




Zastosowanie własności ciągu arytmetycznego w zadaniach praktycznych

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Infografika
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Zastosowanie własności ciągu arytmetycznego w zadaniach praktycznych

Źródło: Felix Mooneeram, dostępny w internecie: unsplash.com, domena publiczna.

Nikołaj Łobaczewski, genialny dziewiętnastowieczny matematyk rosyjski, twórca geometrii nieeuklidesowej, stwierdził:

“nie ma gałęzi matematyki, choćby nie wiem jak abstrakcyjnej, która pewnego dnia nie zostałaby zastosowana do zjawisk realnego świata.



Nikołaj Iwanowicz Łobaczewski

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

My zastosujemy tę myśl do ciągów arytmetycznych, pokazując ich zastosowanie w zadaniach z kontekstem realistycznym.

Twoje cele

- Powtórzysz i rozwiniesz umiejętności związane z zastosowaniem ciągów arytmetycznych.
- Zastosujesz w obliczeniach poznane wzory związane z ciągiem arytmetycznym.
- Zbudujesz model matematyczny problemu z kontekstem realistycznym, oparty o własności ciągu arytmetycznego.

Przeczytaj

W wielu okolicznościach życia codziennego spotykamy się z sytuacjami, które można opisać za pomocą ciągu arytmetycznego. Podamy teraz kilka takich przykładów.

Na początek przypomnienie najważniejszych wzorów dotyczących ciągu arytmetycznego, z których będziemy korzystać.

Będziemy przy tym zakładać, że dany ciąg, np. ciąg (a_n) , jest określony dla $n \geq 1$ i $n \in \mathbb{N}$.

Definicja: Ciąg arytmetyczny

Ciągiem arytmetycznym nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego liczby r , zwanej różnicą ciągu.

Ciąg arytmetyczny (a_n)

| Wyraz ogólny ciągu | Zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu | Suma n początkowych wyrazów ciągu |
|-------------------------------|--|-------------------------------------|
| $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$ | $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ | $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ |

W pierwszym i drugim przykładzie korzystać będziemy bezpośrednio z definicji ciągu arytmetycznego.

Przykład 1

W zegarze wahadłowym, przy każdym uderzeniu zegara, „waga” obniża się o 3 mm. Obliczymy o ile centymetrów obniży się „waga” w ciągu dwunastu godzin, jeżeli zegar wybija tylko godziny.

Po wybiciu godziny 1 „waga” obniży się o 3 mm,

po wybiciu godziny 2 „waga” obniży się o 6 mm,

po wybiciu godziny 3 „waga” obniży się o 9 mm,

...

...

Zauważmy, że liczby określające długość odcinka, o który obniża się „waga” są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie 3 i różnicy 3.

Oznaczmy (a_n) ten ciąg i obliczmy jego kolejne wyrazy, korzystając ze wzoru rekurencyjnego.

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases}$$

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 3 + 3 = 6$$

$$a_3 = 6 + 3 = 9$$

$$a_4 = 9 + 3 = 12$$

$$a_5 = 12 + 3 = 15$$

$$a_6 = 15 + 3 = 18$$

$$a_7 = 18 + 3 = 21$$

$$a_8 = 21 + 3 = 24$$

$$a_9 = 24 + 3 = 27$$

$$a_{10} = 27 + 3 = 30$$

$$a_{11} = 30 + 3 = 33$$

$$a_{12} = 33 + 3 = 36$$

Dodajemy otrzymane liczby.

$$3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + 24 + 27 + 30 + 33 + 36 = 234$$

„Waga” obniży się o 234 mm, czyli o 23,4 cm.

Przykład 2

W pewnym zakładzie pracy każdy pracownik dostaje raz w roku podwyżkę – za każdym razem taką samą. Pani Eliza pracowała w tym zakładzie przez 7 lat. Obliczmy, ile łącznie zarobiła pani Eliza przez siedem lat pracy w tym zakładzie, jeżeli w czwartym roku pracy zarobiła 40000 zł.

Pani Eliza co roku dostawała taką samą kwotę podwyżki – oznaczmy ją p zł.

Oznaczmy kwotę, jaką zarobiła pani Eliza w pierwszym roku przez k zł.

W kolejnych latach zarobiła więc pani Eliza następujące kwoty (w zł):

$$k$$

$$k + p$$

$$k + 2p$$

$$k + 3p$$

$$k + 4p$$

$$k + 5p$$

$$k + 6p$$

Zatem w sumie zarobiła (w zł): $7k + 21p = 7(k + 3p)$.

