



Pole powierzchni graniastopła prawidłowego sześciokątnego

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja 3D](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

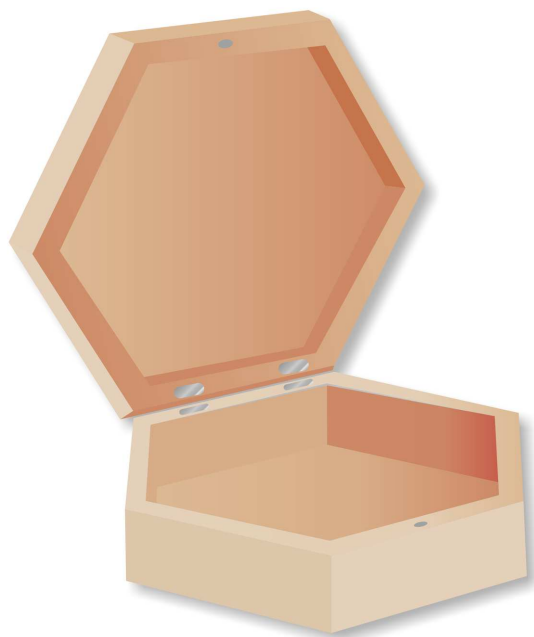


Pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego

Źródło: Joshua Hoehne, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Malując farbą powierzchnie ścian, mebli, drewnianych przedmiotów powinniśmy najpierw oszacować ile farby zużyjemy zgodnie z zadeklarowaną wydajnością.

Wyobraź sobie drewnianą szkatułkę w kształcie graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego.



Szacując, ile farby potrzebujemy, aby pomalować ją z zewnątrz musimy obliczyć pole powierzchni.

Twoje cele

- Obliczysz pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego.
- Obliczysz długości boków, miary kątów, objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego mając jego pole powierzchni.

Przeczytaj

Pole powierzchni graniastosłupa policzymy ze wzoru

$$P_c = 2P_p + P_b$$

Dla graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy a i wysokości H podstawą jest sześciokąt foremny o boku długości a , a ściany boczne są prostokątami o wymiarach $a \times H$, tak więc pole powierzchni wynosi $P_c = 2 \cdot 6 \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6aH$, co daje nam wzór:

$$P_c = 3a^2\sqrt{3} + 6aH$$

Przykład 1

Ściana boczna graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego jest kwadratem o polu 8. Oblicz pole powierzchni tego graniastosłupa.

Jest to graniastosłup, którego wszystkie krawędzie są tej samej długości.

Oznaczmy krawędź graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego przez a .

Mamy wtedy $a^2 = 8$, a stąd $a = 2\sqrt{2}$.

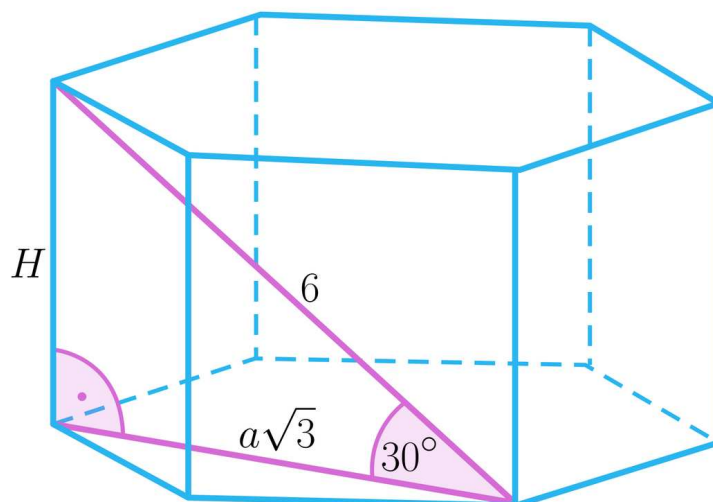
Korzystając ze wzoru na pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego mamy

$$P_c = 3 \cdot (2\sqrt{2})^2 \sqrt{3} + 6 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 24\sqrt{3} + 48 = 24(\sqrt{3} + 2).$$

Przykład 2

Krótsza **przekątna graniastosłupa** prawidłowego sześciokątnego ma długość 6 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30° . Oblicz pole powierzchni tego graniastosłupa.

Zróbmy rysunek pomocniczy.



Mamy $\sin 30^\circ = \frac{H}{6}$, a stąd $\frac{1}{2} = \frac{H}{6}$ i ostatecznie $H = 3$.

