Prawdopodobieństwo klasyczne

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film samouczek
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Prawdopodobieństwo klasyczne

Źródło: dostępny w internecie: picabay.com, domena publiczna.

Prawdopodobnie w karty grywali już Chińczycy w X wieku. Karty do gry powstały z przeniesienia na papier notacji używanej w grze w kości.

Do Europy karty trafiły mniej więcej w XIV. Początkowo sporządzano je ręcznie, więc były bardzo drogie.

W Polsce gra w karty szybko się rozprzestrzeniła. W XI w. na rynkach można było spotkać kartowników, czyli kramarzy sprzedających tylko karty. Obecnie karty straciły na popularności, ale w tradycji szkolnej, ciągle w modzie są zadania, w których należy obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania z talii danego zestawu kart.

Georges de La Tour
Oszust z asem karo (1636-1638)

W tym materiale również rozwiążemy takie zadania, skorzystamy przy tym z klasycznej definicji prawdopodobieństwa. Klasyczne definicja prawdopodobieństwa obejmuje tylko przypadki, gdy rozważane zdarzenia są jednakowo prawdopodobne i jest ich skończona liczba. Takie założenie przyjmowano automatycznie w początkach rozwoju rachunku prawdopodobieństwa, niestety często prowadziło to do błędnych rozwiązań. Sytuacje oparte na założeniach klasycznej definicji prawdopodobieństwa rzadko występują w realnym świecie. Jednak ich rozważanie rozwija umiejętność logicznego myślenia i jest bazą do prowadzenia bardziej złożonych operacji matematycznych, np. w obliczeniach statystycznych.

> **Twoje cele**
>
> - Sformułujesz własną definicję prawdopodobieństwa.
> - Rozpoznasz zdarzenia jednakowo prawdopodobne.
> - Określisz zbiór zdarzeń sprzyjających zajściu danego zdarzenia.
> - Obliczysz prawdopodobieństwo zdarzenia, korzystając z klasycznej definicji prawdopodobieństwa.

Przeczytaj

Obserwacje wyników gier losowych doprowadziły do formułowania pierwszych stwierdzeń i wniosków dotyczących szans wygranej. Odpowiedzią na interesujące graczy zjawiska, była definicja prawdopodobieństwa (zwana dzisiaj klasyczną), sformułowana przez osiemnastowiecznego francuskiego matematyka, fizyka, astronoma i geodetę Pierra Simona de Laplace'a. Definicja ta jest o tyle wygodniejsza od aksjomatycznej definicji prawdopodobieństwa, iż daje praktyczną wskazówkę, jak wyznaczyć prawdopodobieństwo danego zdarzenia.

Definicja: Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych.

Prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia $A \subset \Omega$ nazywamy liczbę:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Z klasycznej definicji prawdopodobieństwa wynika więc, że prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia $A \subset \Omega$ jest równe ilorazowi liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A do liczby wszystkich zdarzeń elementarnych należących do zbioru Ω.

Definicja ta zakłada więc, że wszystkie zdarzenia elementarne wzajemnie się wykluczają, a ich wystąpienia są równie możliwe.

Podsumowując – w klasycznym schemacie obliczania prawdopodobieństwa zakłada się więc, że:

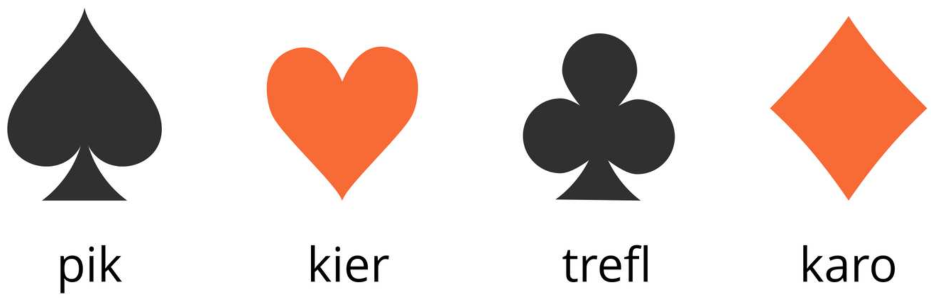
- **zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych jest zbiorem skończonym**,
- **wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne**.

