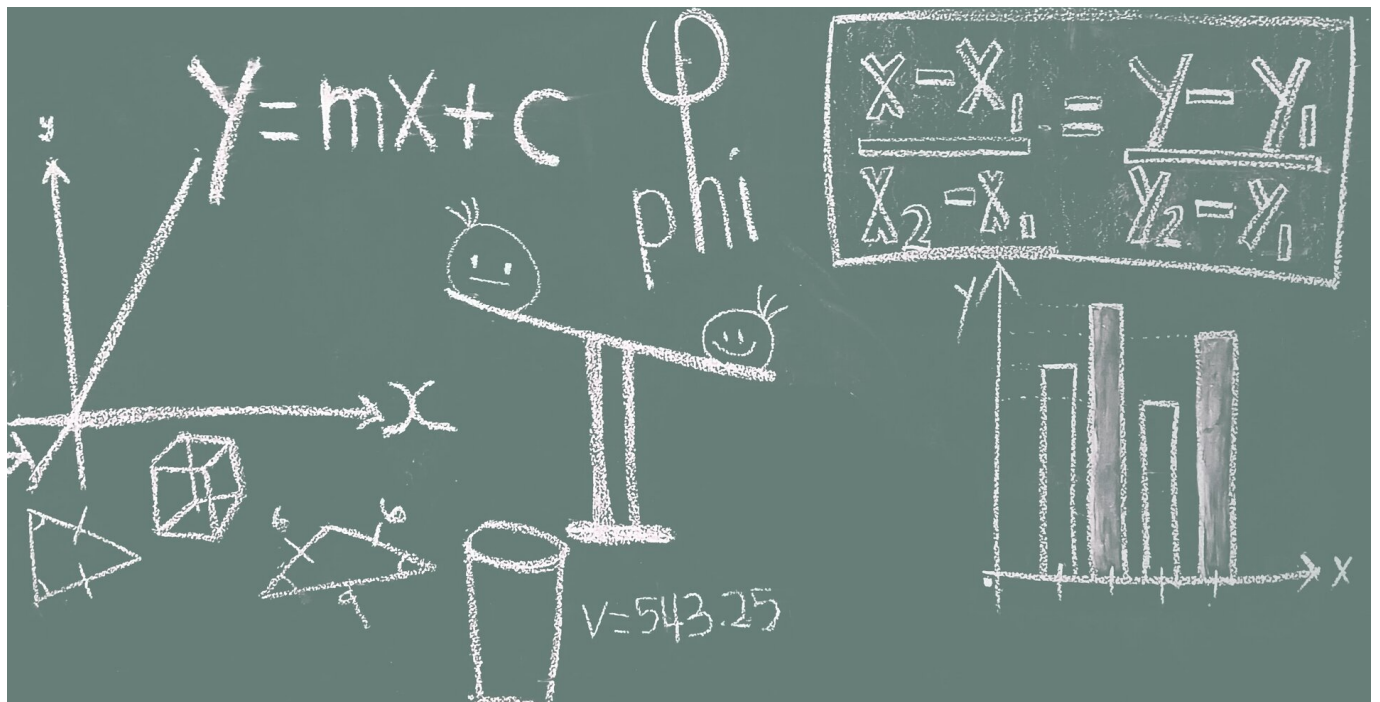
