



Intrygujący wzór na różnicę kwadratów

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



W tym materiale pokażemy, jak arytmetyka przenika algebrę i algebra arytmetykę. Z historii matematyki wiemy, że to rozważania arytmetyczne w pewien sposób wymusiły stworzenie aparatu algebraicznego, aby zapisywać w sposób ogólny odkryte zależności.

Z pozoru banalne igraszki liczbowe skłoniły uczonych do stworzenia wielu twierdzeń pokazujących własności liczb naturalnych, których dowody oparte są na wzorze skróconego mnożenia na różnicą kwadratów.

Właśnie zastosowanie tego wzoru będzie treścią tego materiału. Zaprezentujemy ciekawostki, których znajomości nie jest oczywiście obowiązkowa, ale daje okazję do rozwijania umiejętności rachunkowych i przekształcania wyrażeń algebraicznych.

Twoje cele

- Zastosujesz wzór skróconego mnożenia na różnicą kwadratów w obliczeniach arytmetycznych i algebraicznych.
- Sprowadzisz do najprostszej postaci wyrażenia algebraiczne.
- Przedstawisz liczby naturalne w postaci różnicy kwadratów.

Przeczytaj

W tym materiale pokażemy kilka ciekawych zastosowań wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów. Na początek więc przypomnienie tego wzoru.

Wzór na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Różnica kwadratów dwóch dowolnych wyrażeń jest równa iloczynowi sumy tych wyrażeń przez ich różnicę.

Na przestrzeni wieków wielu matematyków pasjonowało się sposobami przedstawiania liczb naturalnych w postaci różnicy kwadratów. W rozważaniach wykorzystywali zależności arytmetyczne – my wykorzystamy [wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń](#).

Przykład 1

Wykażemy, że każdą liczbę nieparzystą większą od 1, można przedstawić w postaci różnicy kwadratów dwóch liczb naturalnych.

Niech k będzie liczbą nieparzystą większą od 1.

Wtedy liczbę tę można zapisać w postaci

$k = 2n + 1$, gdzie n jest pewną liczbą naturalną dodatnią.

Przekształcamy zapisane wyrażenie, dodając i odejmując n^2 .

$$k = 2n + 1 + n^2 - n^2$$

Wyrażenie $2n + 1 + n^2$ to kwadrat sumy liczb n i 1. Zatem

$$k = (n + 1)^2 - n^2$$

Wynika stąd, że liczbę k można przedstawić w postaci różnicy kwadratów liczb $n + 1$ i n , co należało wykazać.

Korzystając ze wzoru podanego w Przykładzie 1 można zapisać ciekawy wniosek.

Wniosek:

Suma dwóch kolejnych liczb naturalnych dodatnich jest równa różnicy kwadratów tych liczb.

Istotnie,

$$n + n + 1 = 2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2,$$

gdzie:

$n, n + 1$ – to kolejne liczby naturalne dodatnie.

Korzystając z wniosku, zapiszemy ciekawe równości.

$$3 = 1 + 2 = 2^2 - 1^2$$

$$5 = 2 + 3 = 3^2 - 2^2$$

$$7 = 3 + 4 = 4^2 - 3^2$$

$$9 = 4 + 5 = 5^2 - 4^2$$

Wiemy już, że każdą liczbę nieparzystą większą od 1 można zapisać w postaci różnicy kwadratów dwóch liczb. Ale jak znaleźć te liczby?

Ważne!

Niech k będzie liczbą naturalną nieparzystą większą od 1. Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów, można tę liczbę zapisać w postaci

$$k = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{2}\right)^2.$$

Wzór ten pozwala szybko znaleźć liczby, które pomogą nam w rozkładzie danych liczb na różnicę kwadratów.

Przykład 2

Zapiszemy w postaci różnicy kwadratów dwóch liczb liczby: 19, 31, 115.

Korzystamy z podanego wzoru.

$$19 = \left(\frac{19+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{19-1}{2}\right)^2 = 10^2 - 9^2$$

$$31 = \left(\frac{31+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{31-1}{2}\right)^2 = 16^2 - 15^2$$

$$115 = \left(\frac{115+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{115-1}{2}\right)^2 = 58^2 - 57^2$$

Pokażemy teraz, że istnieją liczby parzyste złożone, które również można zapisać za pomocą różnicy kwadratów.

Przykład 3

Wykażemy, że jeśli n jest liczbą naturalną dodatnią, to

$$(n+1)^2 - (n-1)^2 = 4n$$

$$(n+2)^2 - (n-2)^2 = 8n$$

$$(n+3)^2 - (n-3)^2 = 12n$$

- Wykażemy najpierw prawdziwość równości $(n+1)^2 - (n-1)^2 = 4n$.