Korzystając z tych założeń (nie powtarzając ich za każdym razem) będziemy rozwiązywać wszystkie zadania w tym materiale.

Pokażemy teraz zastosowanie klasycznej definicji prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństwa zdarzeń, na przykładzie losowania kart do gry.

Przed rozwiązywaniem zadań, kilka przydatnych wiadomości.

Zwykle talia do gry zawiera 52 karty w czterech kolorach: *pik*, *kier*, *trefl*, *karo*. W każdym z tych kolorów jest 13 kart.



Każdy z kolorów posiada dziewięć kart numerowanych od 2 do 10 oraz trzy figury: *król*, *dama*, *walet* oraz dodatkową kartę – *as*.

W pierwszych trzech przykładach losować będziemy tylko jedną kartę z talii.

Przykład 1

Z talii 52 kart losujemy jedną. Obliczymy prawdopodobieństwo, że wylosowana karta to figura.

Zdarzeniu F – wylosowana karta to figura, sprzyja $3 \cdot 4 = 12$ zdarzeń elementarnych (są trzy figury w każdym z czterech kolorów).

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa 52 (tyle jest kart w talii).

Korzystamy ze wzoru podanego w klasycznej definicji prawdopodobieństwa.

$P(F) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo, że wylosowana karta to figura jest równe $\frac{3}{13}$.

Przykład 2

Z talii 52 kart losujemy jedną. Obliczymy prawdopodobieństwo, że wylosowana karta nie jest ani treflem, ani damą.

Oznaczmy:
A – zdarzenie polegające na wylosowaniu karty, która nie jest ani treflem, ani damą.

Jeśli karta nie ma być treflem, to może być pikiem, kierem, karo – $3 \cdot 13 = 39$ możliwości.

Jednak wśród tych kart są trzy damy. Musimy je wykluczyć.

Zatem:

$|A| = 39 - 3 = 36$

Możemy teraz obliczyć szukane prawdopodobieństwo.

$P(A) = \frac{36}{52} = \frac{9}{13}$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo, że wylosowana karta nie jest ani kierem, ani damą jest równe $\frac{9}{13}$.
Przykład 3

Z talii 52 kart losujemy jedną. Obliczymy prawdopodobieństwo, że wylosowana karta jest kierem, karo lub dwójką.

Oznaczmy:
A – zdarzenie polegające na wylosowaniu karty, która jest kierem, karo lub dwójką.

Wylosowana karta może być kierem (13 możliwości) lub karo (13 możliwości), może być też dwójką (4 możliwości).

Wydaje się więc, że liczba zdarzeń sprzyjających wylosowaniu karty jest równa $13 + 13 + 4$.

Jednak tak nie jest, bo są dwie dwójki, które w ten sposób liczone by były podwójnie – dwójka kier i dwójka karo.

Zatem:

$|A| = 13 + 13 + 4 - 2 = 28$

Stąd:

$P(A) = \frac{28}{52} = \frac{7}{13}$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo, że wylosowana karta jest kierem, karo lub dwójką jest równe $\frac{7}{13}$.

Teraz czas na trudniejsze przykłady.
Przykład 4

Z talii 52 kart losujemy ze zwracaniem trzy karty. Obliczymy jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosujemy kolejno dwójką, trójkę i czwórkę.

Oznaczmy:
A – zdarzenie polegające na wylosowaniu kolejno dwójki, trójki i czwórki.

Losujemy karty ze zwracaniem, więc za każdym razem losujemy jedną kartę z 52. Zgodnie z regułą mnożenia:

$|\Omega| = 52 \cdot 52 \cdot 52 = 52^3$

W talii są cztery dwójki, cztery trójki i cztery czwórki, zatem, rozumując w podobny sposób, jak przy wyznaczaniu mocy zdarzeń elementarnych, otrzymujemy:

$|A| = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$

Stąd:

$P(A) = \frac{4^3}{52^3} = \left(\frac{1}{13}\right)^3 = \frac{1}{2197}$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo, że wylosowane karty to dwójka, trójka i czwórka jest równe $\frac{1}{2197}$.
Przykład 5

Z talii 52 kart wyciągamy dwie karty. Obliczymy jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosujemy dwa asy.

Oznaczmy:
A – zdarzenie polegające na wylosowaniu dwóch asów.