Zauważmy, że $k + 3p = 40000$.

Czyli:

$$7(k + 3p) = 7 \cdot 40000 = 280000$$

Odpowiedź:

Pani Eliza zarobiła łącznie 280000 zł.

Teraz zastosowanie wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego i sumę kolejnych n wyrazów ciągu arytmetycznego.

Przykład 3

Z prostopadłościennego zbiornika o wymiarach $6 \text{ dm} \times 4 \text{ dm} \times 5 \text{ dm}$ napełnionego w całości wodą wypływa woda. W ciągu pierwszej minuty wypłynęło 4 dm^3 wody, a w każdej następnej minucie o 2 dm^3 więcej niż w poprzedniej. Obliczymy, ile litrów wody zostanie w pojemniku po 5 minutach.

Liczby określające objętość wypływającej wody tworzą ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie 4 i różnicy 2.

Zapiszmy wzór ogólny tego ciągu.

$$a_n = 4 + (n - 1) \cdot 2$$

$$a_n = 2n + 2 \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Obliczymy, ile litrów wody wyciekło ze zbiornika po 5 minutach. Korzystamy ze wzoru na sumę n kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego.

$$S_n = \frac{4+2n+2}{2} \cdot n$$

$$S_n = (3 + n)n$$

Do uzyskanego wzoru w miejsce zmiennej podstawiamy 5.

$$S_{10} = (3 + 5) \cdot 5 = 40$$

Po 5 minutach wyciekło $40 \text{ dm}^3 = 40 \text{ l}$ wody.

W pojemniku było $6 \text{ dm} \cdot 4 \text{ dm} \cdot 5 \text{ dm} = 120 \text{ dm}^3$, czyli 120 l wody.

Obliczamy, ile wody zostało.

$$120 - 40 = 80$$

Odpowiedź:

W pojemniku zostało 80 l wody.

Przykład 4

Rafał miał do rozwiązania 440 zadań z matematyki. Pierwszego dnia rozwiązał 20 zadań i postanowił zwiększyć tempo rozwiązywania zadań – każdego dnia rozwiązywać 10 więcej zadań niż w dniu poprzednim. W ciągu ilu dni Rafał rozwiązał wszystkie zadania?

Liczby rozwiązanych zadań w poszczególnych dniach tworzą n -wyrazowy ciąg arytmetyczny, w którym

$$a_1 = 20$$

$$r = 10$$

Zapisujemy wzór ogólny tego ciągu.

$$a_n = 20 + (n - 1) \cdot 10 = 10n + 10$$

Korzystamy ze wzoru na sumę n -kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Do zapisanego wzoru podstawiamy znalezione wielkości.

$$S_n = \frac{20 + 10n + 10}{2} \cdot n$$

Z treści zadania wynika, że suma ta jest równa 440.

Otrzymujemy równanie:

$$\frac{20 + 10n + 10}{2} \cdot n = 440$$

$$\frac{10n^2 + 30n}{2} = 440$$

$$10n^2 + 30n - 880 = 0 \quad | : 10$$

$$n^2 + 3n - 88 = 0$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe.

$$\Delta = 9 + 352 = 361$$

$$\sqrt{\Delta} = 19$$

$$n_1 = \frac{-3-19}{2} < 0 \text{ - nie spełnia warunków zadania}$$

$$n_2 = \frac{-3+19}{2} = 8$$

Odpowiedź:

Rafał wszystkie zadania rozwiązał w ciągu 8 dni.

Przykład 5

W turnieju szachowym rozegrano 630 partii, przy czym każdy z uczestników turnieju grał z każdym tylko jeden raz. Obliczymy, ilu było uczestników turnieju.

Zauważmy, że jeśli ponumerujemy zawodników, to liczby partii rozegranych przez kolejnych uczestników są kolejnymi wyrazami n -wyrazowego ciągu arytmetycznego.

Istotnie:

- pierwszy uczestnik nie gra z nikim - $a_1 = 0$
- drugi uczestnik gra z pierwszym - $a_2 = 1$
- trzeci uczestnik gra z pierwszym i drugim - $a_3 = 2$
- czwarty uczestnik gra z pierwszym, drugim i trzecim - $a_4 = 3$
- ...

W tak utworzonym ciągu:

$$a_1 = 0,$$

$$r = 1.$$

Dana jest suma ciągu:

$$S_n = 630$$

Należy znaleźć n -liczbę uczestników turnieju.

