



Kąty między odcinkami a płaszczyznami w walcu

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Kąty między odcinkami a płaszczyznami w walcu

Źródło: [jamespoppy](#) z [Pixabay](#), domena publiczna.

Umiesz już wykreślać przekroje walca. W tym materiale dokonasz analizy zadań dotyczących kątów między odcinkami a płaszczyznami walca. Nauczysz się kreślić rysunki pomagające zaplanować strategię rozwiązania takich zadań. Przekonasz się, że zadania geometrii przestrzennej możesz rozwiązywać wykorzystując podstawowe twierdzenia geometrii płaskiej.

Twoje cele

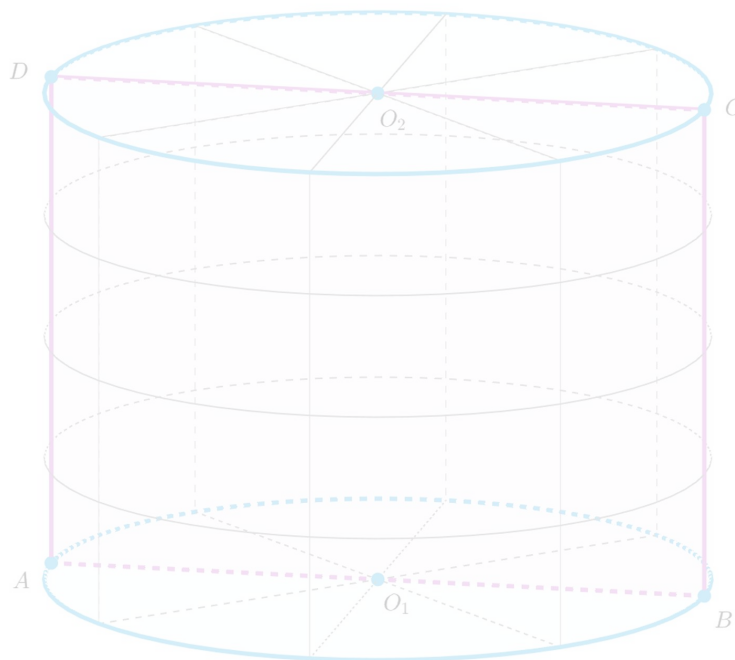
- Nauczysz się zaznaczać kąty między płaszczyznami a odcinkami w walcu.
- Wykorzystasz związki miarowe geometrii płaskiej do rozwiązywania zagadnień związanych z geometrią przestrzenną.

Przeczytaj

W tym materiale wykorzystamy definicję **kąta między prostą a płaszczyzną**. Przeanalizujemy zadania dotyczące kątów jakie możemy wykreślić w walcu pomiędzy jego płaszczyzną podstawy a odpowiednim odcinkiem.

Zapoznaj się z apletem Geogebry i zaznacz odpowiednio kąty:

- kąt nachylenia przekątnej przekroju osiowego do płaszczyzny podstawy;
- kąt pomiędzy przekątną przekroju osiowego a wysokością walca;
- kąt pomiędzy odcinkiem łączącym brzeg podstawy ze środkiem drugiej podstawy a płaszczyzną podstawy;
- kąt pomiędzy odcinkiem łączącym brzeg podstawy ze środkiem drugiej podstawy a wysokością walca.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D7x5gnQlk>

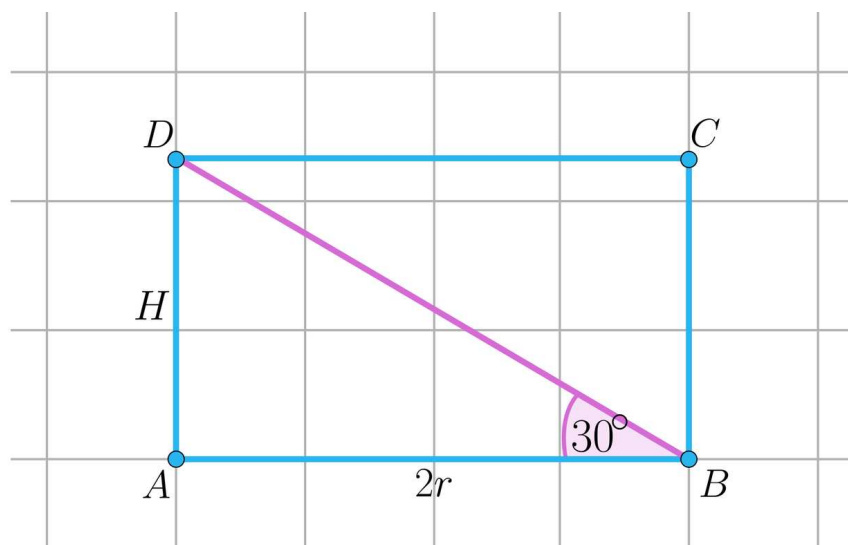
Zwróć uwagę, że do zaznaczenia poszczególnych kątów wystarczy wykreślić sam przekrój osiowy walca. Spostrzeżenie to pomoże nam zaplanować strategię rozwiązania zadań.

