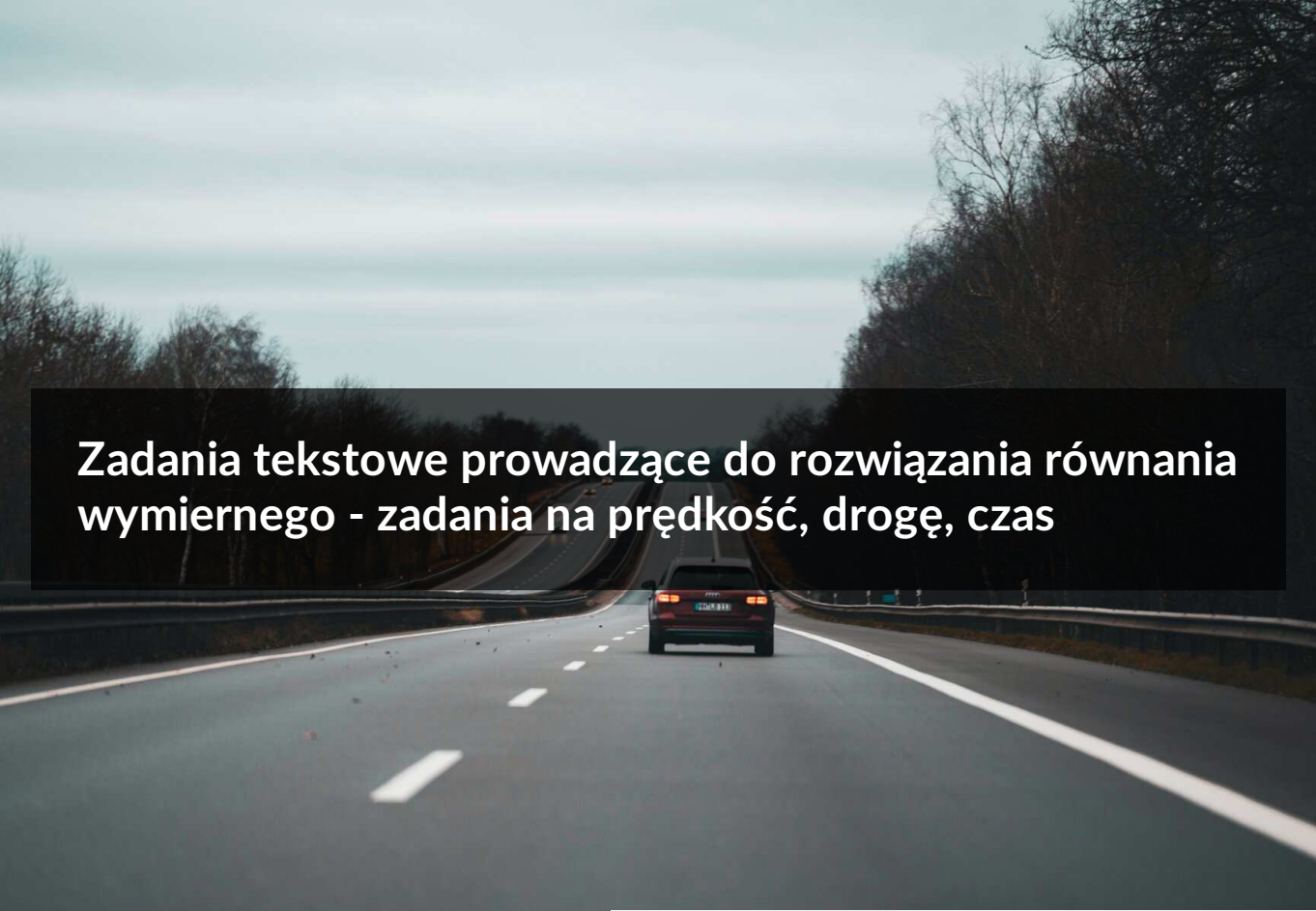




Zadania tekstowe prowadzące do rozwiązania równania wymiernego - zadania na prędkość, drogę, czas

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Zadania tekstowe prowadzące do rozwiązania równania wymiernego - zadania na prędkość, drogę, czas

Źródło: Omar Ram, dostępny w internecie: [www.unsplash.com](https://www.unsplash.com).

Wyrażenia wymierne oraz równania wymierne znajdują szerokie zastosowanie w rozwiązywaniu problemów z życia codziennego. Jednym z takich zagadnień są problemy związane z zależnością pomiędzy drogą, prędkością a czasem. W materiale omówimy przykłady ciekawych zadań na prędkość, drogę i czas, które prowadzą do rozwiązania równania wymiernego.

