



Czworościan

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Prezentacja multimedialna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



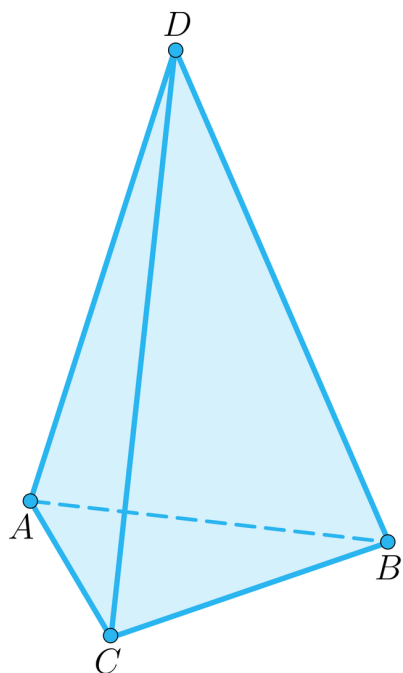
W tym materiale omówimy najmnijeszy co do liczby ścian wielościan. Tak jak na płaszczyźnie każdy wielokąt można rozciąć na skończoną liczbę trójkątów, tak w przestrzeni trójwymiarowej każdy wielościan można przedstawić jako skończoną sumę czworościanów. Zastanowimy się nad własnościami czworościanów i spróbujemy je sklasyfikować.

Twoje cele

- Odróżnisz czworościan od innych brył.
- Rozpoznasz czworościany szczególne.
- Zastosujesz własności czworościanu do rozwiązywania zadań z geometrii przestrzennej.

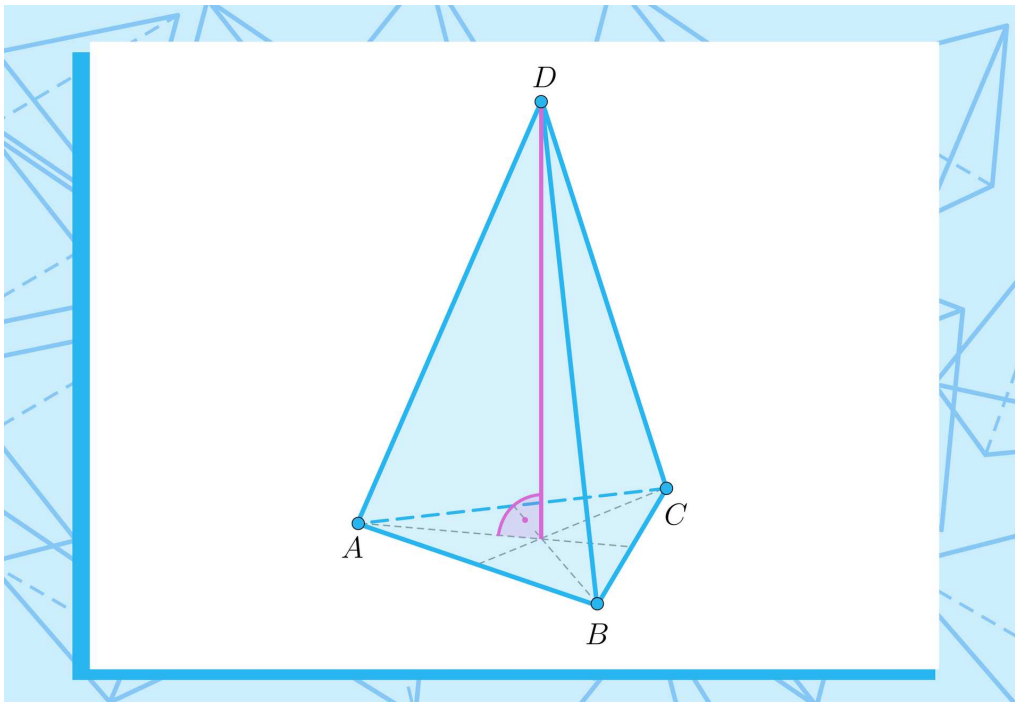
Przeczytaj

Czworościan to wielościan o czterech ścianach. Łatwo zauważyć, że każda ze ścian czworościanu jest trójkątem.