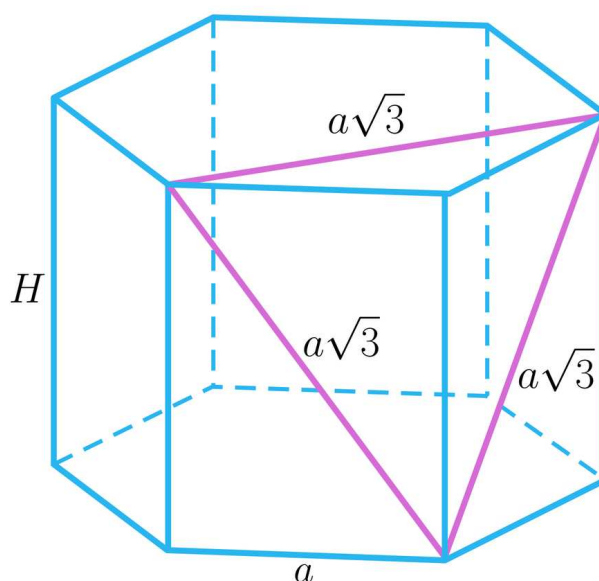
Podobnie $\cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ i stąd $a = 3$.

A zatem $P_c = 3 \cdot 9\sqrt{3} + 6 \cdot 9 = 27\sqrt{3} + 54 = 27(\sqrt{3} + 2)$.

Przykład 3

Przekątne ścian bocznych wychodzące ze wspólnego wierzchołka graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego wraz z łączącą je przekątną podstawy tworzą trójkąt równoboczny o polu $9\sqrt{3}$. Oblicz pole powierzchni tego graniastosłupa.

Oznaczmy przez a krawędź podstawy graniastosłupa. Wówczas długość przekątnej ściany bocznej jest równa długości krótszej przekątnej podstawy $a\sqrt{3}$.



Czyli $\frac{(a\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$. Czyli $3a^2 = 36$, a stąd $a = 2\sqrt{3}$. Mamy stąd przekątną ściany bocznej równą 6.

Obliczamy wysokość graniastosłupa z twierdzenia Pitagorasa:

$$H^2 + (2\sqrt{3})^2 = 6^2. \text{ Czyli } H^2 = 36 - 12 = 24 \text{ i ostatecznie } H = 2\sqrt{6}.$$

Możemy teraz obliczyć pole powierzchni graniastosłupa

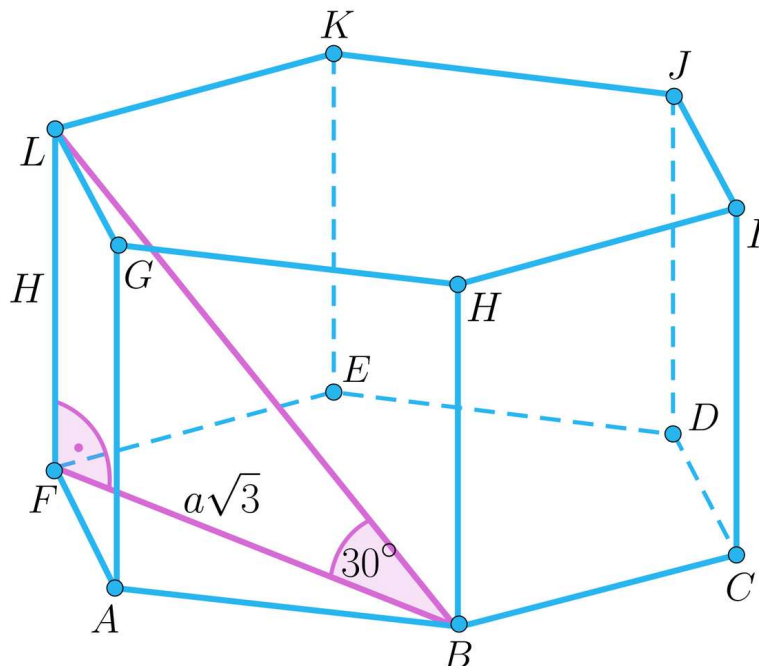
$$\begin{aligned} P_c &= 2 \cdot 6 \cdot \frac{(2\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6} = 36\sqrt{3} + 24\sqrt{18} = \\ &= 36\sqrt{3} + 72\sqrt{2} = 36(\sqrt{3} + 2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Mając **pole powierzchni graniastosłupa** prawidłowego sześciokątnego możemy policzyć długości odcinków, miary kątów i objętość tego graniastosłupa.

Przykład 4

Pole powierzchni bocznej graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego wynosi 216, a kąt nachylenia krótszej przekątnej graniastosłupa do podstawy wynosi 30° . Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Zrobimy rysunek pomocniczy:



Z trójkąta BFL mamy $\text{tg } 30^\circ = \frac{H}{a\sqrt{3}}$, czyli $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{H}{a\sqrt{3}}$. Ostatecznie $a = H$.

A zatem korzystając z pola powierzchni bocznej $6a^2 = 216$ i stąd $a = H = 6$.