Bazując na części teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

### Twoje cele

- Wykorzystasz zależność pomiędzy prędkością, drogą i czasem do rozwiązywania zadań tekstowych.
- Wyznaczysz rozwiązania zadań, w których występuje prędkość, droga, czas.
- Zapiszesz i rozwiążesz równania wymierne do zadań tekstowych dotyczących drogi, prędkości i czasu.
- Zastosujesz zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

# Przeczytaj

---

Analizując zależności występujące między różnymi wielkościami, spotykamy się również z takimi, w których występują wyrażenia wymierne, np. wartość prędkości średniej obliczamy jako iloraz drogi i czasu, w którym ta droga została przebyta.

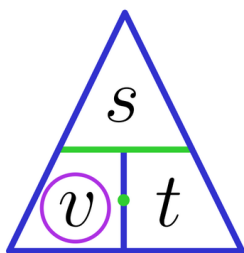
Jeżeli wprowadzimy następujące oznaczenia:

$v$  – prędkość wyrażona np. w  $\frac{km}{h}$ ,  $\frac{m}{s}$ ,  $\frac{km}{s}$ ,  $\frac{m}{h}$ ,

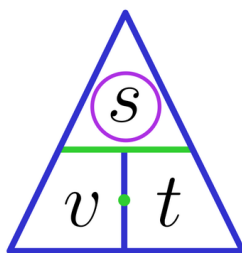
$s$  – droga, wyrażona np. w  $mm$ ,  $cm$ ,  $m$ ,  $km$ ,

$t$  – czas, wyrażony np. w  $s$ ,  $min$ ,  $h$ ,

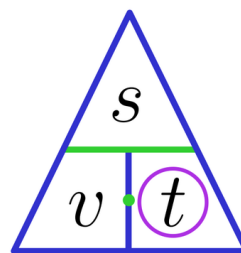
to korzystając z poniższych trójkątów otrzymujemy zależności między tymi wielkościami.



$$v = \frac{s}{t}$$



$$s = v \cdot t$$



$$t = \frac{s}{v}$$

Wymienione zależności pomiędzy drogą, prędkością i czasem wykorzystamy w rozwiązywaniu zadań tekstowych, które sprowadzają się do rozwiązywania [równania wymiernego](#).

## Przykład 1

Samochód jadący z pewną prędkością pokonał odległość 300 km. Samochód jadący z prędkością o  $15 \frac{km}{h}$  mniejszą pokonał w tym samym czasie 240 km. Obliczmy średnie prędkości, z jakimi poruszały się samochody.

## Rozwiązanie

Niech  $v \left[ \frac{km}{h} \right]$  będzie prędkością pierwszego samochodu.

Ponieważ czas przejazdu w obu przypadkach jest taki sam, zatem w celu wyznaczenia wartości  $v$  rozwiązujemy równanie:

$$\frac{300}{v} = \frac{240}{v-15}, \text{ gdzie } v \in (15, \infty)$$

$$300 \cdot (v - 15) = 240v$$

$$300v - 4500 = 240v$$

$$60v = 4500$$

$$v = 75 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$75 \frac{\text{km}}{\text{h}} - 15 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Zatem prędkości samochodów wynosiły odpowiednio  $75 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  oraz  $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ .

## Przykład 2

Kierowca samochodu zaplanował w jakim czasie, jadąc z określoną prędkością pokona trasę długości 60 km. W trakcie jazdy zatrzymał się na 9 min. Aby zmieścić się w zaplanowanym czasie, kierowca samochodu musi zwiększyć prędkość jazdy o  $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Obliczymy, jaką prędkość zaplanował kierowca.

## Rozwiązanie

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$v$  – zaplanowana prędkość  $[\frac{\text{km}}{\text{h}}]$

$t$  – zaplanowany czas [h]

Wiadomo, że  $v, t > 0$  oraz

$$9 \text{ min} = \frac{9}{60} \text{ h} = \frac{3}{20} \text{ h}$$

W celu obliczenia prędkości  $v$  rozwiązujemy równanie:

$$\frac{60}{v+20} + \frac{3}{20} = \frac{60}{v}$$

$$60 \cdot 20 \cdot v + 3 \cdot v \cdot (v + 20) = 60 \cdot 20 \cdot (v + 20)$$

$$1200v + 3v^2 + 60v = 1200v + 24000$$

$$3v^2 + 60v - 24000 = 0$$

$$v^2 + 20v - 8000 = 0$$

$$v_1 = \frac{-20-180}{2} = -100 < 0$$

$$v_2 = \frac{-20+180}{2} = 80 > 0$$

Zatem zaplanowana prędkość wynosiła  $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ .