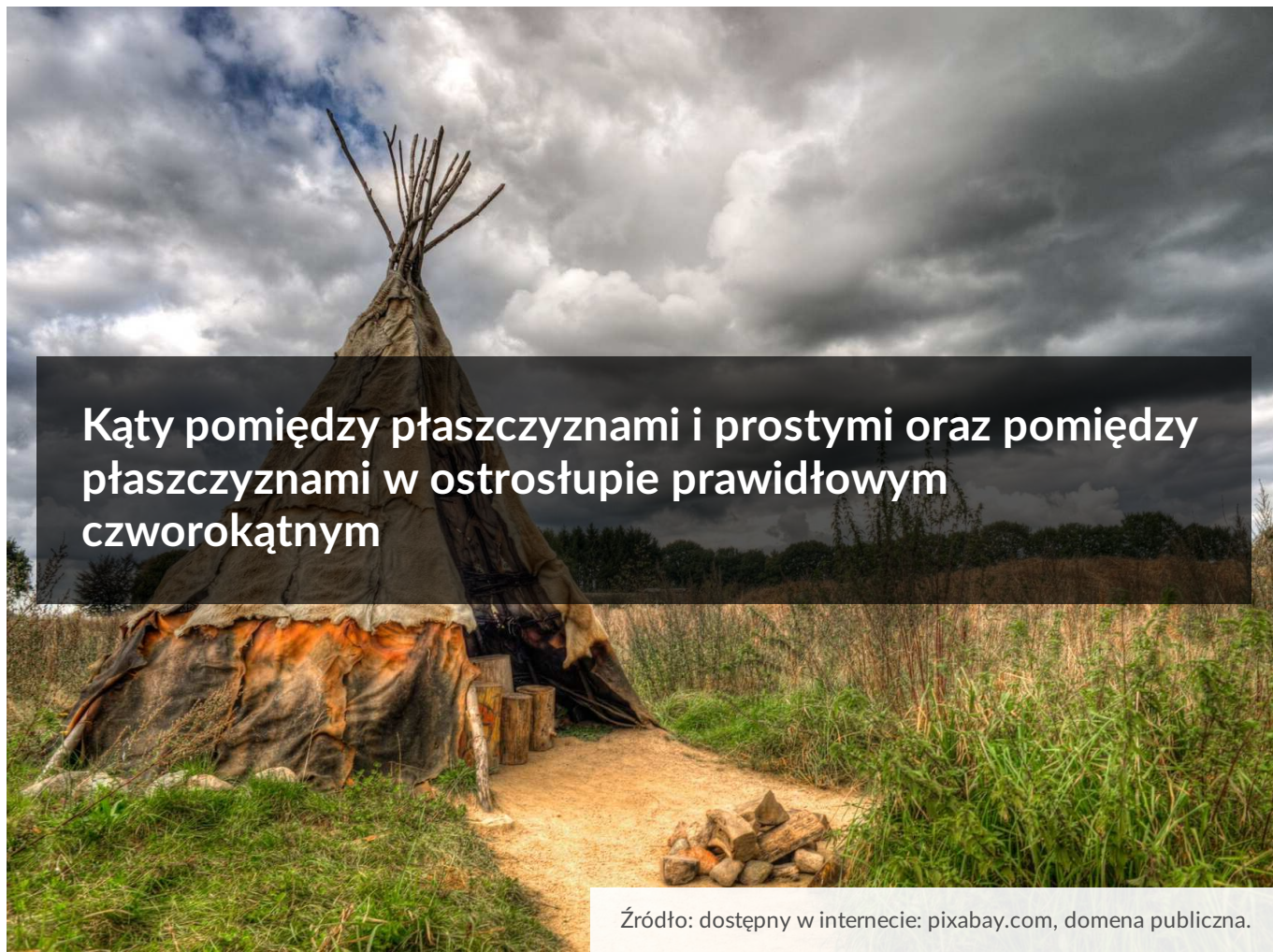