Losujemy dwie spośród 52 kart.

Zatem:

$|\Omega| = \binom{52}{2} = \frac{52!}{2! \cdot 50!} = \frac{51 \cdot 52}{2} = 1326$

Dwa asy losujemy spośród 4 znajdujących się w talii.

Stąd:

$|A| = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$

Obliczamy prawdopodobieństwo:

$P(A) = \frac{6}{1326} = \frac{1}{221}$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch asów jest równe $\frac{1}{221}$.
Przykład 6

Potasowano talię kart i karty rozdano czterem graczom – każdemu po tyle samo. Obliczymy prawdopodobieństwo, że gracz z numerem 1 otrzymał trzy króle.

Oznaczmy:
K – zdarzenie polegające na otrzymaniu trzech króli.

Każdy z graczy otrzymał po $52 : 4 = 13$ kart.

Zatem:

$|\Omega| = \binom{52}{13}$

Gracz z numerem 1 ma otrzymać trzy króle, więc powinien jeszcze otrzymać $13 - 3 = 10$ kart, które nie są królami i które są losowane spośród $52 - 4 = 48$ pozostałych kart.

Stąd:

$|K| = \binom{4}{3} \cdot \binom{48}{10}$

Obliczamy prawdopodobieństwo:

$P(K) = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{10}}{\binom{52}{13}} = \frac{858}{20825}$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo otrzymania trzech króli przez gracza z numerem 1 jest równe $\frac{858}{20825}$.

Słownik

klasyczna definicja prawdopodobieństwa

niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych; prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia $A \subset \Omega$ nazywamy liczbę

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem. Porównaj uzyskane wcześnie wiadomości z tymi, zawartymi na filmie. Zwróć uwagę na istotne elementy, ograniczające stosowanie klasycznej definicji prawdopodobieństwa.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D19byieU0

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego prawdopodobieństwa klasycznego.

Polecenie 2

Zakładamy, że wszystkie zdarzenia zawarte w odpowiednich zbiorach zdarzeń elementarnych Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 są jednakowo prawdopodobne i $A \subset \Omega_1$, $B \subset \Omega_2$, $C \subset \Omega_3$, $D \subset \Omega_4$.

Określ, czy prawdopodobieństwo każdego ze zdarzeń A, B, C, D można obliczyć, korzystając z klasycznej definicji prawdopodobieństwa, jeśli:

A – wylosowanie asa spośród wszystkich kart koloru pik,

B – wyciągnięcie dwóch kart koloru pik,

C – spośród dziesięciu kart do gry, wylosowanie karty o najniższej wartości,

D – z talii 52 kart do gry wylosowanie asa lub damy.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

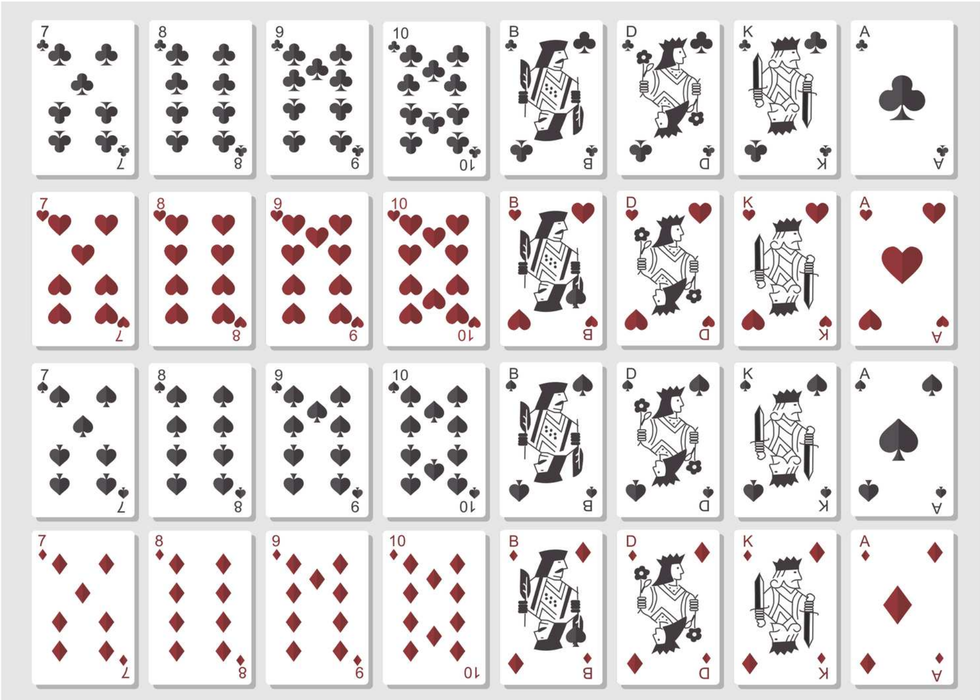
Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Paweł losuje trzy karty z talii do gry w skata, zawierającej 32 karty.



Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania przez Pawła trzech kart koloru czarnego, jeśli losuje karty:

a. ze zwracaniem,

b. bez zwracania.

Ćwiczenie 8

Z talii 52 kart losujemy jednocześnie 13 kart. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród tych kart będą trzy damy i dwa asy.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Prawdopodobieństwo klasyczne

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- formułuje własną definicje prawdopodobieństwa
- rozpoznaje zdarzenia jednakowo prawdopodobne
- określa zbiór zdarzeń sprzyjających zajściu danego zdarzenia
- oblicza prawdopodobieństwo zdarzenia, korzystając z klasycznej definicji prawdopodobieństwa
- dobiera odpowiedni model matematyczny do sytuacji z kontekstem realistycznym, wymagającej obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia
- prowadzi proste rozumowania, w celu wyjaśnienia sposobu rozwiązania problemu probabilistycznego

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- oszukać oszusta
- drama

Formy pracy:

- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- karty do gry

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Zajęcia rozpoczyna nauczyciel, pytając uczniów o szansę wylosowania z talii kart, którą trzyma w dłoni, figury (króla,damy lub waleta). Zapewne padną różne odpowiedzi, wtedy nauczyciel prosi, aby jeden z uczniów wylosował kartę i sprawdził, czy otrzymał figurę. Następnie prosi kolejnego ucznia, itd. Inicjuje przy tym dyskusję, jak zmienia się szansa otrzymania figury w kolejnych losowaniach. Gdy okazuje się, że żaden z uczniów nie wylosował figury, nauczyciel pokazuje karty, w których nie ma ani króla, ani damy, ani waleta. Jest to wstęp do rozmowy o tym, jak ważne jest ustalenie zbioru zdarzeń elementarnych w doświadczeniu losowym.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w parach, korzystając z kart do gry. Ich zadaniem jest wymyślenie prostego doświadczenia losowego związanego z kartami, określenie szansy zajścia danego zdarzenia i sprawdzenie doświadczalnie, czy ich przypuszczenia są słuszne.
2. Po prezentacji kilku pomysłów, nauczyciel prosi o sformułowanie przez uczniów własnych definicji prawdopodobieństwa, która powinna być teoretycznym opisem wniosków z wykonanych doświadczeń. Jeśli uczniowie będą mieli problem z zapisaniem definicji, nauczyciel może zaproponować określenie tylko przypuszczalnych własności prawdopodobieństwa.
3. Wybrane pary uczniów przedstawiają swoje pomysły, które są korygowane przez innych uczniów i nauczyciela, tak, aby w wyniku otrzymać i zapisać klasyczną definicję

prawdopodobieństwa.
4. Uczniowie pracują w 6 grupach. Zadaniem każdej grupy jest przygotowanie w formie mini – dramy jednego z przykładów zapisanych w sekcji „Przeczytaj”. Grupy prezentują zadania, uczniowie podpowiadają rozwiązania.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
   Dyskusja – czy trudno jest poprawnie sformułować definicję lub własności danego zjawiska, zdarzenia na podstawie wykonanych kilku doświadczeń. Dlaczego?
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par.

Praca domowa:

Wykonanie ćwiczeń interaktywnych zawartych w sekcji „Sprawdź się”.

Powinni też zapoznać się z filmem - samouczkiem, co będzie przydatne na nastepnych zajęciach.

Materiały pomocnicze:

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa. Własności prawdopodobieństwa. Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń losowych

Wskazówki metodyczne:

Film można wykorzystać, podsumowując cały dział, związany z rachunkiem prawdopodobieństwa.