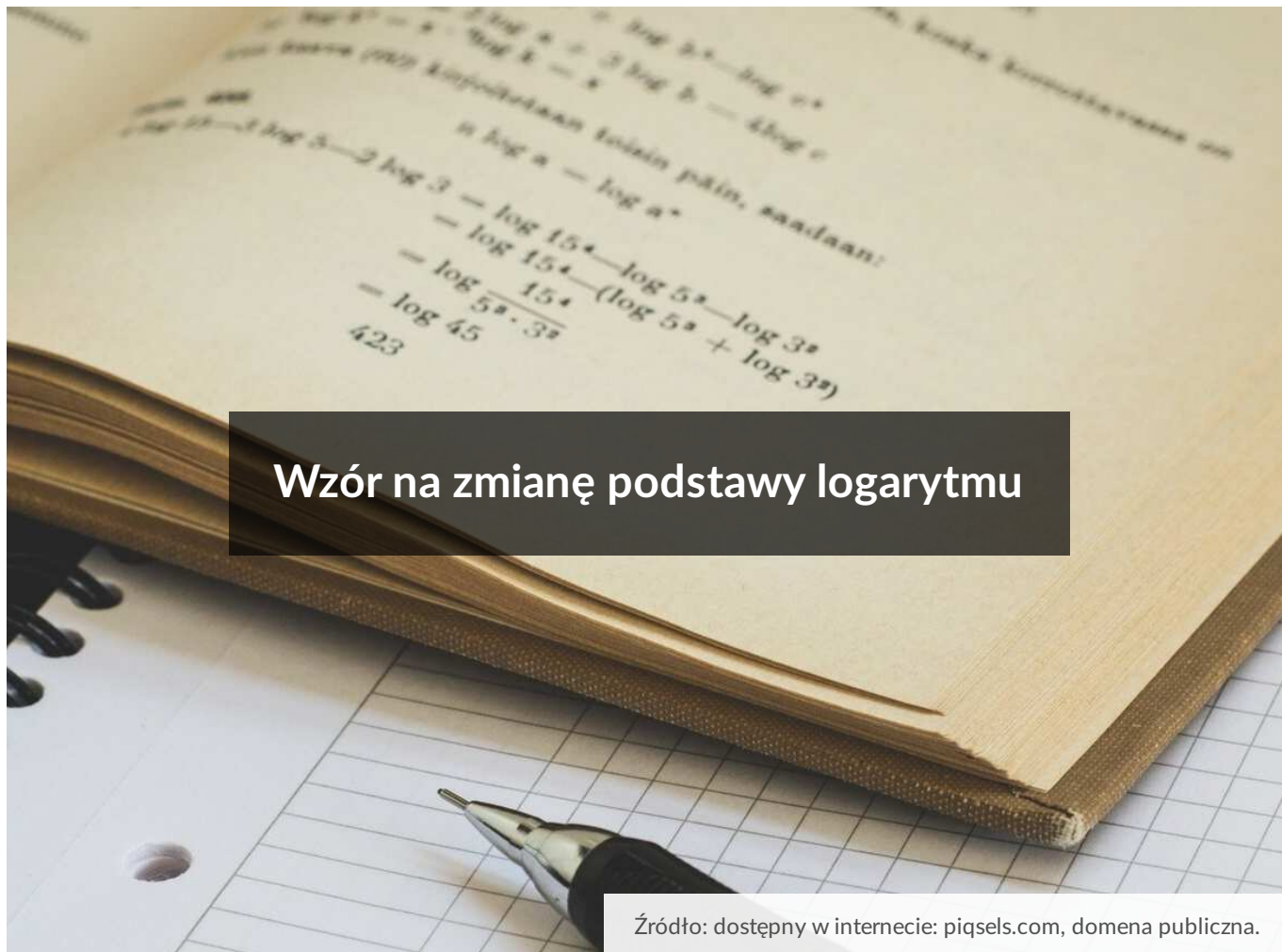




## Wzór na zmianę podstawy logarytmu

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film samouczek
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



## Wzór na zmianę podstawy logarytmu

Źródło: dostępny w internecie: piqsels.com, domena publiczna.