Kąty pomiędzy płaszczyznami i prostymi oraz pomiędzy płaszczyznami w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Czy będąc małym dzieckiem marzyłeś o wigwamie lub tipi? Budowałeś namioty z koców i patyków lub kijów od szczotki? W XXI w. producenci spełniają każde marzenie dziecka. Dziś niejeden kilkulatek ma w domu własne tipi w kształcie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego.

Dziś sprzedawane są już zmontowane, ponieważ niejeden tata miał problem z rozstawieniem go w pokoju dziecięcym. A wystarczyłoby uważać na lekcjach stereometrii i wiedzieć, że kijki należy ustawić pod odpowiednim kątem do podłoża i związać na tej samej wysokości.



Źródło: dostępny w internecie: www.pixabay.com.

Twoje cele

- Nazwiesz kąty pomiędzy płaszczyznami oraz prostymi i pomiędzy płaszczyznami w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym.

- Wskażesz kąty pomiędzy płaszczyznami oraz prostymi i pomiędzy płaszczyznami w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym.
- Obliczysz miary kątów pomiędzy płaszczyznami oraz prostymi i pomiędzy płaszczyznami w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym.
- Pogrupujesz kąty w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym według rodzajów.
- Przeanalizujesz związki między różnymi typami kątów w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym.

Przeczytaj

Potrafisz już wskazać, nazwać i obliczyć długości odcinków w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym. Umiejętność ta będzie bardzo przydatna przy zagadnieniach omawianych w tym temacie.

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym mamy dwa rodzaje ścian:

- podstawa, która jest kwadratem,
- ściany boczne, które są przystającymi trójkątami równoramiennymi.

Poniżej omówimy dwa rodzaje kątów między płaszczyznami i prostymi:

- kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy,
- kąt nachylenia wysokości do ściany bocznej.

oraz dwa rodzaje kątów pomiędzy płaszczyznami:

- kąt pomiędzy płaszczyzną ściany bocznej i płaszczyzną podstawy,
- kąt pomiędzy płaszczyznami sąsiednich ścian bocznych.

Kąt nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego do płaszczyzny podstawy

Kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy jest kątem pomiędzy krawędzią boczną a przekątną podstawy.

Aby obliczyć jego miarę wykorzystuje się trójkąt prostokątny, którego bokami są wysokość ostrosłupa, połowa przekątnej i krawędź boczna.

Przykład 1

Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa $4\sqrt{2}$, a wysokość bryły ma długość 8.

Obliczymy kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy w tym ostrosłupie.

Przekątna podstawy ma długość

$$d = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 8$$

Stąd $\frac{d}{2} = 4$.

Korzystając z funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym AEH otrzymujemy $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{4} = 2$.

Z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych mamy $\alpha \approx 63^\circ$.

Przykład 2

Wróćmy do tipi budowanego we wprowadzeniu. Pod jakim kątem należy ustawić kijki tipi, którego podstawa jest kwadrat o boku 120 cm, jeżeli kije zostają ze sobą związane na wysokości 170 cm?

Przekątna podstawy ma długość $d = 1,2\sqrt{2}$ m zatem $\frac{d}{2} = 0,6\sqrt{2}$ m.

Korzystając z funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym $\cos \alpha = \frac{0,6\sqrt{2}}{1,7} \approx 0,5$, a zatem $\alpha \approx 60^\circ$.

Kąt nachylenia wysokości ostrosłupa prawidłowego czworokątnego do płaszczyzny ściany bocznej

Kąt nachylenia wysokości ostrosłupa do ściany bocznej, to kąt pomiędzy wysokością ostrosłupa, a wysokością ściany bocznej poprowadzoną z wierzchołka ostrosłupa.

Do obliczenia miary tego kąta wykorzystujemy trójkąt prostokątny, którego bokami są wysokość ostrosłupa, wysokość ściany bocznej oraz odcinek łączący spodek wysokości ze środkiem krawędzi podstawy.

Przykład 3

Obliczymy tangens kąta nachylenia wysokości do ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy 6 i krawędzi bocznej 9.

Obliczymy długość wysokości ściany bocznej poprowadzonej z wierzchołka E korzystając z Twierdzenia Pitagorasa

$$3^2 + h^2 = 9^2$$

A zatem

$$h^2 = 72 \text{ i stąd } h = 6\sqrt{2}.$$

Obliczymy teraz długość wysokości ostrosłupa

$$H^2 + 3^2 = (6\sqrt{2})^2$$

$$\text{Czyli } H^2 = 63, \text{ a stąd } H = 3\sqrt{7}.$$

$$\text{Ostatecznie } \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{3\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

Kąt pomiędzy ścianą boczną, a płaszczyzną podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego

Kąt pomiędzy ścianą boczną, a płaszczyzną podstawy w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym jest kątem pomiędzy wysokością ściany bocznej poprowadzonej z wierzchołka ostrosłupa, a odcinkiem łączącym spodek wysokości ze środkiem krawędzi podstawy.

W obliczeniach wykorzystujemy ten sam trójkąt prostokątny, co w poprzednim przypadku.

Przykład 4

Kąt pomiędzy wysokością ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, a ścianą boczną ma miarę 23° . Jaką miarę ma kąt pomiędzy ścianą boczną a płaszczyzną podstawy?