Korzystamy ze wzoru na sumę kolejnych n -wyrazów ciągu arytmetycznego.

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot r}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2 \cdot 0 + (n-1) \cdot 1}{2} \cdot n$$

$$\frac{n^2 - n}{2} = 630$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie.

$$n^2 - n - 1260 = 0$$

$$\Delta = 1 + 5040 = 5041$$

$$\sqrt{\Delta} = 71$$

$$n_1 = \frac{1-71}{2} < 0 - \text{nie spełnia warunków zadania}$$

$$n_2 = \frac{1+71}{2} = 36$$

Odpowiedź:

W turnieju uczestniczyło 36 zawodników.

Słownik

ciąg arytmetyczny

ciągami arytmetycznym nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego liczby r , zwanej różnicą ciągu

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką, starając się najpierw samodzielnie rozwiązać zapisane tam zadanie.

Polecenie 2

Wartość koparki maleje co roku o tę samą kwotę. Proces ten skończy się, gdy wartość koparki zamortyzuje się, czyli jej wartość będzie równa 0. Oblicz, po ilu latach zamortyzuje się koparka, jeżeli jej wartość po 25 latach była trzy razy mniejsza niż po 15 latach.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



W pewnej fabryce produkcja śrub wzrasta z roku na rok w postępie arytmetycznym. W pierwszym roku wyprodukowano 20 tysięcy śrub, a w następnym 24 tysiące śrub. Oblicz, ile łącznie śrub wyprodukowano w ciągu 5 lat.

Ćwiczenie 8



Pan Jarek kupił na raty dom za 450000 zł. Przy zawieraniu umowy wpłacił 50000 zł. Pozostała kwotę ma spłacić w ratach. Pierwsza rata wynosi 16000 zł, a każda następna, wpłacona pod koniec roku wynosi 24000 zł. Po ilu latach pan Jarek przestanie spłacać raty?

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowanie własności ciągu arytmetycznego w zadaniach praktycznych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

- 1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
- 5) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;
- 7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- powtarza i rozwija umiejętności związane z zastosowaniem ciągów arytmetycznych
- stosuje w obliczeniach poznane wzory związane z ciągiem arytmetycznym
- buduje model matematyczny problemu z kontekstem realistycznym, oparty o własności ciągu arytmetycznego

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów
- JIGSAW
- fabuła z kubka

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kubki z karteczkami

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają wiadomości związane z ciągiem arytmetycznym – podają odpowiednie wzory i przykłady.
2. Nauczyciel informuje, że głównym celem zajęć jest utrwalenie i rozwijanie umiejętności związanych z ciągiem arytmetycznym, podaje temat lekcji.
3. Nauczyciel wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie będą pracować metodą JIGSAW. W tym celu nauczyciel dzieli uczniów na 3 grupy. Grupy zapoznają się z materiałem zapisanym w sekcji „Przeczytaj” – każda z jednym przykładem .
2. Każda z grup „rozpracowuje” swój materiał, dyskutuje tak, aby każdy z uczniów zrozumiał tekst i mógł przekazać wiedzę dalej – stał się ekspertem od danych umiejętności.
3. Po wyznaczonym przez nauczyciela czasie uczniowie tworzą nowe grupy tak, aby w każdej nowej grupie znalazł się ekspert od innej partii materiału.
4. Eksperti kolejno relacjonują, czego nauczyli się w swoich grupach.
5. Następnie eksperci wracają do swoich grup i konfrontują zdobytą wiedzę całościową, sprawdzając, czy wszyscy uzyskali zakładane umiejętności.
6. Teraz lider każdej z grup wyciąga z kubka 5 karteczek. Zadaniem grupy jest ułożenie historyjki zawierającej wyrazy wyciągnięte z kubka. Historyjka musi być równocześnie zadaniem, którego rozwiązanie wymaga wykonanie obliczeń związanych z ciągiem arytmetycznym.

7. Grupy wymieniają się zadaniami tak, aby każda z grup rozwiązała wszystkie ułożone zadania.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
Liderzy grup omawiają problemy, jakie uczniowie napotkali w czasie rozwiązywania zadań, które ułożyli ich koledzy.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.

Praca domowa:

Uczniowie w domu mają za zadanie zapoznać się z infografiką i rozwiązać przykłady z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Ciąg arytmetyczny i geometryczny zastosowanie](#)

Wskazówki metodyczne:

Infografikę można wykorzystać na zajęciach wprowadzających wzór ogólny ciągu arytmetycznego.