Przykład 1

Pole powierzchni przekroju osiowego walca wynosi $24\sqrt{3}$ cm². Kąt pomiędzy przekątną przekroju osiowego a płaszczyzną podstawy walca ma miarę 30° . Oblicz objętość walca.

Rozwiązanie

Wykreślmy **przekrój osiowy walca** i przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



$H = |DA|$ - długość wysokości walca;

$2r = |AB|$ - długość średnicy podstawy walca.

Objętość walca obliczymy ze wzoru $V_w = \pi r^2 H$.

Z warunków zadania otrzymujemy zależności $2r \cdot H = 24\sqrt{3}$ i $\frac{H}{2r} = \tan 30^\circ$.

Wyznaczając z drugiej zależności $H = 2r \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$ i podstawiając odpowiednio do pierwszej zależności, otrzymujemy $2r \cdot 2r \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 24\sqrt{3}$.

Wynika stąd, że $r = 3\sqrt{2}$ i $H = 2\sqrt{6}$. Ostatecznie objętość walca wynosi

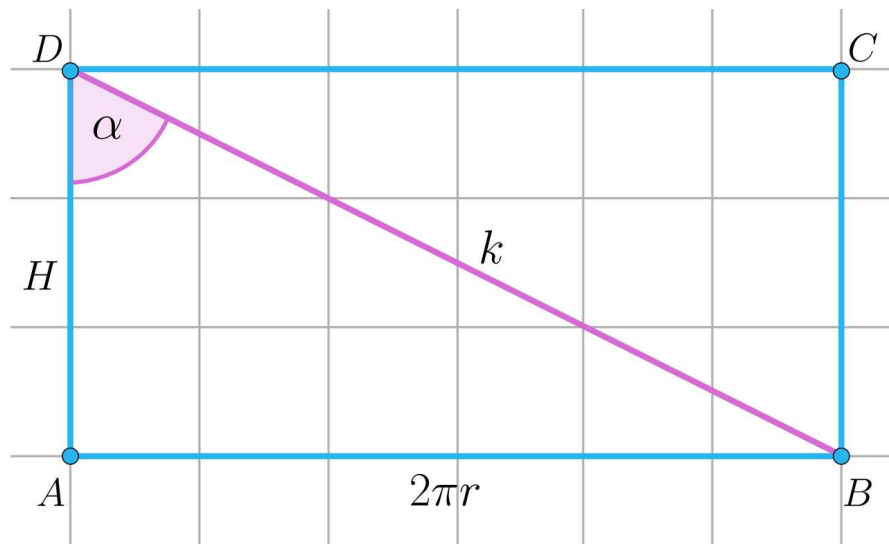
$$V_w = \pi (3\sqrt{2})^2 \cdot 2\sqrt{6} \text{ stąd } V_w = 36\sqrt{6}\pi \text{ cm}^3.$$

Przykład 2

Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu jest prostokątem o przekątnej długości k i tworzy ona z wysokością walca kąt miary α . Oblicz pole powierzchni całkowitej walca.

Rozwiązanie

Wykreślmy rysunek pomocniczy. Prostokąt $ABCD$ przedstawia powierzchnię boczną walca.



Przyjmijmy oznaczenia:

$H = |AD|$ - długość wysokości walca;

$2\pi r = |AB|$ - obwód okręgu tworzącego podstawę walca, gdzie r oznacza długość promienia podstawy walca;

$k = |DB|$ - długość przekątnej powierzchni bocznej walca po rozwinięciu;

$\alpha = |\sphericalangle ADB|$ - miara kąta pomiędzy wysokością walca a przekątną powierzchni bocznej walca.