Kąt nachylenia wysokości do ściany bocznej oraz kąt pomiędzy ścianą boczną, a płaszczyzną podstawy są kątami ostrymi tego samego trójkąta prostokątnego.

A zatem kąt pomiędzy ścianą boczną, a płaszczyzną podstawy ma miarę $\alpha = 90^\circ - 23^\circ = 67^\circ$.

Ważne!

Suma miary kąta nachylenia wysokości do ściany bocznej oraz kąta pomiędzy ścianą boczną i płaszczyzną podstawy wynosi 90° .

Kąt pomiędzy ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego

Kąt pomiędzy ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego, to kąt pomiędzy wysokościami tych ścian poprowadzonymi z wierzchołków podstawy ostrosłupa na wspólną krawędź boczną.

Zauważmy, że trójkąt DGB jest równoramienny, a bok DB tego trójkąta jest przekątną podstawy ostrosłupa.

Przykład 5

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 2, a krawędź boczna 4. Oblicz sinus kąta pomiędzy ścianami bocznymi tego ostrosłupa.

Zróbmy rysunek pomocniczy.

Ściany boczne są trójkątami równoramiennymi.

Obliczmy, korzystając z Twierdzenia Pitagorasa, wysokość trójkąta DCE poprowadzoną z wierzchołka E :

$$1^2 + h^2 = 4^2$$

$$\text{Stąd } h = \sqrt{15}.$$

Pole trójkąta DCE wynosi zatem

$$P = \frac{2\sqrt{15}}{2} = \sqrt{15}$$

Pole tego trójkąta można policzyć również ze wzoru

$$P = \frac{|CE| \cdot |DG|}{2}$$

$$\text{Czyli } \sqrt{15} = \frac{4 \cdot |DG|}{2}.$$

$$\text{Mamy już zatem długość } |DG| = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

$$\text{Ponadto } |DB| = 2\sqrt{2}.$$

Skorzystajmy z twierdzenia cosinusów:

$$|DB|^2 = |DG|^2 + |BG|^2 - 2 \cdot |DG| \cdot |BG| \cdot \cos(\sphericalangle BGD)$$

$$8 = \frac{15}{4} + \frac{15}{4} - 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \cos(\sphericalangle BGD)$$

$$\frac{15}{2} \cdot \cos(\sphericalangle BGD) = -\frac{1}{2}$$

A zatem

$$\cos(\sphericalangle BGD) = -\frac{1}{15}$$

Oznacza to, że kąt pomiędzy ścianami bocznymi tego ostrosłupa jest rozwarty.

Korzystając z “jedyńki trygonometrycznej” $\sin^2(\sphericalangle BGD) = \frac{224}{225}$, a sinus kąta rozwartego jest dodatni.

A zatem

$$\sin(\sphericalangle BGD) = \frac{4\sqrt{14}}{15}.$$

Słownik

kąt nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego do płaszczyzny podstawy

kąt pomiędzy krawędzią boczną, a przekątną podstawy

kąt nachylenia wysokości ostrosłupa prawidłowego czworokątnego do płaszczyzny ściany bocznej

kąt pomiędzy wysokością ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, a wysokością ściany bocznej poprowadzonej z wierzchołka ostrosłupa

kąt pomiędzy ścianą boczną, a płaszczyzną podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego

kąt pomiędzy wysokością ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego poprowadzoną z wierzchołka ostrosłupa, a odcinkiem łączącym spodek wysokości ze środkiem krawędzi podstawy

kąt pomiędzy ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego

kąt pomiędzy wysokościami ścian bocznych poprowadzonymi z różnych wierzchołków podstawy na wspólną krawędź tych ścian

Aplet

Polecenie 1

Spójrz na ostrosłup prawidłowy czworokątny w aplecie. Poruszając myszą na ilustracji możesz zaobserwować poszczególne kąty w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym z różnej perspektywy. Przyjrzyj się im uważnie. Przeciągnij myszą, aby bryła zaczęła się obracać.