Przez ponad 400 lat uczeni posługiwali się tablicami logarytmicznymi zbudowanymi dla logarytmów o podstawie 10. Jednak nie zawsze w obliczeniach były potrzebne wartości tylko takich logarytmów. Bardzo często należało podać przybliżone wartości logarytmów o innej podstawie. Obliczenia ułatwiała wtedy zastosowanie wzoru, który pozwalał na sprowadzanie logarytmów o innej podstawie, do logarytmu o podstawie 10. W tym materiale poznamy ten wzór. Przekonamy się, jak wielkie znaczenie dla upraszczania wyrażeń ma możliwość sprowadzania logarytmów do tej samej podstawy (nie tylko 10).

### Twoje cele

- Udowodnisz wzór na zmianę podstawy logarytmu.
- Przekształcisz wyrażenia arytmetyczne zawierające logarytmy.
- Zapiszesz w prostszej postaci wyrażenia algebraiczne, korzystając z poznanych wzorów logarytmicznych.
- Dobierzesz odpowiednią strategię, rozwiązując nietypowe problemy matematyczne zawierające logarytmy.

# Przeczytaj

---

Poznamy teraz bardzo ważny wzór, który pozwoli na zmianę podstawy logarytmu.

## Twierdzenie: wzór na zmianę podstawy logarytmu

Jeżeli  $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$  i  $c > 0$ , to  $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$ .

## Ważne!

**Wzór na zmianę podstawy logarytmu** (zwany też wzorem na **zamiannę podstawy logarytmu**) znacznie ułatwia obliczenia wartości wyrażeń zawierających logarytmy.

## Przykład 1

Obliczymy  $\log_4 8$ .

Zarówno 4, jak i 8 to wielokrotności liczby 2. Nasuwa się więc wniosek, że warto zapisać  $\log_4 8$  za pomocą logarytmów o podstawie 2.

$$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2}$$

## Przykład 2

Znajdziemy liczbę  $x$  spełniającą warunek  $\log_2 x + 2 \log_4 x + 3 \log_8 x = 6$ .

Sprowadzimy wszystkie logarytmy do tej samej podstawy. Mamy podobną sytuację jak w **Przykładzie 1** – podstawy logarytmów są potęgami liczby 2. Zatem zmieniamy podstawy logarytmów tak, aby w każdym logarytmie podstawa była równa 2.

$$\log_2 x + 2 \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 4} + 3 \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 8} = 6$$

Obliczamy wartości logarytmów.

$$\log_2 x + 2 \cdot \frac{\log_2 x}{2} + 3 \cdot \frac{\log_2 x}{3} = 6$$

$$3 \log_2 x = 6 / : 3$$

$$\log_2 x = 2$$

Korzystamy z definicji logarytmu.

$$x = 2^2 = 4$$

Liczba 4 jest dodatnia, zatem spełnia warunki zadania.

Odpowiedź: szukana liczba jest równa 4.

Pokażemy teraz przykład zadania, w którym z treści wynika bezpośrednio do jakiej podstawy należy sprowadzić dany logarytm.

### Przykład 3

Wyznamy  $\log_{81} 54$  wiedząc, że  $\log_3 2 = a$ .

Dążymy do tego, aby zapisać dany logarytm za pomocą pewnej liczby wymiernej i  $\log_3 2$ . Najwygodniej będzie więc zmienić podstawę logarytmu  $\log_{81} 54$  od razu na podstawę 3.

$$\log_{81} 54 = \frac{\log_3 54}{\log_3 81} = \frac{\log_3(27 \cdot 2)}{4}$$

W liczniku otrzymanego ułamka zastosujemy wzór na logarytm iloczynu.

$$\log_{81} 54 = \frac{\log_3 27 + \log_3 2}{4} = \frac{3 + \log_3 2}{4}$$

Podstawiamy  $\log_3 2 = a$ .

$$\log_{81} 54 = \frac{3+a}{4}$$

### Przykład 4

Wykażemy, że wartość wyrażenia  $W = \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \dots \cdot \log_{15} 16$  jest liczbą naturalną.

W rozpatrywanym wyrażeniu każdy z logarytmów ma inną podstawę. Co więcej podstawy są liczbami parzystymi, jak również nieparzystymi. Dla podstaw nieparzystych trudno jest ustalić wspólną podstawę. Za to dla podstaw parzystych dogodną podstawą jest zwykle 2. Zatem zmieniamy podstawy logarytmów na 2.

$$W = \frac{\log_2 3}{1} \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \cdot \dots \cdot \frac{\log_2 16}{\log_2 15}$$

Po skróceniu otrzymujemy  $W = \log_2 16 = 4, 4 \in \mathbb{N}$ .

