = \sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{7}{4} = 1,75$$

Wartość wyrażenia W jest równa $1,75$, zatem jest większa od $1,5$, co należało wykazać.

W przykładzie 2 korzystaliśmy ze wzorów, wynikających z poznanych wcześniej twierdzeń. Zapiszemy je teraz w tabelce.

Jeśli $a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0, p \in \mathbb{R}$ **to:**		
$\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$	$\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$	$p \cdot \log_a x = \log_a x^p$

Pokażemy teraz przykład zastosowania logarytmów do znajdowania liczb spełniających określone własności.

Ważne!

Zauważmy najpierw, że:

$$\log_a x^2 = \begin{cases} 2 \cdot \log_a(-x) & \text{dla } x < 0 \\ 2 \cdot \log_a x & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

Przykład 3

Znajdziemy wszystkie liczby x spełniające warunek $\log_3 (x-2)^4 = 8$.

Rozważaną równość zapisujemy w postaci równoważnej.

$4 \cdot \log_3 |x-2| = 8$

Dzielimy obie strony równości przez 4.

$\log_3 |x-2| = 2$

Korzystamy z definicji logarytmu.

$|x-2| = 9$

Rozwiązujemy równanie z wartością bezwzględną.

$x - 2 = 9$ lub $x - 2 = -9$

$x = 11$ lub $x = -7$

Sprawdzamy jeszcze, czy dla którejś z wyznaczonych wartości liczba logarytmowana nie jest równa 0.

$11 - 2 = 9 \neq 0$ i $-7 - 2 \neq 0$

Zatem obie liczby 11 i (-7) spełniają warunki zadania.

Przykład 4

Znajdziemy takie liczy dodatnie x, które spełniają warunek $x^{\sqrt{x}} - \left(\sqrt{x}\right)^x = 0$.

1. Zakładamy, że $x \neq 1$.

Zapisujemy rozważaną równość w takiej postaci, aby po prawej stronie znalazło się wyrażenie $\left(\sqrt{x}\right)^{x}$.

$x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^{x}$

Ponieważ $x > 0$ i $x \neq 1$, możemy zlogarytmować obie strony równości, korzystając z logarytmu o podstawie x.

$\log_x x^{\sqrt{x}} = \log_x \left(\sqrt{x}\right)^{x}$

Z twierdzenia o logarytmie potęgi wynika, że

$\sqrt{x} \cdot \log_x x = x \cdot \log_x \sqrt{x}$

Ale $\log_x x = 1$ i $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, zatem

$\sqrt{x} \cdot \log_x x = \frac{1}{2}x \cdot \log_x x$

$\sqrt{x} = \frac{1}{2}x$

Obie strony równości są dodatnie, zatem możemy podnieść je do kwadratu.

$x = \frac{1}{4}x^2$

Stąd

$4x = x^2$

$x(x-4) = 0$

Zatem $x = 0$ (co jest niemożliwe, gdyż zakładaliśmy, że $x > 0$) lub $x = 4$.

Liczba 4 spełnia warunki zadania, bo jest dodatnia i różna od 1.

2. Zakładamy, że $x = 1$.

Obliczamy wartość rozważanego wyrażenia dla $x = 1$.

$x^{\sqrt{x}} - \left(\sqrt{x}\right)^{x} = 0$

$1^{\sqrt{1}} - \left(\sqrt{1}\right)^{1} = 1 - 1 = 0$

Liczba 1 spełnia więc warunki zadania.

Odpowiedź:

Podany warunek spełniają dwie liczby: 1 i 4.

Udowodnimy teraz twierdzenie, które jest bardzo przydatne we wszelkiego rodzaju przekształceniach logarytmicznych.

Twierdzenie: Twierdzenie o odwrotności logarytmu

Jeżeli $a > 0, a \neq 1$ i $b > 0, b \neq 1$ to:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Dowód

Oznaczmy:

$p = \log_a b$

$q = \log_b a$

Z definicji logarytmu wynika, że $a^p = b$ i $b^q = a$.

