Rozkład wielomianu na czynniki z użyciem wzorów skróconego mnożenia

Rozkład wielomianu na czynniki z użyciem wzorów skróconego mnożenia

Źródło: Markus Spiske, dostępny w internecie: unplash.com, domena publiczna.

Wiemy, że każdy wielomian stopnia dodatniego można zapisać w postaci iloczynu wielomianów pierwszego stopnia i nierozkładalnych wielomianów drugiego stopnia. Taki zapis jest bardzo przydatny w przypadku rozwiązywania równań wielomianowych, czyli równań postaci $W(x) = 0$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem.

W niektórych przypadkach w rozkładzie wielomianu na czynniki pomóc może zastosowanie wzorów skróconego mnożenia. Nie zawsze możliwość zastosowania wzorów jest od razu widoczna, czasem trzeba wielomian nieco przekształcić, pogrupować, dodać i odjąć jakiś składnik.

Wzory skróconego mnożenia pozwalają zwykle na szybką zamianę wyrażenia algebraicznego zapisanego w postaci iloczynu na wyrażenie zapisane w postaci sumy albo na odwrót - przy rozkładaniu na czynniki wykorzystamy tę drugą opcję.

Twoje cele

- Sprowadzisz wielomiany do postaci iloczynowej wykorzystując wzory skróconego mnożenia.

Przeczytaj

Przypomnijmy na początek wzory skróconego mnożenia, które mogą być przydatne przy rozkładaniu wielomianów na czynniki.

Wszystkie wzory zapiszemy tak, że po lewej stronie będzie suma (różnica), a po prawej iloczyn (potęga).

- $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2$
- $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$
- $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$
- $a^3 + b^3 = (a + b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$
- $a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$
- dla n nieparzystych
  $a^n + b^n = (a + b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$

Jeżeli znasz symbol Newtona lub trójkąt Pascala, możesz też uogólnić wzór na kwadrat lub sześcian sumy do postaci zwanej dwumianem Newtona:

- $\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = (a+b)^n$

Przykład 1

Pokażmy po jednym przykładzie zastosowań do rozkładania wielomianu na czynniki dla każdego z powyższych wzorów:

- $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$
- $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$
- $x^2 - 15 = \left(x - \sqrt{15}\right)\left(x + \sqrt{15}\right)$
- $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 =$
  $= x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 + 2x^2 + 2x =$
  $= \left(x^2 + x + 1\right)^2$
- $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$
- $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3$
- $x^3 + 2 = \left(x + \sqrt[3]{2}\right)\left(x^2 - \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}\right)$
- $8x^3 - 27 = (2x-3)\left(4x^2 + 6x + 9\right)$
- $x^{26} - 1 = (x-1)\left(x^{25} + x^{24} + x^{23} + \ldots + x + 1\right)$
- $x^{25} + 1 = (x+1)\left(x^{24} - x^{23} + x^{22} - \ldots - x + 1\right)$

W dwóch ostatnich przypadkach jeden z uzyskanych czynników jest wielomianem stopnia większego niż 2, czyli nie jest wielomianem nierozkładalnym.

- $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = (x+1)^4$

Przykład 2

Sprowadź do postaci iloczynowej wielomian $W(x) = x^6 - 64$.

- $W(x) = x^6 - 2^6$.

- Możemy teraz użyć wzoru skróconego mnożenia na różnicę sześcianów lub na różnicę kwadratów. Warto zawsze wybrać optymalną w danej sytuacji metodę.
  Zaprezentujemy tu obie metody.

- Obie metody prowadzą oczywiście do tego samego rozwiązania
  $W(x) = (x+2)(x-2)\left(x^2 - 2x + 4\right)\left(x^2 + 2x + 4\right)$.
  Warto zawsze wybrać tę, która jest dla nas prostsza i szybsza (wydaje się, że w powyższym przykładzie rozumowanie było trochę łatwiejsze przy użyciu na początek wzoru na różnicę kwadratów).

Przykład 3

Sprowadź do postaci iloczynowej wielomian
$W(x) = 27x^5 - 54x^4 + 36x^3 - 8x^2$.

- Wyłączmy wspólny czynnik przed nawias:
  $W(x) = x^2\left(27x^3 - 54x^2 + 36x - 8\right)$.

- Zauważmy, że w nawiasie możemy użyć wzoru skróconego mnożenia na sześcian różnicy:
  $W(x) = x^2(3x-2)^3$.