### Ważne!

Jeżeli na drodze długości  $s$  samochód przebył pierwszy odcinek długości  $s_1$  z prędkością samochodu  $v_1$  w czasie  $t_1$  i drugi odcinek długości  $s_2$  z prędkością samochodu  $v_2$  w czasie  $t_2$ , to wartość średniej prędkości na tej drodze obliczamy ze wzoru:

$$v_{sr} = \frac{s}{t_1+t_2} = \frac{s}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}}$$

### Przykład 3

Samochód przebył pierwszą połowę drogi ze średnią prędkością samochodu  $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ , a średnia prędkość samochodu na całej trasie wyniosła  $75 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Obliczymy średnią prędkość samochodu na drugiej połowie trasy.

### Rozwiązanie

Niech  $s$  [km] będzie długością trasy, jaką przebył samochód.

Przedstawmy sytuację z zadania w poniższej tabeli.

	Droga	Prędkość
I część trasy	$\frac{1}{2}s$ [km]	$60 \left[ \frac{\text{km}}{\text{h}} \right]$
II część trasy	$\frac{1}{2}s$ [km]	$v \left[ \frac{\text{km}}{\text{h}} \right]$

Ponieważ średnia prędkość na całej trasie wynosiła  $75 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ , zatem do obliczenia wartości  $v$  rozwiązujemy równanie:

$$75 = \frac{s}{\frac{\frac{1}{2}s}{60} + \frac{\frac{1}{2}s}{v}}$$

$$75 = \frac{s}{\frac{s}{120} + \frac{s}{2v}}$$

$$75 = \frac{1}{\frac{1}{120} + \frac{1}{2v}}$$

$$75 = \frac{1}{\frac{v}{120v} + \frac{60}{120v}}$$

$$75 = \frac{120v}{v+60}$$

$$75 \cdot (v + 60) = 120v$$

$$75v + 4500 = 120v$$

$$45v = 4500$$

$$v = 100$$

Zatem średnia prędkość samochodu na drugim odcinku trasy wynosiła  $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ .

#### Przykład 4

Motorówka, płynąc z prądem rzeki przepływa drogę długości 20 km w ciągu 40 min. Obliczymy prędkość prądu rzeki, jeżeli motorówka płynie z prędkością własną  $36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ .

#### Rozwiązanie

Niech  $v \left[ \frac{\text{km}}{\text{h}} \right]$  będzie prędkością prądu rzeki.

$$20 \text{ min} = \frac{20}{60} \text{ h} = \frac{1}{3} \text{ h}$$

Zatem do obliczenia prędkości  $v$  rozwiązujemy równanie:

$$\frac{1}{3} = \frac{20}{v+36}$$

$$v + 36 = 3 \cdot 20, \text{ czyli } v = 24$$

Wobec tego prędkość prądu rzeki wynosi  $24 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ .

#### Przykład 5

Dwaj rowerzyści wyjechali równocześnie na trasę długości 40 km. Prędkość, z jaką poruszał się drugi rowerzysta była o  $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  większa niż prędkość, z jaką poruszał się pierwszy rowerzysta, więc pokonał on trasę w czasie o 20 min krótszym niż pierwszy. Obliczymy średnie prędkości jazdy obu rowerzystów.

#### Rozwiązanie

Wiadomo, że  $20 \text{ min} = \frac{1}{3} \text{ h}$ .

Przedstawmy za pomocą tabeli sytuację opisaną w zadaniu.

	Prędkość	Czas
I rowerzysta	$v \left[ \frac{\text{km}}{\text{h}} \right]$	$t \text{ [h]}$
II rowerzysta	$(v + 4) \left[ \frac{\text{km}}{\text{h}} \right]$	$(t - \frac{1}{3}) \text{ [h]}$

Zauważmy, że  $v > 0$  oraz  $t > \frac{1}{3}$ .

W celu obliczenia wielkości  $v$  rozwiązujemy równanie:

$$\frac{40}{v+4} + \frac{1}{3} = \frac{40}{v}$$

$$40 \cdot 3 \cdot v + 1 \cdot (v + 4) \cdot v = 40 \cdot 3 \cdot (v + 4)$$

$$120v + v^2 + 4v = 120v + 480$$

$$v^2 + 4v - 480 = 0$$

$$\Delta = 16 + 4 \cdot 480 = 1936$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{1936} = 44$$

$$v_1 = \frac{-4-44}{2} = -24 < 0$$

$$v_2 = \frac{-4+44}{2} = 20 > 0$$

Wobec tego prędkości jazdy rowerów wynoszą odpowiednio:

$$v = 20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$v \frac{\text{km}}{\text{h}} + 4 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 24 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