Obliczymy objętość tego graniastosłupa $V = 6 \cdot \frac{36\sqrt{3}}{4} \cdot 6 = 324\sqrt{3}$.

Przykład 5

Pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego wynosi $60\sqrt{3}$ a krawędź jego podstawy ma długość $2\sqrt{3}$. Oblicz miarę kąta nachylenia dłuższej przekątnej graniastosłupa do podstawy.

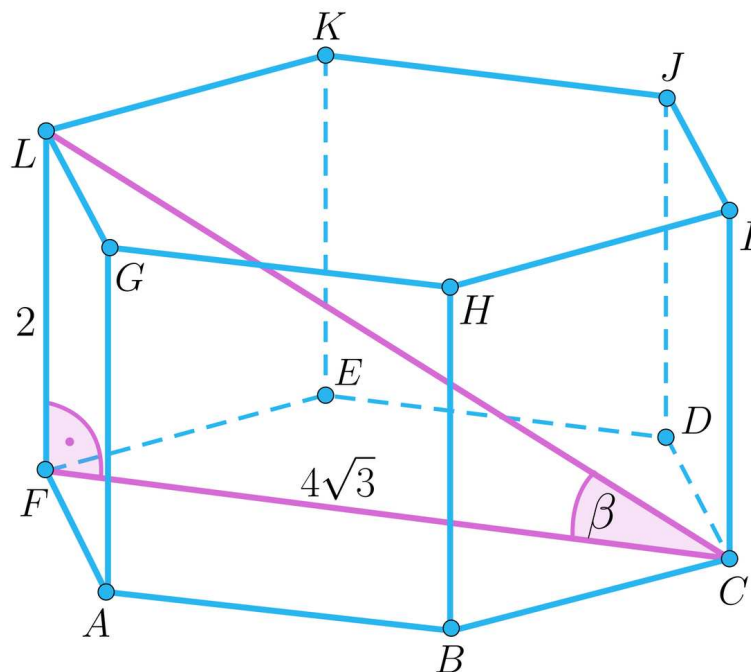
Obliczymy długość wysokości tego graniastosłupa:

$$60\sqrt{3} = 2 \cdot 6 \cdot \frac{(2\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} + 6 \cdot 2\sqrt{3}H$$

A stąd $60\sqrt{3} = 36\sqrt{3} + 12\sqrt{3}H$, czyli $24\sqrt{3} = 12\sqrt{3}H$. Ostatecznie $H = 2$.

Zróbmy rysunek pomocniczy. Uwzględnimy na nim, że dłuższa przekątna podstawy ma długość $2a = 4\sqrt{3}$.

Szukany kąt został oznaczony przez β .



Mamy $\text{tg } \beta = \frac{2}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0,2887$. Czyli $\beta \approx 16^\circ$.

Przykład 6

Pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego wynosi $72 + 48\sqrt{3}$, a suma długości wszystkich krawędzi 66. Oblicz długości krawędzi tego graniastosłupa, wiedząc, że wyrażają się liczbami wymiernymi.

Ułożymy układ równań o niewiadomych a , H , gdzie a jest krawędzią podstawy, a H wysokością graniastosłupa.

$$\begin{cases} 3\sqrt{3}a^2 + 6aH = 72 + 48\sqrt{3} \\ 12a + 6H = 66 \mid : 6 \end{cases}$$

Z drugiego równania wyznaczmy H :

$H = 11 - 2a$ i wstawmy do pierwszego równania:

$$3\sqrt{3}a^2 + 6a(11 - 2a) = 72 + 48\sqrt{3}.$$

Dzieląc równanie stronami przez 3 i porządkując mamy:

$$(\sqrt{3} - 4)a^2 + 22a - 24 - 16\sqrt{3} = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 484 - 4(\sqrt{3} - 4)(-24 - 16\sqrt{3}) = 484 + 32(\sqrt{3} - 4)(3 + 2\sqrt{3}) = \\ &= 484 + 32(-6 - 5\sqrt{3}) = 292 - 160\sqrt{3} = (8\sqrt{3} - 10)^2 \end{aligned}$$

Czyli

$$a_1 = \frac{-22 - (8\sqrt{3} - 10)}{2\sqrt{3} - 8} = \frac{-12 - 8\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 8} = \frac{6 + 4\sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}} = \frac{24 + 6\sqrt{3} + 16\sqrt{3} + 12}{13} = \frac{36 + 22\sqrt{3}}{13} \notin \mathbb{Q}$$

$$a_2 = \frac{-32 + 8\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 8} = 4$$

A zatem $a = 4$ i $H = 11 - 8 = 3$.