Pole całkowite walca obliczymy ze wzoru $P = 2\pi r(r + H)$. Zauważmy, że z trójkąta ABD otrzymujemy zależności: $\frac{H}{k} = \cos \alpha$ i $\frac{2\pi r}{k} = \sin \alpha$, stąd $H = k \cos \alpha$ i $r = \frac{k \sin \alpha}{2\pi}$.

Wynika stąd, że $P = k \sin \alpha \left(\frac{k \sin \alpha}{2\pi} + k \cos \alpha \right) = k^2 \left(\frac{\sin^2 \alpha}{2\pi} + \sin \alpha \cos \alpha \right)$.

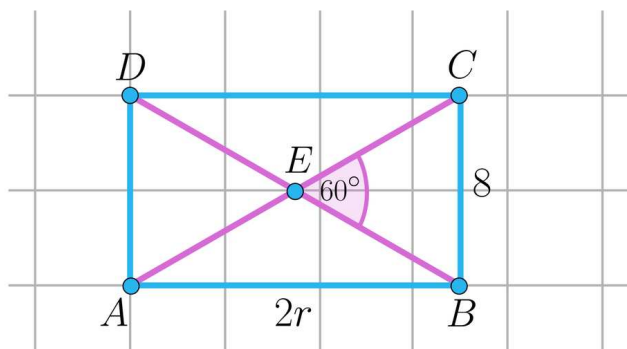
Przykład 3

Wysokość walca ma długość 8 cm. Przekątne przekroju osiowego walca przecinają się pod kątem 60° . Oblicz pole powierzchni bocznej walca. Rozważ dwa przypadki.

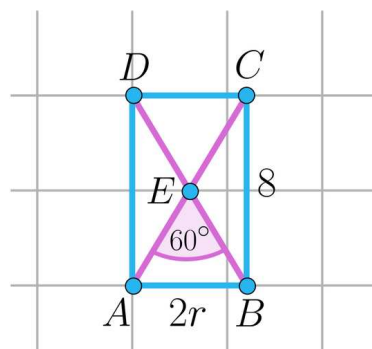
Rozwiązanie

Wykreślmy przekrój osiowy walca i przyjmijmy oznaczenia:

Przypadek 1



Przypadek 2



$H = |BC| = 8$ - długość wysokości;
 $|AB| = 2r$ - długość średnicy podstawy walca.

Pole powierzchni bocznej walca obliczymy ze wzoru $P_b = 2\pi r H$.

Przypadek 1

Zauważmy, że trójkąt BEC jest trójkątem równobocznym, zatem $|EB| = |EC| = 8$ i $|\sphericalangle AEB| = 120^\circ$. Z trójkąta AEB i twierdzenia cosinusów otrzymujemy zależność $(2r)^2 = 8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \cos 120^\circ$, dalej mamy $4r^2 = 128 - 128 \cdot (-\frac{1}{2})$, stąd $r = 4\sqrt{3}$.

Pole boczne walca w tym przypadku wynosi zatem $P_b = 2\pi \cdot 4\sqrt{3} \cdot 8 = 64\sqrt{3}\pi \text{ cm}^2$.

Przypadek 2

Zauważmy, że trójkąt AEB jest trójkątem równobocznym, zatem $|BE| = |CE| = 2r$ i $|\sphericalangle BEC| = 120^\circ$. Z trójkąta BEC i twierdzenia cosinusów otrzymujemy zależność $8^2 = (2r)^2 + (2r)^2 - 2 \cdot 2r \cdot 2r \cdot \cos 120^\circ$, dalej mamy $64 = 8r^2 - 8r^2 \cdot (-\frac{1}{2})$, stąd $r = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