Co należało wykazać.

W następujących przykładach, przekształcając wyrażenia skorzystamy nie tylko ze wzoru na zmianę podstawy logarytmu, ale również z innych wzorów, ułatwiających obliczenia.

### Przykład 5

Znajdziemy liczbę  $x$  spełniającą warunek  $\log_7 4 + \log_{49} x = \log_{\frac{1}{7}} 2$ .

Z definicji logarytmu wynika, że poszukiwana liczba  $x$  musi być dodatnia. Zapisujemy każdy z logarytmów za pomocą logarytmów o podstawie 7.

$$\log_7 4 + \frac{\log_7 x}{\log_7 49} = \frac{\log_7 2}{\log_7 \frac{1}{7}}$$

Obliczamy wartości logarytmów zapisanych w mianownikach.

$$\log_7 4 + \frac{\log_7 x}{2} = \frac{\log_7 2}{-1}$$

Mnożymy obie strony równości przez 2.

$$2 \log_7 4 + \log_7 x = -2 \log_7 2$$

Przenosimy na prawą stronę  $2 \log_7 4$  i wyłączamy przed nawias wspólny czynnik.

$$\log_7 x = -2 \log_7 2 - 2 \log_7 4$$

$$\log_7 x = -2(\log_7 2 + \log_7 4)$$

Korzystamy ze wzoru na logarytm iloczynu, a następnie ze wzoru na logarytm potęgi.

$$\log_7 x = -2 \log_7 8$$

$$\log_7 x = \log_7 \frac{1}{64}$$

Z różnowartościowości funkcji logarymicznej wynika, że  $x = \frac{1}{64}$ .

Liczba  $\frac{1}{64}$  jest dodatnia, zatem spełnia warunki zadania.

Odpowiedź: liczbą spełniającą warunek określony w treści zadania jest  $\frac{1}{64}$ .

### Przykład 6

Znajdziemy liczbę  $x$  spełniającą warunek  $\log_x 10 + \log_{x^4} 10 = 5$ .

Tym razem będziemy poszukiwać liczby znajdującej się w podstawie logarytmu, zatem dodatniej i różnej od 1.

Oczywistym jest, że drugi z logarytmów zapiszemy za pomocą logarytmów o podstawie  $x$ .

$$\log_x 10 + \log_{x^4} 10 = 5$$

$$\log_x 10 + \frac{\log_x 10}{\log_x x^4} = 5$$

$$\log_x 10 + \frac{\log_x 10}{4} = 5$$

Mnożymy obie strony równości przez 4 i wykonujemy wskazane działania.

$$4 \log_x 10 + \log_x 10 = 20$$

$$5 \log_x 10 = 20 / : 5$$

$$\log_x 10 = 4$$

Z definicji logarytmu wynika, że

$$x^4 = 10$$

$$x = \sqrt[4]{10}, \text{ bo } x > 0.$$

Znaleziona liczba jest dodatnia i różna od 1, spełnia więc warunki zadania.

W ostatnim przykładzie pokażemy, jak korzystając z tablic logarytmicznych znaleźć przybliżoną wartość logarytmu o innej podstawie niż 10. Obecnie ta umiejętność nie jest już tak przydatna jak kiedyś, gdyż dysponujemy innymi narzędziami niż tablice logarytmiczne, ale warto ją poznać.

### Przykład 7

Obliczymy przybliżoną wartość liczby  $\log_2 6$ .

Zapisujemy dany logarytm za pomocą logarytmów o podstawie 10.

$$\log_2 6 = \frac{\log 6}{\log 2}$$

Z tablic logarytmicznych odczytujemy:  $\log 6 \approx 0,78$  i  $\log 2 \approx 0,3$ .

$$\text{Zatem } \log_2 6 \approx \frac{0,78}{0,3} = 2,6.$$

## Słownik

**wzór na zmianę podstawy logarytmu**

$$a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1 \text{ i } c > 0, \text{ to } \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

# Film samouczek

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samouczkiem. Spróbuj samodzielnie udowodnić twierdzenie o zmianie podstawy logarytmu, a następnie porównaj z prezentowanym dowodem.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DpY6qhSpR>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego wzoru na zmianę podstawy logarytmu.