Słownik

pole powierzchni graniastosłupa

suma pól podstaw i wszystkich ścian bocznych graniastosłupa

przekątna graniastosłupa

odcinek łączący wierzchołki dwóch równoległych podstaw graniastosłupa nie leżący na jego ścianie bocznej

Animacja 3D

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami przedstawionymi w animacja 3D, a następnie rozwiąż Polecenie 2 i 3.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DIpmwrDW>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej pola powierzchni graniastopuła.

Polecenie 2

Oblicz pole powierzchni graniastopuła prawidłowego sześciokątnego, którego krawędź podstawy ma długość $\sqrt{3}$, a przekątna ściany bocznej $\sqrt{7}$. Co możemy powiedzieć o polach powierzchni całkowitej i bocznej tego graniastopuła i graniastopuła z zadania 1 z animacji 3D?

Polecenie 3

Jaki jest stosunek długości krawędzi podstawy do wysokości graniastopuła prawidłowego sześciokątnego, którego pole podstawy jest równe polu powierzchni bocznej?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

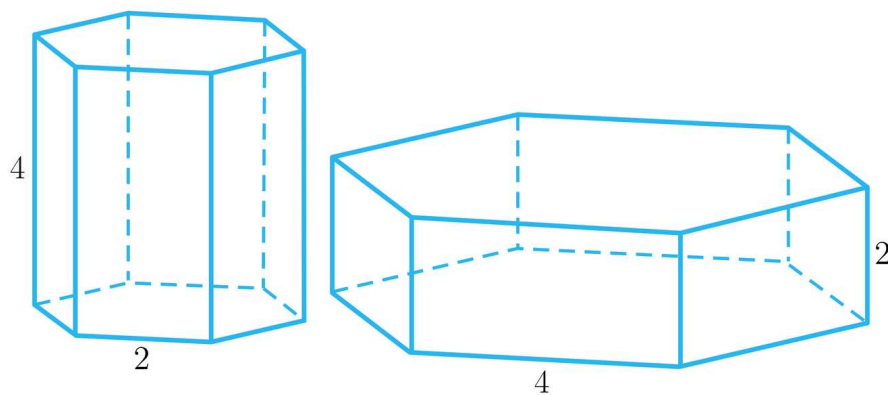
Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Dane są graniastosłupy prawidłowe sześciokątne takie, jak na rysunku.



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego wszystkie krawędzie są tej samej długości wynosi $75\sqrt{3} + 150$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Ćwiczenie 8



Pole podstawy graniastopuła prawidłowego sześciokątnego jest trzykrotnie mniejsze od pola powierzchni bocznej. Oblicz cosinus kąta nachylenia krótszej przekątnej tego graniastopuła do podstawy.

Dla nauczyciela

Autor: Magdalena Wojciechowska-Rysiawa

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum lub technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego
- oblicza długości boków, miary kątów, objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego mając jego pole powierzchni
- analizuje związki pomiędzy kątami i odcinkami w graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa

- mapa myśli
- dyskusja
- metoda świateł drogowych

Formy pracy:

- praca z całą klasą
- praca w parach
- praca samodzielna

Środki dydaktyczne:

- komputer z dostępem do Internetu, głośników i tablicy interaktywnej lub projektora
- przezroczyste modele graniastosłupów

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Przed lekcją nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treścią „Wprowadzenia”, „Przeczytaj” i „Animacji 3D” oraz sporządzeniu notatki w zeszycie w postaci mapy myśli.

Faza wstępna:

1. Uczniowie przy wsparciu sekcji „Wprowadzenie” formułują pytanie kluczowe i kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w parach zapoznają się wzajemnie ze sporządzonymi w domu mapami myśli. Jeżeli któryś z uczniów nie zapoznał się w domu z materiałem w tym czasie wykorzystuje dostępny sprzęt i zapoznaje się z treścią e-zasobu (szczególnie z animacją 3D).
2. Uczniowie wykonują w parach ćwiczenia z sekcji „Sprawdź się”.
3. Nauczyciel koordynuje pracę uczniów.
4. Uczniowie wraz z nauczycielem sprawdzają uzyskane odpowiedzi i rozwiązania, dyskutują nad błędami, o ile się pojawiają.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie dokonują ewaluacji swojej pracy metodą świateł drogowych, oceniają własne przygotowanie do lekcji oraz omawiają trudności, które napotkali pracując samodzielnie.

Praca domowa:

Uczniowie losują w klasie osobę, której wyślą ułożone przez siebie dwa zadania dotyczące pola powierzchni graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego. Następnie rozwiązują zadania, które sami otrzymali na drodze losowania.

Materiały pomocnicze:

[Pole powierzchni graniastosłupa](#)

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może wykorzystać animację 3D jako podsumowanie lekcji lub podczas innej lekcji o polach powierzchni graniastosłupów prawidłowych.