



Liczenie liczb

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Źródło: Pexels, dostępny w internecie: <https://pexels.com/>.

J. Tuwim, Rachunek (fragment), z tomiku
Wiersze zebrane, (1935)

“ Liczą mnie jacyś przez noc całą,
Piszą i piszą, a wciąż mało...
Skacze pokraczny szyfr.
Już jestem słaby i zmęczony,
Piszą biliony, kwadryliony,
Roi się szereg nieskończony
Cyfr...

Wokół wszyscy liczą i liczą – czas, pieniądze,
średnią ocen, dni do wakacji...



portret Juliana Tuwima, Stanisław Ignacy
Witkiewicz, 1929

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org,
domena publiczna.

W tym materiale też będziemy liczyć – tym razem nic innego, tylko liczby. Liczenie liczb może wydać Ci się nieco dziwne, więc potraktuj proponowane tu zadania jako powtórzenie wiadomości z kombinatoryki i wprawka przed zadaniami z rachunku prawdopodobieństwa.

Twoje cele

- Określisz liczbę liczb spełniających dane warunki.
- Wykorzystasz aparat kombinatoryczny do wyznaczania liczby zdarzeń elementarnych w doświadczeniach „z liczbami”.
- Stworzysz model matematyczny problemu z kontekstem realistycznym.

Przeczytaj

Chcąc określić liczbę wszystkich wyników doświadczenia losowego „na tworzenie liczb spełniających określone warunki” lub chcąc określić liczbę zdarzeń sprzyjających danemu zdarzeniu w doświadczeniu związanym z liczbami, najczęściej korzystamy ze wzorów kombinatorycznych, które przypominamy poniżej.

Wzory kombinatoryczne	
Opis wzoru	Wzór
Liczba permutacji zbioru n -elementowego.	$P_n = n!$
Liczba k -elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru n -elementowego.	$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
Liczba k -elementowych wariacji z powtórzeniami zbioru n -elementowego.	$W_n^k = n^k$
Liczba k -elementowych kombinacji zbioru n -elementowego.	$C_n^k = \binom{n}{k}$

Przykład 1

Zapoznaj się z filmem, który pokazuje jak można wykorzystać permutacje do zliczania ilości liczb spełniających określone warunki.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D14ojd2sq>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego liczenia liczb.

W następnym przykładzie skorzystamy z reguły mnożenia.

Reguła: mnożenia

Jeżeli wynik pewnego doświadczenia losowego zależy od kolejno podejmowanych m decyzji, to liczba wszystkich różnych wyników tych decyzji jest równa

$$w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_m,$$

gdzie:

$w_k, (1 \leq k \leq m)$ – liczba możliwości wyboru przy podejmowaniu decyzji k .

Przykład 2

Obliczymy ile jest liczb pięciocyfrowych w których cyfry:

- a. nie mogą się powtarzać,
- b. mogą się powtarzać.

Rozwiązanie:

- a. Liczbą pięciocyfrową można traktować jako pięciowyrazowy ciąg utworzony ze zbioru dziesięciu cyfr.

Wszystkich takich liczb jest więc:

$$V_{10}^5 = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10!}{5!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$$

Wśród rozważanych ciągów są też takie, które mają na początku 0.

$$V_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$$

Zatem wszystkich liczb czterocyfrowych o niepowtarzających się cyfrach jest $30240 - 3024 = 27216$.

- b. Chcąc utworzyć liczbę czterocyfrową, w której cyfry mogą się powtarzać, mamy 9 sposobów wyboru cyfry jedności tysięcy (cyfrą jedności tysięcy nie może być zero). Na każdym z pozostałych miejsc może stać jedna z dziesięciu cyfr.

Korzystamy z [reguły mnożenia](#) i wyznaczmy liczbę liczb:

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000$$

Odpowiedź:

Liczb pięciocyfrowych o niepowtarzających się cyfrach jest 27216, a o powtarzających się cyfrach jest 90000.

Przykład 3

W dwóch koszykach znajdują się karteczki, na których zapisane są cyfry.

W pierwszym koszyku są karteczki z cyframi 1, 2, 3. W drugim koszyku są karteczki z cyframi: 4, 5, 6, 7, 8.