- ☐ kąty między płaszczyzną podstawy a ścianami bocznymi
- ☒ kąty nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy
- ☐ kąty nachylenia wysokości do ściany bocznej
- ☐ kąty między ścianami bocznymi

Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1E594IfZ>

Polecenie 2

Nazwij kąty, które pojawiają się w aplecie:

$\angle OME$, $\angle ECS$, $\angle SEN$, $\angle DBE$, $\angle ENS$, $\angle CAE$, $\angle SDE$, $\angle MES$, $\angle EOS$.

Polecenie 3

Podaj przykłady par kątów (spośród poznanych dziś typów) w ostrosłupie przedstawionym w aplecie, których suma wynosi 90° .

Sprawdź się

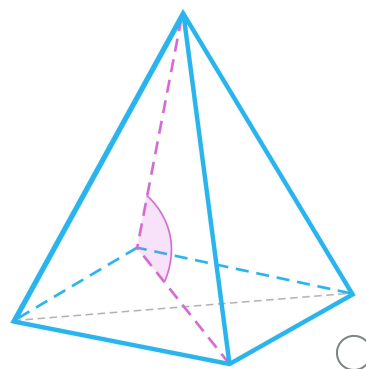
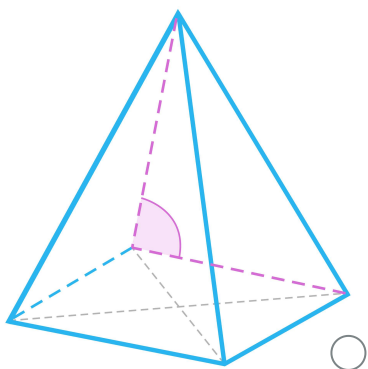
Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1

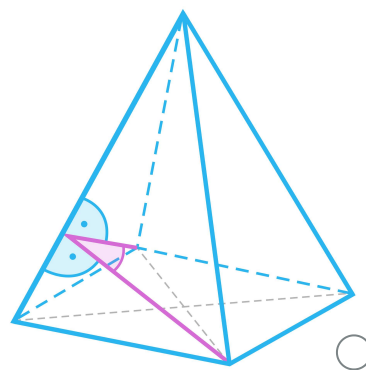
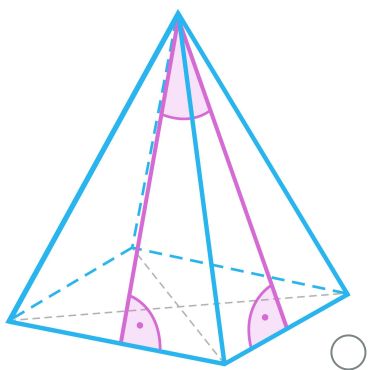


Ostrosłupy na rysunkach są prawidłowe. Wybierz właściwą ilustrację graficzną podanego kąta.

Kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.



Kąt pomiędzy sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego.



Ćwiczenie 2



Uzupełnij luki w tekście jednym z wymienionych określeń. Przeciągnij odpowiednie określenia w poprawne miejsca.

Kąt nachylenia wysokości ostrosłupa prawidłowego do ściany bocznej, jest kątem pomiędzy wysokością ostrosłupa a .

Kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest kątem pomiędzy krawędzią boczną a .

Kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi w ostrosłupie prawidłowym jest kątem pomiędzy poprowadzonymi na tę samą krawędź boczną.