Stąd

$(b^q)^p = a^p$

$b^{p \cdot q} = b^1$

Z twierdzenia o równości potęg wynika, że $p \cdot q = 1$. Zatem

$\log_a b \cdot \log_b a = 1$, czyli $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Co należało wykazać.

Przykład 5

Znajdziemy liczbę x spełniającą warunek $10^{\log x} - x \cdot \log x \cdot \frac{1}{\log_{10} x} - \log_{\frac{1}{10}} x = 2$.

Z definicji logarytmu wynika, że szukana liczba musi być dodatnia i różna od 1.

Przekształcamy lewą stronę równości, korzystając z poznanych wzorów.

$L = 10^{\log x} - x \cdot \log x \cdot \frac{1}{\log_{10} x} - \log_{\frac{1}{10}} x$

$L = x - x \cdot 1 + \log x = \log x$

Stąd

$\log x = 2$

$x = 10^2$

$x = 100$

Ponieważ $100 > 0$ i $100 \neq 1$, zatem znaleziona liczba spełnia warunki zadania.

W ostatnim przykładzie pokażemy jak wykorzystać udowodnione powyżej twierdzenie, nie uciekając się do wzoru na zamianę podstawy logarytmu.

Przykład 6

Udowodnimy, że $\frac{1}{\log_2 7} + \frac{1}{\log_5 7} < 2$.

Korzystamy ze wzoru na odwrotność logarytmu, przekształcając lewą stronę równości.

$L = \frac{1}{\log_2 7} + \frac{1}{\log_5 7} = \log_7 2 + \log_7 5 = \log_7 10$

Ponieważ $7^2 = 49 > 10$, zatem $\log_7 10 < 2$.

Wynika stąd, że $\frac{1}{\log_2 7} + \frac{1}{\log_5 7} < 2$, co należało udowodnić.

Słownik

twierdzenie o odwrotności logarytmu

jeżeli $a > 0$, $a \neq 1$ i $b > 0$, $b \neq 1$ to:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją. Rozwiąż najpierw samodzielnie podane przykłady, a następnie porównaj z prezentowanymi rozwiązaniami.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DbcRIzrTy

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego działań na logarytmach.

Polecenie 2

Rozwiąż układ równań.

$$\begin{cases} \log x - \log y = 2 \\ \log x + \log y = 6 \end{cases}$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Zaznacz poprawną odpowiedź. Suma $\frac{1}{\log_3 12} + \frac{1}{\log_4 12}$ jest:

- wymierna dodatnia
- wymierna ujemna
- niewymierna dodatnia
- niewymierna ujemna

Ćwiczenie 2

Zaznacz poprawną odpowiedź. Liczba
$K = \log\frac{100}{1} + \log\frac{99}{2} + \log\frac{98}{3} + \ldots + \log\frac{2}{99} + \log\frac{1}{100}$ jest równa:

- -1
- 1
- 0
- -2

Ćwiczenie 3

Zaznacz, które z podanych wzorów są prawdziwe.

- [ ] $a^{\log_b a} = b$
- [ ] $\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$
- [ ] $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$
- [ ] $\log_a 1 - \log_a a = 0$

Ćwiczenie 4

Uzupełnij równości, wpisując w puste pola liczbę -1 lub liczbę 1.

$\frac{\log_{0,5} 8}{\log_2 2^3} =$ ____

$\frac{\log_2 \sqrt{2}}{\log \sqrt{10}} =$ ____

$\log_6 2 + \log_6 3 =$ ____

$\log_4 \frac{5}{7} - \log_4 \frac{20}{7} =$ ____

Ćwiczenie 5

Dane są liczby dodatnie x, y takie, że $7xy = x^2 + y^2$. Wykaż, że
$\log_3 \sqrt{xy} = \log_3(x+y) - 1$.
Uzupełnij rozwiązanie podanego wyżej zadania, przeciągając odpowiednie liczby.