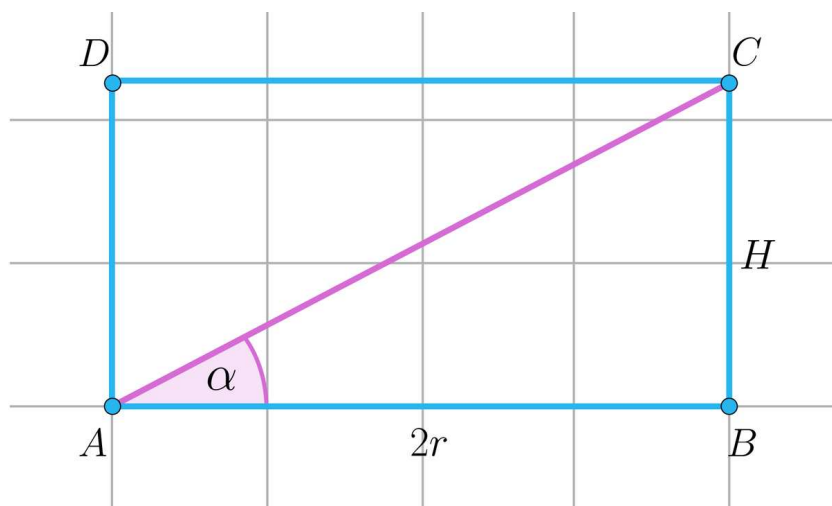
Pole boczne walca w tym przypadku wynosi zatem $P_b = 2\pi \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot 8 = \frac{64\sqrt{3}\pi}{3} \text{ cm}^2$.

Przykład 4

Pole powierzchni całkowitej walca jest równe $12\pi \text{ cm}^2$, a pole jego powierzchni bocznej wynosi $8\pi \text{ cm}^2$. Wyznacz miarę kąta pomiędzy przekątną przekroju osiowego walca a podstawą walca.

Rozwiązanie

Wykreślamy przekrój osiowy walca i przyjmujemy oznaczenia:



$H = |BC|$ - długość wysokości walca;

$2r = |AB|$ - długość średnicy podstawy walca;

$\alpha = |\sphericalangle CAB|$ - miara kąta pomiędzy przekątną przekroju osiowego walca a podstawą walca.

Z warunków zadania mamy $2\pi r(r + H) = 12\pi$ i $2\pi rH = 8\pi$. Wyznaczmy z drugiej zależności $H = \frac{4}{r}$ i podstawmy odpowiednio do równania $2\pi r(r + H) = 12\pi$. Stąd mamy $2r\left(r + \frac{4}{r}\right) = 12$.

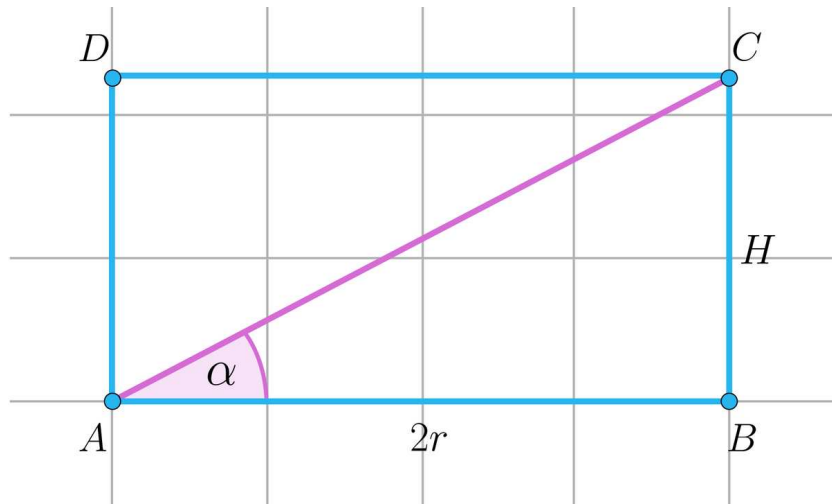
Po uporządkowaniu otrzymujemy równanie kwadratowe z niewiadomą r : $r^2 = 2$, zatem $r = \sqrt{2}$. Wynika stąd, że $H = 2\sqrt{2}$. Zauważmy, że trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym równoramiennym, zatem $\alpha = 45^\circ$.

Przykład 5

Stosunek pola powierzchni bocznej walca do pola jego powierzchni całkowitej jest równy $2 : 3$. Wyznacz tangens kąta, jaki tworzy przekątna przekroju osiowego walca z jego podstawą.

Rozwiązanie

Wykreślmy przekrój osiowy walca i przyjmijmy oznaczenia:



$H = |BC|$ - długość wysokości walca;

$2r = |AB|$ - długość średnicy podstawy walca;

$\alpha = |\sphericalangle CAB|$ - miara kąta pomiędzy przekątną przekroju osiowego walca a podstawą walca.

