



## Objętość kuli

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



W V w. n.e. chiński matematyk Zu Chongzhi odkrył bryłę o nazwie „mouhefanggai”, dzięki której wyznaczał objętość kuli. W późniejszych wiekach podejmowano wiele prób znalezienia wzoru na objętość kuli. W materiale podamy ten wzór, a następnie wykorzystamy do rozwiązywania różnych problemów matematycznych. Bazując na części teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

### Twoje cele

- Obliczysz objętość kuli, gdy dana jest długość jej promienia.
- Wyznaczysz promień kuli, gdy dana jest jej objętość lub pole powierzchni.
- Zastosujesz własności pojęcia objętości.
- Wykorzystasz wzór na objętość kuli do rozwiązywania problemów matematycznych.

# Przeczytaj

---

## Już wiesz

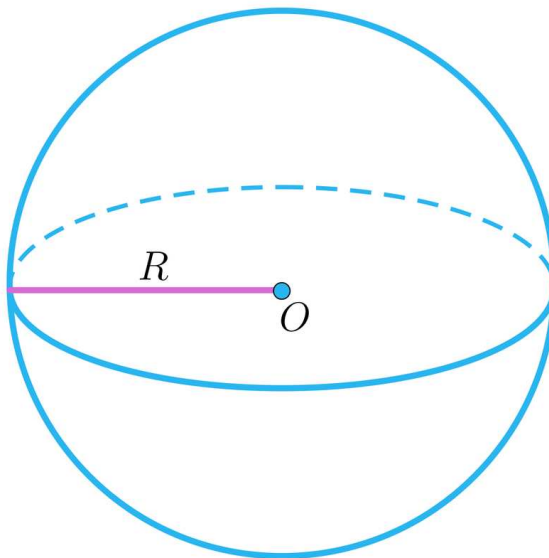
Kulą nazywamy zbiór punktów przestrzeni oddalonych nie więcej niż o ustaloną odległość  $R$  (promień kuli) od zadanego punktu  $O$  (środek kuli). Średnicą  $d$  kuli jest cięciwa przechodząca przez środek kuli, zatem  $d = 2R$ .

Pole powierzchni kuli obliczamy ze wzoru:

$$P = 4\pi R^2.$$

## Objętość kuli

Niech  $R$  będzie długością promienia kuli.



Objętość  $V$  kuli obliczamy ze wzoru:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3.$$

## Ciekawostka

Do wyprowadzenia wzoru na objętość **kuli** wykorzystuje się analizę matematyczną wraz z rachunkiem całkowym.

Jeżeli mamy dany wzór na objętość kuli, to możemy w łatwy sposób wyprowadzić wzór na jej pole powierzchni poprzez podział powierzchni kuli na jednakowe trójkąty krzywoliniowe.

### Przykład 1

Obliczymy objętość kuli, jeżeli jej promień ma długość  $\frac{1}{2}$ .

#### Rozwiązanie

Ponieważ  $R = \frac{1}{2}$ , zatem objętość kuli jest równa:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{6} \pi.$$

Objętość kuli wynosi  $\frac{1}{6} \pi$ .

### Przykład 2

Wyznamy długość promienia kuli o objętości równej  $\frac{64\sqrt{2}}{3} \pi$ .

#### Rozwiązanie

Ponieważ  $V = \frac{64\sqrt{2}}{3} \pi$ , zatem do wyznaczenia długości promienia  $R$  kuli rozwiązujemy równanie:

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{64\sqrt{2}}{3} \pi$$

$$4R^3 = 64\sqrt{2}$$

$$R^3 = 16\sqrt{2}$$

$$R = 2\sqrt{2}.$$

Promień kuli ma długość  $2\sqrt{2}$ .

### Przykład 3

Promień kuli zwiększono o 20%. Obliczymy, o ile procent wzrosła objętość tej kuli.

#### Rozwiązanie

Niech  $R_1$  będzie długością promienia kuli.

Wówczas objętość tej kuli wynosi:

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi R_1^3.$$

Założmy, że po zwiększeniu długości promienia kuli o 20% otrzymujemy kulę o promieniu  $R_2$ .

Zatem:

$$R_2 = 1,2R_1.$$

Wtedy objętość tej kuli wynosi:

$$V_2 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (1,2R_1)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 1,728R_1^3.$$

Różnica objętości tych kul wynosi:

$$V_2 - V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot 1,728R_1^3 - \frac{4}{3}\pi R_1^3 = 0,728 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot R_1^3 = 72,8\% \cdot \frac{4}{3}\pi R_1^3.$$

Wobec tego objętość kuli wzrosła o 72,8%.

#### Przykład 4

Obliczymy objętość kuli, jeżeli jej pole powierzchni wynosi  $8\pi$ .

#### Rozwiązanie

Z treści zadania wynika, że  $P = 8\pi$ .

Zatem do wyznaczenia długości promienia  $R$  rozwiążemy równanie:

$$8\pi = 4\pi R^2$$

$$R^2 = 2, \text{ czyli } R = \sqrt{2}$$

Wobec tego objętość  $V$  kuli jest równa:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (\sqrt{2})^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2\sqrt{2} = \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi.$$

#### Przykład 5

Wiadomo, że długości promieni trzech kul są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy 4, a ich suma wynosi 18. Wyznamy stosunek objętości kuli o najmniejszym promieniu do objętości kuli o największym promieniu.