---

## Polecenie 2

Wykaż, że jeżeli  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ ,  $y > 0$ ,  $y \neq 1$ , to  $\log_x y \cdot \log_y x - \log_{x^2} y \cdot \log_y x^2 = \log_{yx} 1$ .

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7

Wykaż, że  $(\log_2 3)^{-1} + (\log_4 3)^{-1} + (\log_8 3)^{-1} < 6$ .



Ćwiczenie 8

Przyjmij, że  $\log 6 \approx 0,8$  i  $\log 4 \approx 0,6$ . Oblicz przybliżoną wartość liczby  $\log_4 6$ .



Ćwiczenie 9



Ćwiczenie 10



Ćwiczenie 11



Ćwiczenie 12



Ćwiczenie 13



Ćwiczenie 14



Ćwiczenie 15



Ćwiczenie 16

Oblicz  $\log_4 81 \cdot \log_{\sqrt{3}} 16$ .



# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Justyna Cybulska

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Wzór na zmianę podstawy logarytmu

**Grupa docelowa:** III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:

9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto stosuje wzór na zmianę podstawy logarytmu.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- udowadnia wzór na zmianę podstawy logarytmu
- przekształca wyrażenia arytmetyczne zawierające logarytmy
- zapisuje w prostszej postaci wyrażenia algebraiczne, korzystając z poznanych wzorów logarytmicznych
- dobiera odpowiednią strategię, rozwiązując nietypowe problemy matematyczne zawierające logarytmy

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

**Metody i techniki nauczania:**

- ocena punktowa ważona
- obieg kart

### **Formy pracy:**

- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

### **Przebieg lekcji**

#### **Faza wstępna:**

1. Uczniowie wspólnie metodą oceny punktowej ważonej przypominają wszystkie wiadomości i umiejętności dotyczące logarytmów, jakie do tej pory uzyskali. Jeden z uczniów, na podstawie wypowiedzi pozostałych, tworzy graficzny model zależności między pozyskanymi informacjami. Wynikiem pracy może być konkluzja, które definicje i twierdzenia dotyczące logarytmów trzeba znać koniecznie (najlepiej na pamięć), a które są ich pochodnymi.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie pracują w parach. Zapoznają się z filmem samouczkiem. Najpierw próbują samodzielnie udowodnić podane tam twierdzenie o zmianie podstawy logarytmu, a następnie porównują z przedstawionym rozwiązaniem. W podobny sposób pracują, analizując przykłady przedstawione w sekcji Przeczytaj.
2. Teraz pary uczniów łączą się w grupy 4 osobowe i pracują metodą obiegu kart, rozwiązując zadania z sekcji Sprawdź się. Grupa rozpoczynająca rozwiązywanie danego zadania zapisuje początek rozwiązania i podaje następnej grupie kartkę z zapisem. Ta z kolei dopisuje następną część i podaje kartkę dalej, itp. Ostatnia grupa, która kończy rozwiązanie zadania sprawdza interaktywnie poprawność uzyskanego wyniku. Jeśli wynik jest błędny, kartka wędruje do początkowej grupy, która weryfikuje swoje rozwiązanie. Grupa podaje kartkę następnej grupie, itd. Jeśli nadal odpowiedź nie jest poprawna, grupa może poprosić o pomoc nauczyciela.
3. Kończącym elementem tej części zajęć może być dyskusja – czy łatwo jest rozwiązywać zadania, śledząc tok rozumowania innej grupy osób i czy wyodrębnienie na początku lekcji najważniejszych wzorów i umiejętności pomogło w doborze odpowiednich strategii rozwiązywania zadań.

### **Faza podsumowująca:**

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par.

### **Praca domowa:**

Zadaniem uczniów jest wymyślenie i udowodnienie prostego twierdzenia dotyczącego przekształceń logarytmicznych, zapisanie treści twierdzenia na kartce i przyniesienie tej kartki na następną lekcję. W ten sposób powtórzenie wiadomości na temat logarytmów na następnej lekcji, może rozpocząć się od prezentacji najciekawszych twierdzeń wymyślonych przez uczniów i wspólnego ich udowodnienia.

### **Materiały pomocnicze:**

[Działania na logarytmach](#)

### **Wskazówki metodyczne:**

Z filmem samouczkiem każdy uczeń może zapoznać się w domu i na jego podstawie przygotować jedno zadanie, które na lekcji da do rozwiązania koleżance lub koledze z ławki.