



Ciąg arytmetyczny i geometryczny - zadania

Rozwiązywanie zadań tekstowych z wielkościami tworzącymi ciąg geometryczny lub arytmetyczny. Obliczanie długości boków trójkąta, miar kątów w trójkącie, długości spirali. Zasób zawiera przykłady i zadania z rozwiązaniami. Animacja: wyznaczanie wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego.

Rozwiązywanie zadań tekstowych z wielkościami tworzącymi ciąg geometryczny lub arytmetyczny. Obliczanie wyrazów ciągu liczbowego, miar kątów trójkąta, długości odcinków łamanej. Zasób zawiera zadania z wyjaśnieniami i rozwiązaniami.

Rozwiązywanie zadań tekstowych z wielkościami tworzącymi ciąg geometryczny lub arytmetyczny. Animacja: dywan Sierpińskiego. Zasób zawiera zadania z wyjaśnieniami i rozwiązaniami.

Ciąg arytmetyczny i geometryczny - zadania

Materiał ten poświęcony jest ciągom arytmetycznym i geometrycznym. Analizując zawarte tu przykłady, dowiesz się jak wykorzystać własności tych ciągów w rozwiązywaniu zadań oraz sprawdzisz swoją wiedzę samodzielnie rozwiązując ćwiczenia. Aby przypomnieć sobie informacje dotyczące omawianych tutaj ciągów możesz prześledzić materiały [Ciąg arytmetyczny](#) oraz [Ciąg geometryczny](#).

Przykład 1

W nieskończonym ciągu arytmetycznym (a_n) dane są wyrazy $a_5 = -7$ i $a_9 = 13$. Ile wyrazów tego ciągu to dodatnie liczby całkowite dwucyfrowe?

Liczby całkowite dwucyfrowe są mniejsze od 100 i większe od 9. Z tego wynika, że musimy rozwiązać nierówność $a_n < 100$ i $a_n > 9$.

Wyznamy wzór ogólny tego ciągu.

Rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} -7 = a_1 + 4r \\ 13 = a_1 + 8r \end{cases}$$

otrzymanego po wstawieniu piątego i dziewiątego wyrazu do wzoru na n -ty wyraz ciągu są $a_1 = -27$ i $r = 5$. Z tego wynika, że wzór ogólny tego ciągu ma postać

$$a_n = 5n - 32.$$

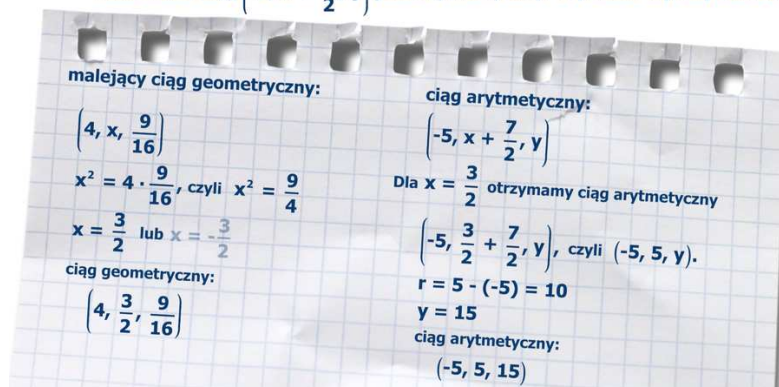
Mamy zatem nierówność

$$9 < 5n - 32 < 100,$$

czyli $8\frac{1}{5} < n < 26\frac{2}{5}$. Oznacza, że warunki zadania spełnia 18 wyrazów ciągu. Są to wyrazy $a_9, a_{10}, \dots, a_{26}$.

Przykład 2

➡ Ciąg $\left(4, x, \frac{9}{16}\right)$ jest malejącym ciągiem geometrycznym, natomiast ciąg $\left(-5, x + \frac{7}{2}, y\right)$ jest arytmetyczny. Wyznacz wyrazy obu ciągów.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RsXOLMutOyNm3>

Powtórzenie i utrwalenie wiadomości o ciągach_3086

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia w jaki sposób możemy wyznaczyć brakujące wyrazy ciągu w przypadku, gdy ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny.

Ćwiczenie 1

Ciąg $(x, 9, x + 4)$ jest rosnącym ciągiem arytmetycznym, a ciąg $(x + 1, 12, y - 7)$ jest ciągiem geometrycznym. Oblicz x i y . Uzupełnij luki, wpisując poprawne wartości.