krawędzią podstawy

wysokością ściany bocznej wychodzącą z wierzchołka ostrosłupa

przekątną podstawy

wysokością ściany bocznej wychodzącą z wierzchołka ostrosłupa

wysokościami ścian bocznych wychodzącymi z wierzchołka ostrosłupa

krawędzią boczną

krawędzią boczną i krawędzią podstawy

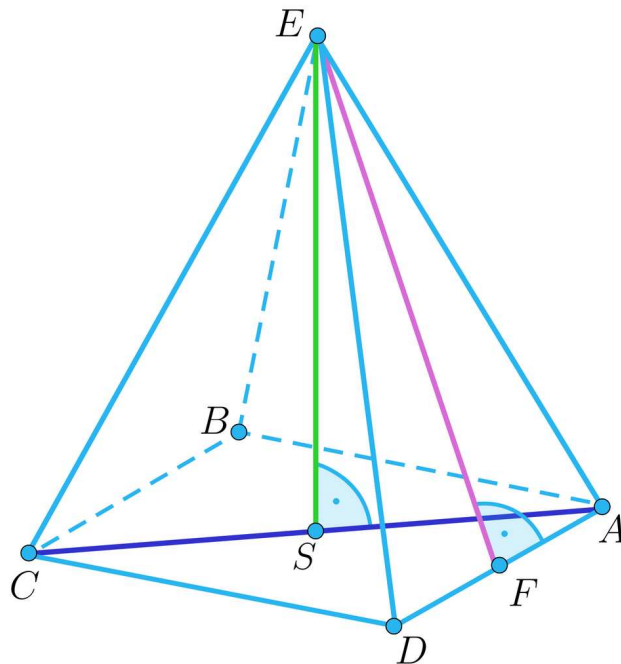
wysokością ostrosłupa

wysokościami ścian bocznych wychodzącymi z różnych wierzchołków podstawy

Ćwiczenie 3



Ostrosłup na rysunku poniżej jest prawidłowy.



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐

Jeżeli trójkąt ESF jest równoramienny, to kąt pomiędzy płaszczyzną ściany bocznej, a płaszczyzną podstawy ma miarę 45° .

☐

Jeżeli trójkąt ESF jest równoramienny, to kąt nachylenia wysokości do ściany bocznej ma miarę 45° .

☐

Jeżeli trójkąt AEC jest prostokątny, to kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy ma miarę 45° .

☐

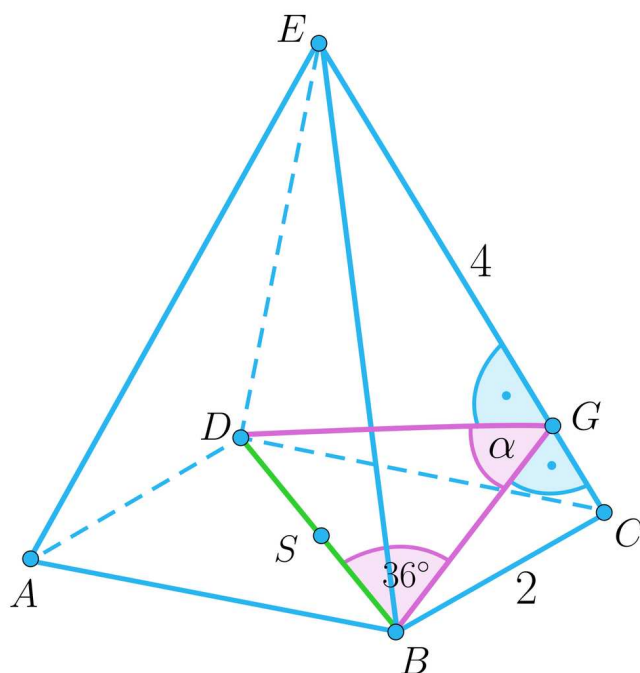
Jeżeli kąt AEC ma miarę 40° , to kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy ma miarę 50° .

Ćwiczenie 4

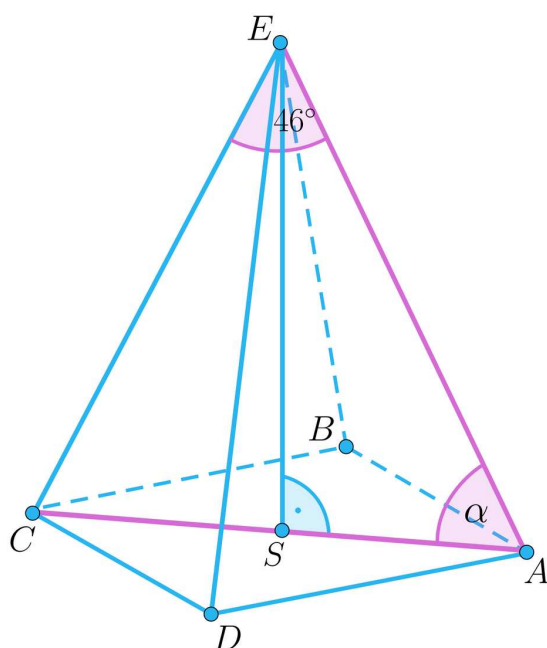


Ostrosłupy na rysunkach są prawidłowe. Oblicz miary kątów wskazanych na rysunkach i nazwij je.