## Słownik

**równanie wymierne**

równanie postaci

$$\frac{W(x)}{P(x)} = 0$$

gdzie:

$W(x)$  i  $P(x) \neq 0$  – są wielomianami i  $P(x)$  jest wielomianem przynajmniej stopnia pierwszego

# Animacja

---

## Polecenie 1

Obejrzyj animację dotyczącą rozwiązywania zadań tekstowych prowadzących do równania wymiernego, związanych z drogą, prędkością i czasem.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DyKPdpAgL>

Film nawiązujący do treści materiału

---

## Polecenie 2

Samochód jadący ze stałą prędkością pokonał odległość 225 km. Samochód jadący ze stałą prędkością o  $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  większą pokonał w tym samym czasie drogę długości 300 km.

- a) Oblicz prędkości, z jakimi poruszały się oba samochody.
- b) Oblicz czas, w jakim każdy z samochodów przebył podaną drogę.

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



## Ćwiczenie 2



## Ćwiczenie 3



## Ćwiczenie 4



## Ćwiczenie 5



Samochód przebył trzecią część trasy ze średnią prędkością  $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ , a średnia prędkość samochodu na całej trasie wyniosła  $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Oblicz średnią prędkość samochodu na drugiej części trasy.

## Ćwiczenie 6



Dwa samochody wyruszyły jednocześnie z tego samego miasta. Po pewnym czasie pierwszy samochód znajdował się w odległości 320 km, a drugi w odległości 260 km. Średnia prędkość drugiego samochodu była o  $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  mniejsza od prędkości pierwszego. Oblicz średnie prędkości z jakimi poruszały się te samochody.

## Ćwiczenie 7



Dwaj turyści wyruszyli równocześnie na trasę długości 12 km. Prędkość, z jaką poruszał się pierwszy turysta była o  $1 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  większa niż prędkość, z jaką poruszał się drugi turysta, więc pokonał on trasę w czasie o 36 min krótszym niż drugi. Oblicz prędkości, z jakimi poruszali się obaj turyści.

## Ćwiczenie 8



Motocyklista miał przebyć drogę długości 30 km w pewnym czasie ze stałą prędkością. W trakcie jazdy postanowił zatrzymać się na 15 min. Aby zmieścić się w zaplanowanym czasie, kierowca samochodu musiał zwiększyć prędkość o  $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Oblicz, z jaką zaplanowaną prędkością miał jechać motocyklista.

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Tomasz Wójtowicz

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Zadania tekstowe prowadzące do rozwiązania równania wymiernego - zadania na prędkość, drogę, czas

**Grupa docelowa:**

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

Treści nauczania - wymagania szczegółowe:

III. Równania i nierówności. Zakres rozszerzony. Uczeń

2) rozwiązuje równania i nierówności wymierne nie trudniejsze niż

$$\frac{x+1}{x(x-1)} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{2x}{(x+1)(x-1)}.$$

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- wykorzystuje zależność pomiędzy prędkością, drogą i czasem do rozwiązywania zadań tekstowych;
- wyznacza rozwiązania zadań, w których występuje prędkość, droga, czas;
- zapisuje i rozwiązuje równania wymierne do zadań tekstowych dotyczących drogi, prędkości i czasu;
- stosuje zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

## **Metody i techniki nauczania:**

- dyskusja;
- burza mózgów;
- metoda kota i myszy;
- praca z ekspertem.

## **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

## **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- telefony z dostępem do internetu.

## **Przebieg lekcji**

### **Faza wstępna:**

1. Przybliżenie przez nauczyciela tematu: „Zadania tekstowe prowadzące do rozwiązania równania wymiernego – zadania na prędkość, drogę, czas” i celów lekcji. Określenie wiążących dla uczniów kryteriów sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

### **Faza realizacyjna:**

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Ekspersi proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Animacja”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych ćwiczeń, omawiając je wraz z uczniami.
4. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia

jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.

5. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia numer 6, 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się” metodą kot i mysz. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po dwóch nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej – role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem – procedura się powtarza.

### **Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

### **Praca domowa:**

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Zadania tekstowe prowadzące do rozwiązania równania wymiernego – zadania na prędkość, drogę, czas”).

### **Materiały pomocnicze:**

- [Rozwiązywanie równań wymiernych.](#)

### **Wskazówki metodyczne:**

- Nauczyciel może wykorzystać animację do realizacji tematu „Dziedzina równania wymiernego” lub do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, aby móc samodzielnie rozwiązać zadania tekstowe dotyczące drogi, prędkości i czasu, których rozwiązania prowadzą do równania wymiernego.