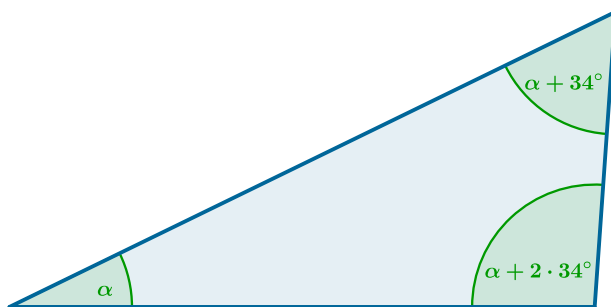
$x =$ i $y =$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 3

Miary kątów trójkąta tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 34° . Oblicz miarę największego kąta w tym trójkącie.

Wprowadźmy oznaczenia wykorzystując fakt, że miary kątów trójkąta tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 34° .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Suma miar kątów trójkąta jest równa $\alpha + \alpha + 34^\circ + \alpha + 2 \cdot 34^\circ = 180^\circ$. Z tego wynika, że $\alpha = 26^\circ$.

Największy kąt w tym trójkącie ma miarę $26^\circ + 68^\circ = 94^\circ$.

Ćwiczenie 2



Uzupełnij poniższe zdania tak, aby były zdaniami prawdziwymi. Wpisz w luki odpowiednie liczby.

1. Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 5. Oblicz pole tego trójkąta.

Odpowiedź: Boki trójkąta zapisane w kolejności rosnącej wynoszą cm, cm oraz cm.

Pole wynosi $P =$ cm^2 .

2. Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 48 cm, a jego pole 96 cm^2 . Długości boków trójkąta są trzema kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu arytmetycznego. Wyznacz długości boków trójkąta.

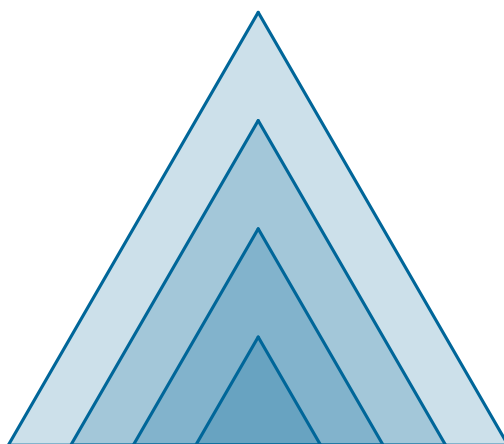
Odpowiedź: Długości boków trójkąta zapisane w kolejności rosnącej wynoszą cm, cm oraz cm.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Zapoznaj się z poniższą ilustracją.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Boki trójkątów równobocznych tworzą ciąg arytmetyczny, w którym $r > 0$. Odpowiedz na poniższe pytania. Kliknij w lukę aby wyświetlić listę rozwijalną i wybierz poprawną odpowiedź.

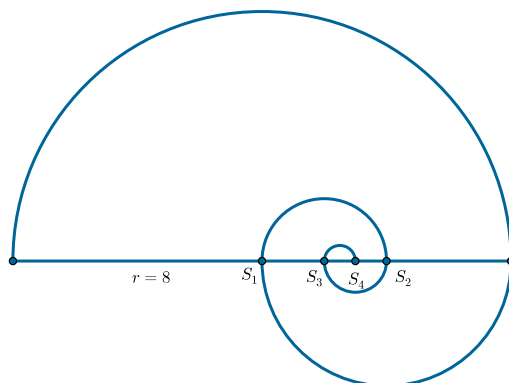
1. Czy obwody tych trójkątów tworzą ciąg arytmetyczny?

2. Czy pola tych trójkątów tworzą ciąg arytmetyczny?

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 4

Punkty S_1, S_2, S_3, S_4 są środkami półokręgów. Promień największego z półokręgów jest równy 8. Oblicz długość spirali przedstawionej na rysunku.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Z faktu, że każdy kolejny półokrąg tworzący spiralę przechodzi przez środek poprzedniego półokręgu, wynika, że każdy kolejny promień jest połową promienia poprzedniego półokręgu.

Zatem kolejne promienie półokręgów tworzą malejący ciąg geometryczny, którego iloraz $q = \frac{1}{2}$.

Długości kolejnych półokręgów są równe

$$L_1 = 8\pi, L_2 = \frac{1}{2} \cdot 8\pi = 4\pi, L_3 = \frac{1}{2} \cdot 4\pi = 2\pi, \dots$$

I również tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $q = \frac{1}{2}$.