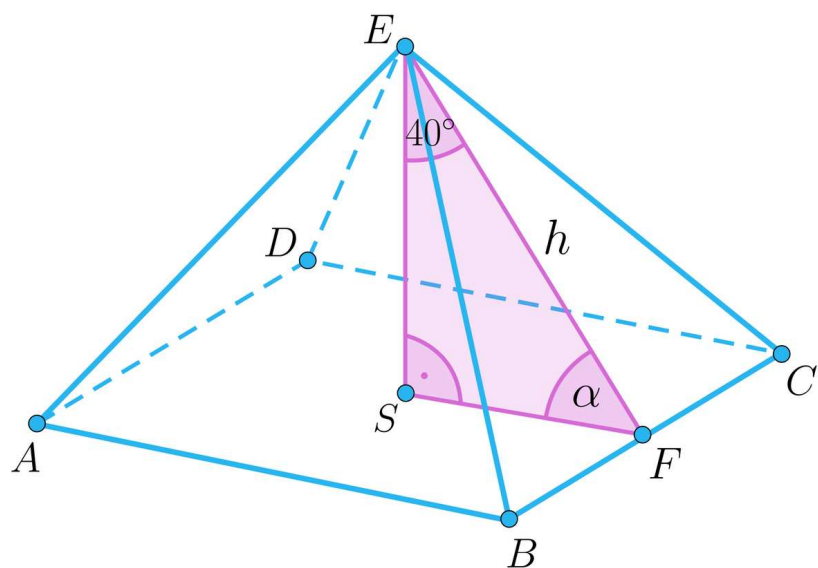
1)



2)



3)



Ćwiczenie 5

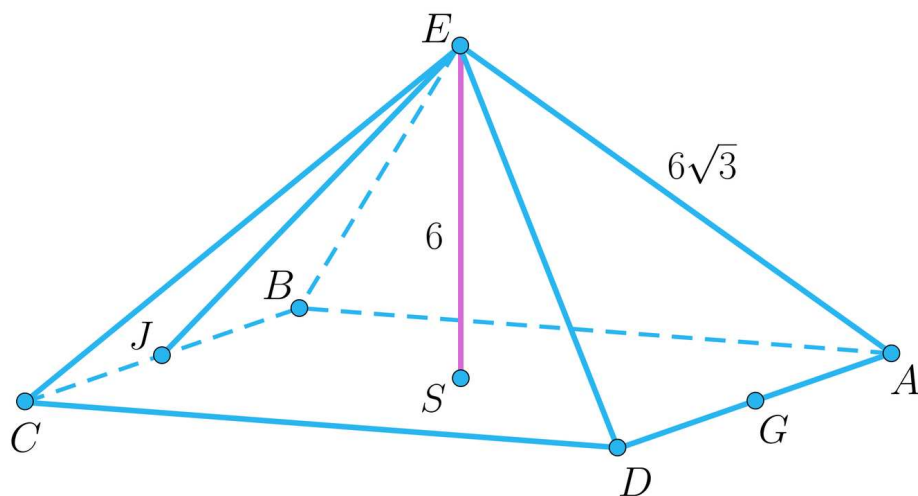


Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest trzykrotnie dłuższa od jego krawędzi podstawy. Oblicz tangens kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.

Ćwiczenie 6



Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o wymiarach jak na rysunku. Nazwij kąt $\angle SEJ$. Oblicz jego miarę. Jakim trójkątem jest trójkąt JEG ?



Ćwiczenie 7



Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest dwukrotnie większe od pola trójkąta będącego jego ścianą boczną. Jaką miarę ma kąt pomiędzy ścianą boczną a płaszczyzną podstawy?

Ćwiczenie 8



Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 4, a kąt nachylenia wysokości ostrosłupa do ściany bocznej ma miarę 15° . Oblicz miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.