$7xy = x^2 + y^2$

$\boxed{} \cdot xy = (x+y)^2$

$\log_3 \boxed{}\, xy = \log_3 (x+y)^2$

$\log_3 9 + \log_3 xy = \boxed{} \cdot \log_3(x+y)$

$\boxed{} + \log_3 xy = 2 \cdot \log_3(x+y)$

$\boxed{} + 0,5 \cdot \log_3 xy = \log_3(x+y)$

$\log_3 \sqrt{xy} = \log_3(x+y) - \boxed{}$

2 9 9 1 2 1

Ćwiczenie 6

Połącz w pary równe liczby.

$\log_2 3 \cdot \log_3 4$	$\log_9 4$
$2 \cdot \log \sqrt{2}$	$\log_3 9$
$\log_3 2$	$\log 3 - \log 6 + \log 4$
$\log_{\frac{1}{3}} 2$	$-\log_3 2$

Ćwiczenie 7

Udowodnij, że jeżeli liczby a, b są liczbami rzeczywistymi takimi, że $a > 0$, $b > 0$ i $a \neq 0$ to:

$\log_{a^2} b = \frac{1}{2} \cdot \log_a b$

Ćwiczenie 8

Dane są liczby $m > 0$, $m \neq 1$, $n > 0$ i $n \neq 1$. Wykaż, że:

$$\log_{\frac{1}{m}} \frac{1}{n} = \log_m n$$

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Działania na logarytmach

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony, klasa I lub II

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy.

Uczeń:

9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje wzór na logarytm potęgi, przekształcając wyrażenia zapisane za pomocą logarytmów
- rozwija umiejętności zamiany sumy (różnicy) logarytmów na logarytm jednomianu
- przekształca wyrażenia arytmetyczne zawierające logarytmy
- zapisuje w prostszej postaci wyrażenia algebraiczne, korzystając z poznanych wzorów logarytmicznych
- udowadnia twierdzenia wymagające prowadzenia prostych rozumowań matematycznych
- dobiera odpowiednią strategię, rozwiązując nietypowe problemy matematyczne zawierające logarytmy

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona lekcja
- graffiti matematyczne
- sznurkowa pajęczynka

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kartony, mazaki
- kłębek sznurka

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie w domu zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj" i w sekcji „Animacja". Ich zadaniem jest też przeprowadzenie dowodu twierdzenia o odwrotności logarytmu, innym sposobem niż podany w sekcji „Przeczytaj".
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie dzielą się na małe grupy i wymieniają się informacjami pozyskanymi w domu. Metodą graffiti matematycznego sporządzają schematy zawierające wzory przydatne w obliczeniach logarytmicznych. Ustalają też wspólny, nietypowy sposób udowodnienia twierdzenia o odwrotności logarytmu, który następnie prezentują na forum klasy.
2. Teraz każda grupa układa 3 zadania oparte na uzyskanych w domu wiadomościach – pierwsze polegające na sprowadzeniu do najprostszej postaci wyrażenia zawierającego logarytmy, drugie wymagające rozwiązania prostej nierówności logarytmicznej, trzecie prowadzące do na rozwiązaniu układu równań zawierającego logarytmy.
3. Ułożone przez grupy zadania uczniowie rozwiązują wspólnie na tablicy.

Faza podsumowująca:

1. Liderzy grup dzielą się informacjami na temat pracy swojej grupy, prezentują pomysły, przedstawiają wątpliwości.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.
3. Uczniowie metodą sznurkowej pajęczynki wybierają ucznia, który wniósł największy wkład w pracę grupy i całego zespół klasowego (uczniowie rzucają kłębkiem sznurka wzajemnie do siebie – wygrywa uczeń, który zbierze najwięcej „końców” sznurka).

Praca domowa:

Uczniowie wykonują w domu zadania z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

Działania na logarytmach – Przykłady

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać jako wstęp do zajęć utrwalających wiadomości na temat logarytmów.