Przykład 4

Sprowadź do postaci iloczynu wielomian
$W(x) = x^4 - x^2 + 2x + 2$.

- Pogrupujmy odpowiednio wyrazy wielomianu dążąc do użycia wzorów skróconego mnożenia:

$$W(x) = \left(x^4 - 2x^2 + 1\right) + \left(x^2 + 2x + 1\right)$$
$$W(x) = \left(x^2 - 1\right)^2 + (x + 1)^2$$
$$W(x) = (x - 1)^2(x + 1)^2 + (x + 1)^2$$

- Wyłączmy wspólny czynnik przed nawias:
  $W(x) = (x + 1)^2\left((x - 1)^2 + 1\right)$
  $W(x) = (x + 1)^2\left(x^2 - 2x + 2\right)$
  (uzyskane czynniki są nierozkładalne)

Przypomnijmy, że zgodnie z zasadniczym twierdzeniem teorii wielomianów każdy wielomian stopnia większego od 2 można zapisać w postaci iloczynu wielomianów pierwszego stopnia i nierozkładalnych wielomianów drugiego stopnia. W ostatnim przykładzie pokażemy rozkłady kilku wielomianów stopnia 4, które nie mają pierwiastków rzeczywistych, czyli na mocy twierdzenia Bézouta w ich rozkładzie nie występują wielomiany pierwszego stopnia.

Przykład 5

Zapisz podany wielomian w postaci iloczynu wielomianów nierozkładalnych zmiennej rzeczywistej:

Słownik

twierdzenie Bézouta

liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ dzieli się przez dwumian $x - a$ bez reszty

zasadnicze twierdzenie teorii wielomianów

- jedyne wielomiany nierozkładalne stopnia dodatniego o współczynnikach rzeczywistych to wszystkie wielomiany pierwszego stopnia oraz wielomiany drugiego stopnia z ujemnym wyróżnikiem Δ
- każdy wielomian stopnia większego od 2 można zapisać w postaci iloczynu wielomianów nierozkładalnych i niezerowej stałej

- zapis w postaci iloczynu jest jednoznaczny z dokładnością do przemnożenia czynników przez stałą niezerową

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Rozwiąż zadania, wskazując rozkład podanego wielomianu na czynniki.

Odczytaj hasło - imię hinduskiego matematyka i astronoma pracującego w VII wieku w Indiach.

Polecenie 2

Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia, rozłóż na czynniki nierozkładalne wielomian
$W(x) = x^5 + 25x^3 - 8x^2 - 200.$

Polecenie 3

Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia, rozłóż na czynniki nierozkładalne wielomian
$W(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Michał Niedźwiedź

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozkład wielomianu na czynniki z użyciem wzorów skróconego mnożenia

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

Zakres podstawowy. Uczeń:

4) rozkłada wielomiany na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias oraz metodą grupowania wyrazów, w przypadkach nie trudniejszych niż rozkład wielomianu $W(x) = 2x^3 - \sqrt{3}x^2 + 4x - 2\sqrt{3}$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje wzory skróconego mnożenia.
- sprowadza wielomiany do postaci iloczynowej z pomocą wzorów skróconego mnożenia.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- mapa myśli;

- metoda tekstu przewodniego;
- gra dydaktyczna.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- telefony z dostępem do internetu.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia temat oraz cele lekcji, a następnie wspólnie z uczniami określa kryteria sukcesu.
2. Uczniowie tworzą mapę myśli zawierającą znane im już wzory skróconego mnożenia.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie metodą tekstu przewodniego analizują treści z sekcji „Przeczytaj”. Po zapoznaniu się z każdym z przykładów zgłaszają pytania i napotkane ewentualne problemy, które omawiane są na forum klasy.
2. Nauczyciel dzieli klasę na 4 grupy. Uczniowie metoda pucharową grają w grę edukacyjną, najpierw wyłaniają zwycięzcę w każdej z grup. Dalsza rozgrywka przeprowadzana jest wśród zwycięzców grup. Uczeń, który zdobywa puchar otrzymuje nagrodę w postaci oceny.
3. Następnie uczniowie indywidualnie rozwiązują ćwiczenia 6-8 w sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel omawia ewentualne problemy z rozwiązaniem ćwiczeń w sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 1-5 w sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Wzór skróconego mnożenia na n-tą potęgę sumy
- Wzór skróconego mnożenia na n-tą potęgę różnicy

Wskazówki metodyczne:

Gra edukacyjna może posłużyć jako materiał służący powtórzeniu przed testem.