Dla nauczyciela

Autor: Magdalena Wojciechowska-Rysiawa

Przedmiot: Matematyka

Temat: Kąty pomiędzy płaszczyznami i prostymi oraz pomiędzy płaszczyznami w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum lub technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria. Zakres podstawowy.

Uczeń:

3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wymienia kąty pomiędzy płaszczyznami i prostymi oraz pomiędzy płaszczyznami w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym
- wskazuje kąty w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym na podstawie zamieszczonego rysunku
- oblicza miary kątów w ostrosłupie z zastosowaniem Twierdzenia Pitagorasa, własności trójkąta równobocznego, trójkąta prostokątnego równoramiennego oraz funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym
- analizuje wzajemne zależności pomiędzy miarami kątów w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym
- grupuje kąty w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym według podanej zasady

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów
- rozmowa nauczająca
- dyskusja
- rozmowa kierowana

Formy pracy:

- praca z całą klasą
- praca w parach
- praca w grupach

Środki dydaktyczne:

- komputer z dostępem do Internetu, głośników i tablicy interaktywnej lub projektora
- materiały zawarte w e-podręczniku
- arkusze papieru i flamastry dla poszczególnych grup
- modele brył

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prowadzi rozmowę kierowaną z uczniami na temat tego, co już wiedzą o ostrosłupach, w tym szczególnie ostrosłupach prawidłowych czworokątnych. Zwraca szczególną uwagę na odcinki i rodzaje ścian w ostrosłupach. Przypomina definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym.
2. Nauczyciel pokazuje uczniom zdjęcie tipi i zadaje pytanie kluczowe: co jest niezbędne, aby rozłożyć namiot typu tipi?
Nauczyciel podkreśla wagę kątów przy prawidłowej konstrukcji namiotu.
3. Nauczyciel formułuje kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prowadzi z uczniami rozmowę nauczającą na temat typów kątów w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym. Wskazuje kąty na modelu oraz w materiałach w sekcji „Przeczytaj” i aplecie.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby samodzielnie wykonali polecenia dołączone do apletu, a następnie prosi o wymianę kartek z odpowiedziami pomiędzy uczniami w tej samej ławce. Wyświetla prawidłowe odpowiedzi, uczniowie dokonują oceny koleżeńskiej. Nauczyciel wraz z uczniami omawia błędy, które się pojawiły.

3. Nauczyciel analizuje przykłady zawarte w materiałach multimedialnych. Następnie dzieli klasę na 3-osobowe grupy, daje każdej z grup arkusz papieru i flamastry. Uczniowie w grupach dyskutują nad rozwiązaniem zadań zamkniętych z sekcji „Sprawdź się”.

Nauczyciel prezentuje poprawne rozwiązania. Następnie metodą burzy mózgów próbuje wraz z uczniami znaleźć wzajemne zależności pomiędzy kątami w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym i rozpatruje szczególne przypadki – gdy niektóre z trójkątów są równoboczne lub prostokątne i równoramienne.

Uczniowie rozwiązują w zeszytach zadania otwarte z sekcji „Sprawdź się”.

Następnie wraz z nauczycielem sprawdzają poprawność rozwiązania, omawiają ewentualne błędy i możliwości doboru innych strategii rozwiązywania zadań.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel nawiązuje do pytania kluczowego poprzez zaprezentowanie przykładu z sekcji „Przeczytaj”. Zwraca uwagę na użyteczność matematyki w życiu codziennym i to w jaki sposób stosuje się ją intuicyjnie, nie wiedząc, że korzysta się z praw i własności matematycznych.
2. Nauczyciel prosi o wskazanie mocnych i słabych stron lekcji.

Praca domowa:

Rozwiązać zadania interaktywne z sekcji „Sprawdź się”, które nie zostały omówione na lekcji.

Materiały pomocnicze:

- [Ostrosłup i jego własności](#)
- [Ostrosłup – opis bryły](#)

Wskazówki metodyczne:

Uczeń może odtworzyć aplet po przeprowadzeniu lekcji jako podsumowanie. Uczniowie, którzy mają problemy z opanowaniem matematyki mogą się z nim zapoznać przed lekcją.