Przekształcamy lewą stronę równości, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń.

$$L = (n+1)^2 - (n-1)^2$$

$$L = (n+1-n+1)(n+1+n-1)$$

$$L = 2 \cdot 2n = 4n = P$$

- W podobny sposób wykażemy, że $(n+2)^2 - (n-2)^2 = 8n$.

$$L = (n+2)^2 - (n-2)^2$$

$$L = (n+2-n+2)(n+2+n-2)$$

$$L = 4 \cdot 2n = 8n = P$$

- Udowodnimy ostatnią równość: $(n+3)^2 - (n-3)^2 = 12n$.

$$L = (n+3)^2 - (n-3)^2$$

$$L = (n+3-n+3)(n+3+n-3)$$

$$L = 6 \cdot 2n = 12n = P$$

Podobne równości jak w Przykładzie 3, można zapisywać dla kolejnych liczb naturalnych.

Wniosek:

Każdą liczbę naturalną podzielną przez 4 można zapisać w postaci różnicy kwadratów dwóch liczb naturalnych.

Korzystając z wniosku, możemy zapisać na przykład:

$$40 = 4 \cdot 10 = 11^2 - 9^2$$

$$400 = 4 \cdot 100 = 101^2 - 99^2$$

$$80 = 8 \cdot 10 = 12^2 - 8^2$$

$$1200 = 12 \cdot 100 = 103^2 - 97^2$$

Wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów jest często przydatny przy badaniu podzielności liczb naturalnych.

Przykład 4

Niech A będzie liczbą naturalną większą od 8 taką, że

$$A = (n + k)^4 - (n - k)^4,$$

gdzie n, k to pewne liczby naturalne dodatnie. Wykażemy, że liczba A jest podzielna przez 8.

Przekształcimy wyrażenie, za pomocą którego zapisana jest liczba A , korzystając dwukrotnie ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

$$A = (n + k)^4 - (n - k)^4$$

$$A = \left[(n + k)^2 - (n - k)^2 \right] \cdot \left[(n + k)^2 + (n - k)^2 \right]$$

$$A = [(n + k - n + k)(n + k + n - k)] \cdot (n^2 + 2nk + k^2 + n^2 - 2nk + k^2)$$

$$A = 2k \cdot 2n \cdot (2n^2 + 2k^2)$$

$$A = 8kn(n^2 + k^2)$$

Liczbę A przedstawiliśmy w postaci iloczynu liczby 8 i liczby naturalnej $t = kn(n^2 + k^2)$, co oznacza, że liczba A jest podzielna przez 8.

Przykład 5

Wykażemy, że liczba $K = 17^8 - 1$ jest liczbą złożoną i ma co najmniej 4 dzielniki właściwe.

Zapisujemy liczbę K w postaci iloczynu, korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów.

$$K = 17^8 - 1$$

$$K = (17^4)^2 - 1 = (17^4 - 1)(17^4 + 1)$$

$$K = (17^2 - 1)(17^2 + 1)(17^4 + 1)$$

$$K = (17 - 1)(17 + 1)(17^2 + 1)(17^4 + 1)$$

$$K = 16 \cdot 18 \cdot (17^2 + 1)(17^4 + 1)$$

Liczbę K zapisaliśmy za pomocą iloczynu czterech liczb naturalnych dodatnich, większych od 1, zatem jest to liczba złożona.

Dzielniki właściwe tej liczby to na przykład 16, 18, $17^2 + 1$, $17^4 + 1$.

Zatem liczba K to liczba złożona, która ma co najmniej cztery dzielniki właściwe, co należało wykazać.

Słownik

wzór na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

różnica kwadratów dwóch dowolnych wyrażeń jest równa iloczynowi sumy tych wyrażeń przez ich różnicę

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami przekształcania wyrażeń algebraicznych przedstawionymi w animacji. Spróbuj najpierw rozwiązać samodzielnie pokazane tam przykłady, a następnie porównaj z rozwiązaniami.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DfkKrLxcq>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

Polecenie 2

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a , b , c prawdziwa jest równość

$$(a + b + c)^2 - 4ab = (a - b + c)^2 + 4bc.$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Niech k będzie liczbą naturalną dodatnią, większą od 1. Jako różnicy kwadratów dwóch liczb naturalnych **nie można** zapisać liczby:

☐ $B = 4k + 2$

☐ $C = 2k - 1$

☐ $D = 4k$

☐ $A = 2k + 1$

Ćwiczenie 2



Zaznacz poprawną odpowiedź. Każdą liczbę pierwszą nieparzystą można zapisać w postaci różnicy kwadratów dwóch liczb naturalnych

☐ tylko na jeden sposób.

☐ tylko na dwa sposoby.

☐ na nieskończenie wiele sposobów.

☐ na co najmniej trzy sposoby.

Ćwiczenie 3



Zaznacz, który wzór jest prawdziwy, a który fałszywy.