Z warunków zadania mamy zależność $\frac{P_b}{P} = \frac{2}{3}$, gdzie P_b oznacza pole powierzchni bocznej walca i P pole powierzchni całkowitej walca. Mamy zatem $\frac{2\pi r H}{2\pi r(r+H)} = \frac{2}{3}$. Stąd po uproszczeniu $\frac{H}{r+H} = \frac{2}{3}$. Należy wyznaczyć tangens kąta α , zatem z trójkąta ABC mamy $\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{2r}$. Zauważmy, że $\frac{r+H}{H} = \frac{3}{2}$, stąd $\frac{r}{H} + 1 = \frac{3}{2}$, stąd $\frac{r}{H} = \frac{1}{2}$, dalej mamy $\frac{2r}{H} = 1$, a stąd $\frac{H}{2r} = 1$. Ostatecznie $\operatorname{tg} \alpha = 1$.

Słownik

przekrój osiowy walca

przekrój walca płaszczyzną zawierającą oś obrotu walca; przekrój osiowy walca jest prostokątem

kąt pomiędzy prostą a płaszczyzną

kąt między prostą a jej rzutem prostopadłym na płaszczyznę

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Rozważmy odcinek łączący brzeg podstawy walca, czyli dowolny punkt okręgu podstawy, ze środkiem drugiej podstawy. W galerii zdjęć interaktywnych przedstawiono metodę kreślenia kąta pomiędzy tym odcinkiem a płaszczyzną podstawy walca oraz metodę kreślenia kąta pomiędzy tym odcinkiem a wysokością walca. Zapoznaj się z tymi technikami i wykonaj polecenia umieszczone pod galerią.

Polecenie 2

W walcu poprowadzono odcinek łączący brzeg jednej z podstaw walca ze środkiem drugiej podstawy. Wyznacz cosinus kąta zawartego pomiędzy tym odcinkiem a płaszczyzną podstawy walca, jeśli długość wysokości walca wynosi 15 cm, zaś długość promienia podstawy walca wynosi 8 cm.

Polecenie 3

Wysokość walca ma długość 12 cm. Oblicz pole powierzchni bocznej walca wiedząc, że $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, gdzie kąt α jest kątem zawartym pomiędzy odcinkiem łączącym brzeg jednej z podstaw walca ze środkiem drugiej podstawy i wysokością walca.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

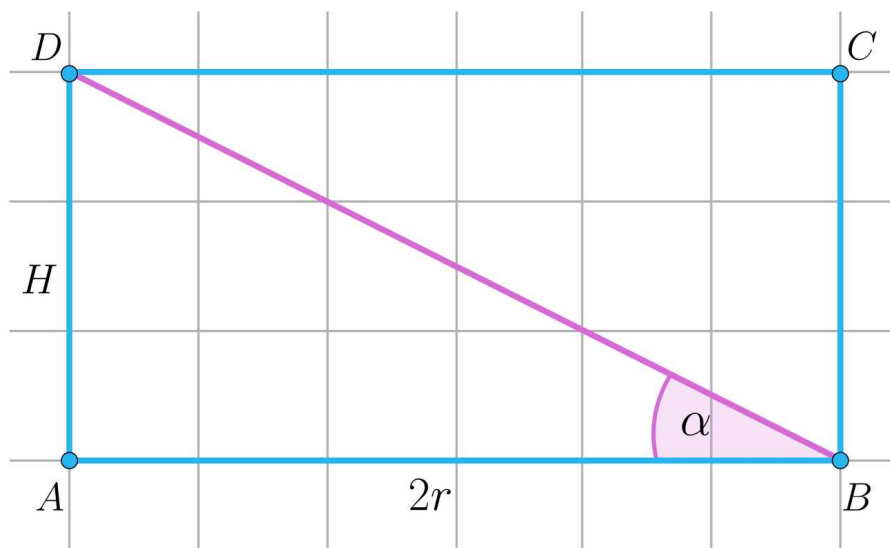
Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Przekątna przekroju osiowego walca tworzy z podstawą kąt α , taki że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{3}$. Pole przekroju osiowego walca wynosi 84 cm^2 . Oblicz objętość walca. W rachunkach przyjmij $\pi \approx \frac{22}{7}$. Zakoduj odpowiednio cyfrę setek, cyfrę dziesiątek i cyfrę jedności otrzymanego wyniku.



cyfra setek

cyfra dziesiątek

cyfra jedności

Ćwiczenie 3



Wysokość walca ma długość 24 cm. Przekątne przekroju osiowego walca przecinają się pod kątem 120° . Oceń prawdziwość podanych zdań.