Długość spirali jest sumą pięciu pierwszych wyrazów tego ciągu. Zatem

$$L = S_5 = 8\pi \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5}{1 - \frac{1}{2}} = 8\pi \cdot \frac{31}{16} = \frac{31}{2}\pi.$$

Przykład 5

W pierwszym miesiącu pracy w pizzerii Kamil zarobił 650 zł. W każdym następnym miesiącu zarabiał o 20 zł więcej niż w miesiącu poprzednim. Jaką kwotę zarobił Kamil, pracując w ten sposób przez pół roku?

Zauważmy, że zarobione przez Kamila kwoty są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, w którym $a_1 = 650$ zł i $r = 20$ zł.

Zarobiona przez pół roku kwota będzie sumą sześciu pierwszych wyrazów tego ciągu. Wstawiając wartości do wzoru na sumę ciągu arytmetycznego, otrzymujemy

$$S_6 = \frac{2 \cdot 650 + 5 \cdot 20}{2} \cdot 6 = 4200 \text{ zł.}$$

Ćwiczenie 4

Ciąg $(3, 2x, y - 3)$ jest ciągiem arytmetycznym, a ciąg $(64, y, x)$ jest malejącym ciągiem geometrycznym. Wyznacz x i y . Kliknij w lukę aby wyświetlić listę rozwijalną i wybierz poprawną odpowiedź.

$x =$ oraz $y =$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Dane liczby 30, x , y w podanej kolejności tworzą malejący ciąg arytmetyczny. Oblicz x i y , wiedząc, że ciąg $(x, y, 2)$ jest geometryczny. Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

☐ $x = 16$ i $y = 8$

☐ $x = 14$ i $y = 4$

☐ $x = 12,5$ i $y = -5$

☐ $x = 12,6$ i $y = -4$

☐ $x = 13,5$ i $y = -3$

☐ $x = 18$ i $y = 6$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Wyrazami nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n) są kolejne dodatnie liczby całkowite, które przy dzieleniu przez 4 dają resztę 1: $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 9$, Wyrazami nieskończonego ciągu arytmetycznego (b_n) są kolejne dodatnie liczby całkowite, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2: $b_1 = 2$, $b_2 = 7$, $b_3 = 12$, Wpisz w luki wszystkie liczby dwucyfrowe, które występują w obu tych ciągach.

Tymi liczbami zapisanymi w kolejności rosnącej są: , , , , .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Uzupełnij poniższe zdania tak, aby były zdaniami prawdziwymi. Kliknij w lukę, aby rozwinąć listę i wybierz poprawną odpowiedź w każdym przypadku.

- Suma wszystkich dodatnich liczb całkowitych, które są dwucyfrowe i dzielą się przez 3 wynosi .
- Suma wszystkich parzystych liczb dwucyfrowych wynosi .
- Suma wszystkich liczb dwucyfrowych podzielnych przez 8 wynosi .
- Suma wszystkich liczb dwucyfrowych, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2 wynosi .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Miary kątów trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz różnicę tego ciągu. Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 45°

☐ 60°

☐ 75°

☐ 30°

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Miary kątów trójkąta tworzą ciąg arytmetyczny, a najmniejszy kąt ma miarę 51° . Oblicz miarę największego kąta tego trójkąta. Uzupełnij lukę w odpowiedzi. Kliknij w nią aby wyświetlić listę rozwijalną i wybierz poprawną odpowiedź.

Odpowiedź: Największy kąt tego trójkąta ma miarę .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



Pierwszy odcinek łamanej ma długość 4 cm, a każdy kolejny jest dłuższy od poprzedniego o 2 cm. Z ilu odcinków składa się ta łamana, jeśli jej całkowita długość jest równa 270 cm? Uzupełnij lukę w odpowiedzi, wpisując odpowiednią liczbę.

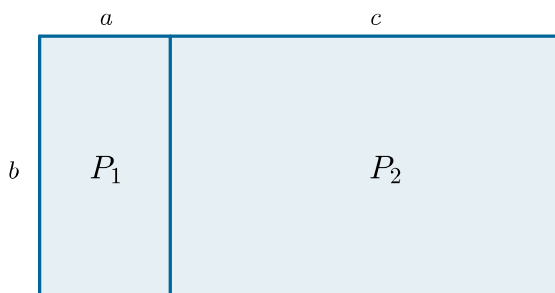
Odpowiedź: Łamana składa się z odcinków.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



Prostokąt o polu powierzchni równym 128 cm^2 podzielono na dwa takie prostokąty, że pole większego jest trzy razy większe od pola mniejszego. Długości odcinków a , b są długościami boków mniejszego prostokąta, b , c są długościami boków większego z prostokątów, które powstały z podziału. Wiedząc, że a , b , c tworzą ciąg arytmetyczny, wyznacz długości boków tego prostokąta.