#### Rozwiązanie

Jeżeli promienie kul są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy 4, to ich długości wyznaczają następujące zależności:

$$R_1 = x,$$

$$R_2 = x + 4,$$

$$R_3 = x + 8.$$

Ponieważ suma długości tych promieni wynosi 18, zatem do wyznaczenia wartości  $x$  rozwiązujemy równanie:

$$x + x + 4 + x + 8 = 18$$

$$3x + 12 = 18$$

$$3x = 6, \text{ zatem } x = 2.$$

Wobec tego długości promieni tych kul wynoszą odpowiednio:

$$R_1 = 2,$$

$$R_2 = 6,$$

$$R_3 = 10.$$

Zatem stosunek objętości kuli o najmniejszym promieniu do objętości kuli o największym promieniu wynosi:

$$\frac{V_1}{V_3} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 10^3} = \frac{2^3}{10^3} = \frac{1}{125}.$$

## Słownik

### kula

bryła obrotowa, która powstaje przez obrót koła wokół osi zawartej w płaszczyźnie koła, do której należy środek koła

### objętość

miara przestrzeni, jaką zajmuje bryła w przestrzeni trójwymiarowej

# Galeria zdjęć interaktywnych

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

## Polecenie 2

Promienie kul  $K_1, K_2, K_3$  są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o ilorazie 2, przy czym promień kuli  $K_3$  jest równy  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Oblicz sumę objętości tych kul.

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź.

Objętość kuli o średnicy długości  $\frac{1}{3}$  wynosi:

☐  $\frac{\pi}{216}$

☐  $\frac{\pi}{162}$

☐  $\frac{4\pi}{81}$

## Ćwiczenie 2



Wstaw w tekst odpowiednie liczby.

Jeżeli kulę wpisano w sześcian o krawędzi długości 6, to:

- promień kuli jest równy ,
- objętość kuli wynosi .

Jeżeli kulę opisano na sześcianie o krawędzi długości 4, to:

- promień kuli jest równy ,
- objętość kuli wynosi .



### Ćwiczenie 3



Zaznacz zdania, które są prawdziwe.

☐ Objętość kuli o promieniu długości  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  wynosi  $\frac{\pi}{3}$ .

☐ Objętość kuli o promieniu długości  $2\sqrt{3}$  wynosi  $32\sqrt{3}\pi$ .

☐ Promień kuli o objętości  $27\pi$  ma długość  $\sqrt[3]{\frac{81}{4}}$ .

☐ Promień kuli o objętości  $\frac{1}{3}\pi$  ma długość  $\sqrt[3]{4}$ .

### Ćwiczenie 4



Połącz w pary długość promienia  $R$  kuli z odpowiadającą mu objętością  $V$ .

$$R = \frac{1}{3}$$

$$V = 4\sqrt{3}\pi$$

$$R = \sqrt{3}$$

$$V = \frac{4}{81}\pi$$

$$R = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$V = 36\pi$$

$$R = 3$$

$$V = \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi$$

### Ćwiczenie 5



Pogrupuj elementy, zgodnie z podanym opisem.

Kula o promieniu równym promieniowi koła o polu  $24\pi$ :

ma promień równy  $3\sqrt{3}$

ma objętość równą  $108\pi\sqrt{3}$

ma pole powierzchni równe  $108\pi$

ma pole powierzchni równe  $96\pi$

ma promień równy  $2\sqrt{6}$

ma objętość równą  $64\pi\sqrt{6}$

Kula o promieniu równym promieniowi koła o obwodzie  $6\pi\sqrt{3}$

### Ćwiczenie 6



Pewną kulę przecięto płaszczyzną. Otrzymany przekrój jest kołem o promieniu długości  $3\sqrt{2}$  i środka oddalonym od środka kuli o 4. Wyznacz objętość tej kuli.

### Ćwiczenie 7



Wiadomo, że objętość kuli wynosi  $V$ . Wyznacz pole powierzchni tej kuli.

### Ćwiczenie 8



Dwie miedziane kule o promieniach  $R_1 = 4$  oraz  $R_2 = 3$  przetopiono w jedną kulę. Oblicz promień powstałej kuli.

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Tomasz Wójtowicz

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Objętość kuli

**Grupa docelowa:**

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

X. Stereometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- oblicza objętość kuli, gdy dana jest długość jej promienia;
- wyznacza promień kuli, gdy dana jest jej objętość lub pole powierzchni;
- stosuje własności pojęcia objętości;
- wykorzystuje wzór na objętość kuli do rozwiązywania problemów matematycznych.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- dyskusja;
- metoda kota i myszy;
- liga zadaniowa;
- burza mózgów.

## **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

## **Środki dydaktyczne:**

- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- telefony z dostępem do internetu;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

## **Przebieg lekcji**

### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel określa temat lekcji: „Objętość kuli” oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”; analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy omawiane są na forum i komentowane przez nauczyciela.
4. Kolejny etap to liga zadaniowa - uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają je na forum klasy.
5. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia nr 6, 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się” metodą kot i mysz. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po 2 nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej - role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem - procedura się powtarza.

### **Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, omawia ewentualne problemy podczas rozwiązywania ćwiczeń na temat „Objętość kuli”.

**Praca domowa:**

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończone na zajęciach.

**Materiały pomocnicze:**

- [Kula i sfera](#)

**Wskazówki metodyczne:**

- Materiał w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” można wykorzystać do powtórzenia wiadomości dotyczących wyznaczania objętości kuli lub do realizacji lekcji „Przekroje kuli”.