Wzór	Prawda	Fałsz
$(x + 4)^2 - 16x = (x - 4)^2$	☐	☐
$(x + 5)^2 - (x - 5)^2 = -20x$	☐	☐
$-(x + 6)^2 + (x - 6)^2 = 24x$	☐	☐
$28x + (x - 7)^2 = (x + 7)^2$	☐	☐

Ćwiczenie 4



Uzupełnij równość, wpisując odpowiednie znaki: "+" lub "-".

$$x^{32} - y^{32} = (x \boxed{} y)(x + y)(x^2 \boxed{} y^2)(x^4 + y^4)(x^8 \boxed{} y^8)(x^{16} \boxed{} y^{16})$$

Ćwiczenie 5



Uzupełnij rozwiązanie równania, przeciągając odpowiednie wyrażenia.

$$(6 - 2x) \cdot (3 + x) - 6 \cdot (x^2 - 9) = 0$$

$$2 \cdot (\boxed{}) \cdot (3 + x) - 6 \cdot (x - 3) \cdot (\boxed{}) = 0$$

$$2 \cdot (3 - x) \cdot (3 + x) + 6 \cdot (\boxed{}) \cdot (x + 3) = 0$$

$$8 \cdot (3 - x) \cdot (\boxed{}) = 0$$

$$3 - x = 0 \text{ lub } 3 + x = 0$$

$$x = 3 \text{ lub } x = \boxed{}$$

-3

$x - 3$

$3 - x$

$x - 3$

$3 + x$

$3 - x$

$3 + x$

$x + 3$

$x + 3$

9

Ćwiczenie 6



Połącz w pary liczbę i jej rozkład na różnicę kwadratów.

96

$$30^2 - 29^2$$

153

$$10^2 - 2^2$$

15

$$17^2 - 13^2$$

88

$$8^2 - 7^2$$

120

$$77^2 - 76^2$$

121

$$13^2 - 9^2$$

59

$$61^2 - 60^2$$

Ćwiczenie 7



Liczy parzyste podzielne przez 4, można na ogół przedstawiać w postaci różnicy kwadratów na kilka sposobów, korzystając z ich rozkładu na czynniki.

Na przykład:

$$24 = 2 \cdot 12 = \left(\frac{12+2}{2}\right)^2 - \left(\frac{12-2}{2}\right)^2 = 7^2 - 5^2$$

$$24 = 4 \cdot 6 = \left(\frac{6+4}{2}\right)^2 - \left(\frac{6-4}{2}\right)^2 = 5^2 - 1^2$$

Korzystając z podanego przykładu, zapisz liczbę 48 trzema sposobami w postaci różnicy kwadratów dwóch liczb naturalnych dodatnich.

Ćwiczenie 8



Wykaż, że równanie $x^{16} - 16^4 = 0$ ma tylko dwa rozwiązania rzeczywiste.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Intrygujący wzór na różnicę kwadratów

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy.

Uczeń:

- 1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$, $(a + b)^3$, $(a - b)^3$, $a^3 - b^3$, $a^n - b^n$;
- 2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;
- 3) wyłącza poza nawias jednomian z sumy algebraicznej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów w obliczeniach arytmetycznych i algebraicznych
- sprowadza do najprostszej postaci wyrażenia algebraiczne
- przedstawia liczby naturalne w postaci różnicy kwadratów
- wykorzystuje zintegrowaną wiedzę do rozwiązywania problemów arytmetycznych

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- karta kołowa
- drzewo ewaluacji

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie powtarzają sposób równoważnego przekształcania wyrażeń algebraicznych i dotychczasowe wiadomości na temat wzorów skróconego mnożenia – zapoznają się z filmem samouczkiem.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach pracują metodą karty kołowej.
2. Nauczyciel przedstawia problem – w rozwiązywaniu jakich zagadnień arytmetycznych i algebraicznych można wykorzystać wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.
3. Grupy zapoznają się z materiałem z sekcji Przeczytaj i na jego podstawie wypełniają „kartę kołową”, na której notują w poszczególnych okienkach pomysły na zastosowanie wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów. Przy czym jedno okienko powinno być wypełnione oryginalnym pomysłem danej grupy.
4. Nauczyciel prosi, aby grupy zaprezentowały swoje karty. Dyskusja – która karta jest najciekawsza i który pomysł najbardziej będzie przydatny w dalszej nauce.
5. Podsumowaniem tej części zajęć będzie wykonanie polecenia zamieszczonego pod filmem i wspólne wykonanie ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
Liderzy grup dzielą się spostrzeżeniami na temat ciekawych pomysłów, jakie pojawiły się w czasie prac grup.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wykonanie ćwiczeń 1 – 6 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów](#)

Wskazówki metodyczne:

Animacja może być wykorzystana w czasie zajęć wprowadzających wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.