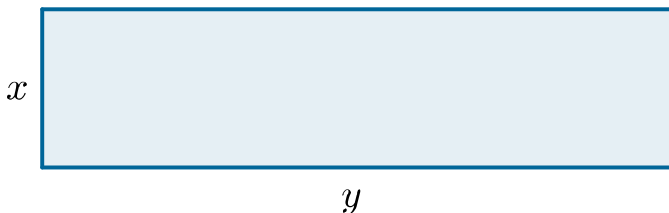
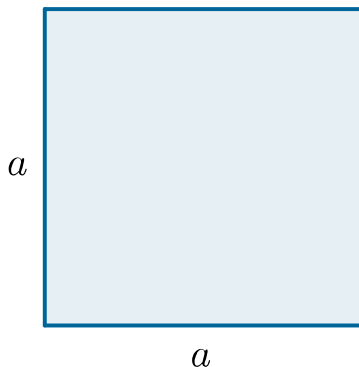
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



Dany jest kwadrat o boku a i prostokąt o bokach x i y . Ciąg (x, a, y) jest geometryczny. Która z tych figur ma większe pole?



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

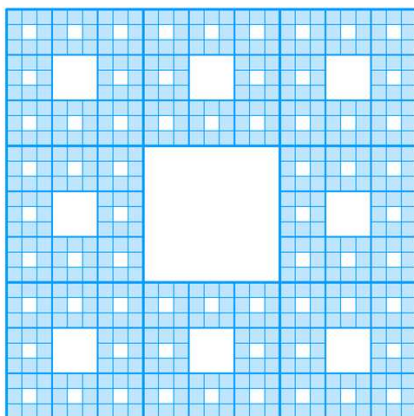
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



Długości trzech krawędzi prostopadłościanu wychodzących z tego samego wierzchołka tworzą ciąg geometryczny, a suma długości tych krawędzi jest równa 12. Objętość tego prostopadłościanu jest równa 64. Oblicz długości krawędzi tego prostopadłościanu.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



Fraktal - Dywan Sierpińskiego

Nazwa pochodzi od nazwiska Wacława Sierpińskiego (1882-1969) - polskiego matematyka.

Po n krokach liczba dziur w kwadracie będzie równa:
 $8^0 + 8^1 + 8^2 + 8^3 + \dots + 8^{n-1}$.

Film dostępny pod adresem </preview/resource/Rd7hrqpZ4TzGi>

atrapa: opis animacji

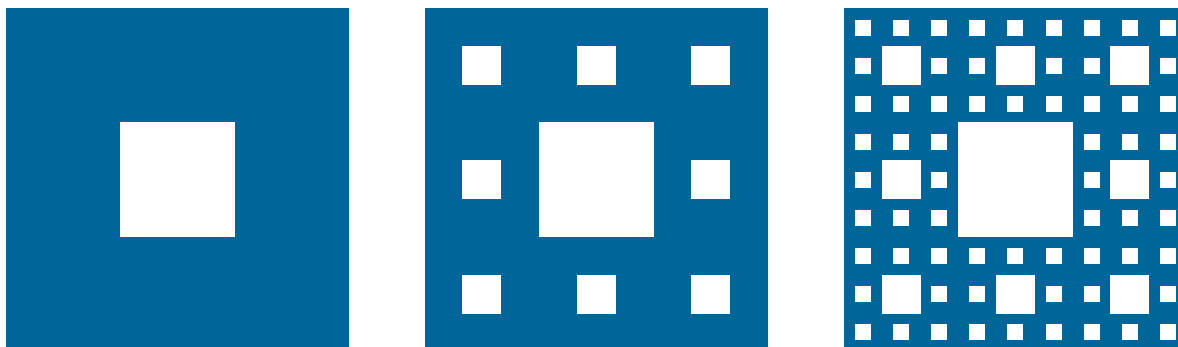
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia pewien fraktal, który nazywamy dywanem Sierpińskiego.

Ćwiczenie 14



Na kolejnych rysunkach zaznaczono sposób tworzenia tzw. dywanu Sierpińskiego.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Za każdym razem z kwadratu jest usuwana pewna liczba kwadratów.

1. Ile łącznie kwadratów zostanie usuniętych po 4 kroku?
2. Ile łącznie kwadratów zostanie usuniętych po n krokach? Wynik zapisz w jak najprostszej postaci.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15



Pole trójkąta prostokątnego ABC jest równe 24, a długości boków tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz obwód tego trójkąta.

[illegible]

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.