Losujemy dwie karteczki z pierwszego koszyka i trzy z drugiego. Z wylosowanych cyfr układamy liczby pięciocyfrowe. Obliczymy, ile można utworzyć takich liczb.

Rozwiązanie:

Z pierwszego koszyka losujemy dwie cyfry spośród trzech (kolejność losowania nie ma znaczenia):

$$\binom{3}{2} = 3$$

Z drugiego koszyka losujemy trzy cyfry spośród pięciu (kolejność losowania nie ma znaczenia):

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$$

Mamy teraz pięć karteczek na których zapisane są różne cyfry.

Mamy

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

możliwości utworzenia liczb pięciocyfrowych.

Korzystamy z **reguły mnożenia** i obliczamy ile jest wszystkich możliwości utworzenia liczb spełniających warunki zadania.

$$3 \cdot 10 \cdot 120 = 3600$$

Odpowiedź:

Można utworzyć 3600 liczb spełniających warunki zadania.

Przykład 4

Obliczymy, ile jest wszystkich liczb naturalnych dziewięciocyfrowych, w zapisie dziesiętnym których nie występuje zero, występują dokładnie trzy jedynki, dwie dwójki, a pozostałe cyfry nie mogą się powtarzać.

Rozwiązanie:

Najpierw wybieramy trzy miejsca spośród dziewięciu dla jedynek.

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{6} = 84$$

Dwie dwójki można ustawić na

$$9 - 3 = 6 \text{ miejscach.}$$

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

Pozostały nam jeszcze

$$9 - 3 - 2 = 4 \text{ miejsca.}$$

Na tych miejscach możemy rozmieścić pozostałych siedem cyfr (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) na

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840 \text{ sposobów.}$$

Zatem wszystkich liczb jest więc

$$84 \cdot 15 \cdot 840 = 1058400.$$

Odpowiedź:

Jest 1058400 liczb spełniających warunki zadania.

Przykład 5

W ostatnim przykładzie pokazemy zastosowania wariacji z powtórzeniami do wyznaczania liczby liczb spełniających określone warunki.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D14ojd2sq>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczący liczenia liczb.

Słownik

reguła mnożenia

jeżeli wynik pewnego doświadczenia losowego zależy od kolejno podejmowanych m decyzji, to liczba wszystkich różnych wyników tych decyzji jest równa

$$w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_m,$$

gdzie:

w_k , $(1 \leq k \leq m)$ – liczba możliwości wyboru przy podejmowaniu decyzji k

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych. Spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązać przedstawione tam zadanie, a dopiero następnie porównaj z rozwiązaniem.

Obliczymy, ile jest liczb naturalnych ośmiocyfrowych takich, że iloczyn cyfr w ich zapisie dziesiętnym jest równy 18.

Sytuacja 1 $18 = 3 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

Sytuacja 2 $18 = 2 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

Sytuacja 3 $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

1. Obliczymy, ile jest liczb naturalnych ośmiocyfrowych takich, że iloczyn cyfr w ich zapisie dziesiętnym jest równy 18.

Sytuacja 1 $18 = 3 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

Sytuacja 2 $18 = 2 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

Sytuacja 3 $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

1. {audio}Zauważmy, że liczbę 18 możemy zapisać na trzy sposoby, jako iloczyn ośmiu liczb jednocyfrowych. Rozważymy więc trzy sytuacje.

Polecenie 2

Oblicz, ile można utworzyć liczb nieparzystych czterocyfrowych o różnych cyfrach z cyfr 1, 3, 4, 6.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 6 lub przez 15? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 60

☐ 150

☐ 210

☐ 180

Ćwiczenie 2



Ile jest liczb naturalnych dziesięciocyfrowych w zapisie dziesiętnym których tylko pierwsza cyfra jest parzysta, a pozostałe cyfry są nieparzyste? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $4 \cdot 9^5$

☐ $5 \cdot 4^9$

☐ $5 \cdot 9^4$

☐ $4 \cdot 5^9$

Ćwiczenie 3



W koszu jest tyle piłeczek, ile jest liczb naturalnych pięciocyfrowych o różnych cyfrach podzielnych przez 5. Przeciągnij poprawną odpowiedź.