	Prawda	Fałsz
Objętość walca może wynosić $V = 10368\pi \text{ cm}^3$.	☐	☐
Objętość walca może wynosić $V = 1152\pi \text{ cm}^3$.	☐	☐

Ćwiczenie 4



Objętość walca jest równa $128\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$, a pole jego powierzchni bocznej wynosi $64\sqrt{3}\pi \text{ cm}^2$. Zaznacz poprawne odpowiedzi.

☐ Wysokość walca ma długość 8 cm.

☐ Jeden z kątów pomiędzy przekątnymi przekroju osiowego walca ma miarę 60° .

☐ Promień podstawy walca ma długość 4 cm.

☐ Kąt pomiędzy przekątną przekroju osiowego walca a wysokością walca ma miarę 30° .

Ćwiczenie 5



Pole przekroju osiowego walca jest równe 300 cm^2 , a przekątna tego przekroju jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α takim, że $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.

Ćwiczenie 6



Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu jest prostokątem. Przekątna otrzymanego prostokąta ma długość p i tworzy z wysokością walca kąt α . Wyznacz objętość tego walca.

Ćwiczenie 7



Stosunek pola powierzchni bocznej walca do pola jego powierzchni całkowitej wynosi $3 : 4$. Uzasadnij, że stosunek długości promienia podstawy walca do długości wysokości walca wynosi $1 : 3$.

Ćwiczenie 8



Wysokość walca jest o 7 cm krótsza od średnicy podstawy walca, natomiast przekątna przekroju osiowego walca jest o 7 cm dłuższa od promienia podstawy walca. Wyznacz sinus kąta nachylenia przekątnej przekroju osiowego walca do płaszczyzny podstawy walca.

Dla nauczyciela

Autor: Małgorzata Bochenek

Przedmiot: Matematyka

Temat: Kąty między odcinkami a płaszczyznami w walcu

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria

Zakres podstawowy. Uczeń:

6) oblicza objętość i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka, kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje kąty pomiędzy odcinkami i płaszczyznami w walcu;
- bada związki miarowe między odcinkami i płaszczyznami na wykreślonym przekroju osiowym walca;
- zaznacza kąty pomiędzy odcinkami i płaszczyznami w walcu;
- przeprowadza proste rozumowanie pomagające ustalić strategię rozwiązania zadania.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- pokaz;
- klasyczna metoda problemowa;
- dyskusja w grupach i na forum klasy.

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu
- projektor multimedialny
- e-podręcznik
- arkusze papieru, pisaki
- model walca

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wskazuje temat: „Kąty między odcinkami i płaszczyznami w walcu” i cele zajęć.
2. Nauczyciel określa kryteria sukcesu po przeprowadzonej lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie analizują wyświetlone przez nauczyciela przykłady z sekcji „Animacja”.
2. Nauczyciel dzieli klasę na 5 grup i przydziela każdej grupie jedno polecenie z sekcji „Przeczytaj”. Uczniowie przygotowują rozwiązania i wspólnie omawiają sposób rozwiązania zadania umieszczonego w danym poleceniu na forum klasy.
3. Uczniowie w grupach dzielą się na mniejsze podgrupy i przygotowują rozwiązania ćwiczeń od 1 do 7 z sekcji „Sprawdź się”.
4. Wyznaczony przez nauczyciela uczeń przedstawia rozwiązanie zadania na forum klasy.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel omawia ewentualne problemy z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Podsumowanie lekcji.

Praca domowa:

1. Uczniowie rozwiązują w parach ćwiczenie 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Bryły obrotowe - walec](#)
- [Pole powierzchni walca](#)

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może wykorzystać galerię zdjęć interaktywnych do rozwiązywania zagadnień dotyczących odcinka łączącego brzeg podstawy walca, czyli dowolny punkt okręgu podstawy, ze środkiem drugiej podstawy.