W koszu jest piłeczek.

3024

5712

15120

2688

Ćwiczenie 4



Rozpatrujemy wszystkie liczby naturalne dziesięciocyfrowe w zapisie dziesiętnym których występują tylko cyfry 7, 8, 9, przy czym cyfra 7 występuje dokładnie cztery razy. Oblicz, ile jest takich liczb. Uzupełnij obliczenia, przeciągając odpowiednie liczby.

Miejsce dla cyfry 7 można wybrać na sposobów.

Na pozostałych miejscach można wpisać jedną z pozostałych dwóch cyfr.

Tych możliwości jest .

Wszystkich takich liczb dziesięciocyfrowych jest .

6^2

$\binom{10}{4}$

13440

15360

2

2^6

$\binom{10}{7}$

$\binom{3}{1}$

6

Ćwiczenie 5



Oblicz, ile jest liczb naturalnych dodatnich mniejszych od 1001 podzielnych przez 3, ale niepodzielnych przez 5.

Uzupełnij rozwiązanie zadania, wpisując odpowiednie liczby naturalne.

Niech A będzie zbiorem liczb naturalnych dodatnich mniejszych od 1001 podzielnych przez 3.

Niech B będzie zbiorem liczb naturalnych dodatnich mniejszych od 1001 podzielnych przez 5.

Niech C będzie zbiorem liczb naturalnych dodatnich mniejszych od 1001 podzielnych przez 3, ale niepodzielnych przez 5.

Wtedy:

$$|A| = \boxed{}$$

$$|B| = \boxed{}$$

Zbiór $A \cap B$ składa się z liczb podzielnych przez $\boxed{}$.

$$|A \cap B| = \boxed{}$$

$$|C| = |A| \setminus |A \cap B| = \boxed{} - \boxed{} = \boxed{}$$

Ćwiczenie 6



Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy kolejno ze zwracaniem trzy liczby. Zaznacz, czy dane zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Jest 13 możliwości wylosowania takiej trójki liczb, która utworzy ciąg arytmetyczny o różnicy, będącej liczbą całkowitą.	☐	☐
Jest 10 możliwości wylosowania takiej trójki liczb, która utworzy ciąg arytmetyczny malejący o różnicy, będącej liczbą całkowitą.	☐	☐
Jest 6 możliwości wylosowania takiej trójki liczb, która utworzy ciąg geometryczny o ilorazie, będącym liczbą naturalną dodatnią.	☐	☐

Ćwiczenie 7



Oblicz, ile jest liczb naturalnych sześciocyfrowych, których suma cyfr jest równa 3.

Ćwiczenie 8



Oblicz, ile jest liczb trzycyfrowych, które w dzieleniu przez 7 dają resztę 4.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Liczenie liczb

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XI. Kombinatoryka. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa liczbę liczb spełniających dane warunki;
- wykorzystuje aparat kombinatoryczny do wyznaczania liczby zdarzeń elementarnych w doświadczeniach „z liczbami”;
- tworzy model matematyczny problemu z kontekstem realistycznym.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- domino;
- kula śniegowa.

Formy pracy:

- praca w grupach;
- praca w parach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer.

Przebieg lekcji**Faza wstępna:**

1. Uczniowie metodą domina (kostki domina przygotowuje wcześniej nauczyciel) powtarzają wzory kombinatoryczne.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują metodą kuli śniegowej.
2. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z materiałem z sekcji „Przeczytaj”, a następnie w parach zapoznają się z filmem samouczkiem. Wymieniają się pozyskanymi informacjami.
3. Pary łączą się w czwórki, a następnie w ósemki i wspólnie ustalają algorytm rozwiązywania zadań na wyznaczanie liczby liczb spełniających określone warunki.
4. Korzystając z ustalonego algorytmu, uczniowie wspólnie rozwiązują ćwiczenia 5 – 8.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wykonanie ćwiczeń interaktywnych 1 – 4 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Zliczanie obiektów z podziałem na etapy \(cyfry w liczbach\)](#)

Wskazówki metodyczne:

Film samouczek można wykorzystać na zajęciach poświęconych określaniu liczby zdarzeń sprzyjających danemu zdarzeniu.