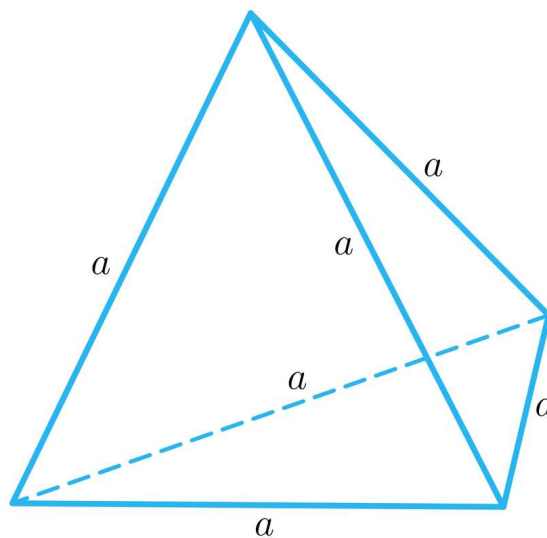
Każdy czworościan ma 4 wierzchołki, 6 krawędzi i nie ma przekątnych – każdy odcinek łączący dwa wierzchołki czworościanu jest jego krawędzią.

Każdy **czworościan** jest ostrosłupem trójkątnym. Ponieważ wszystkie ściany czworościanu są trójkątami, więc każda z nich może być rozpatrywana jako podstawa i z każdego wierzchołka można poprowadzić wysokość:

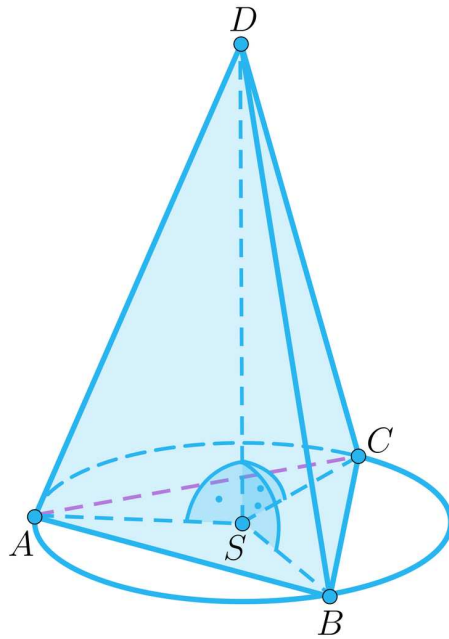


Wśród wszystkich czworościanów wyróżniamy:

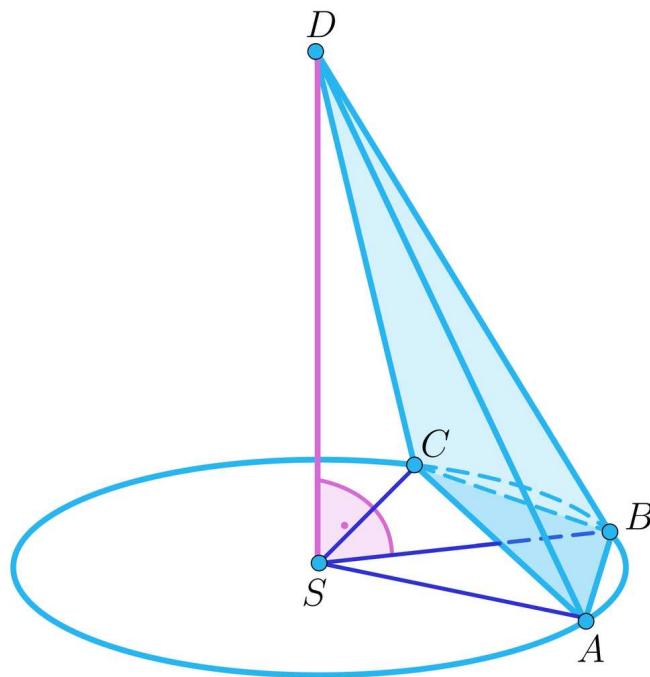
- czworościany foremne, w których wszystkie ściany są przystającymi trójkątami równobocznymi:



- ostrosłupy prawidłowe, w których jedna ze ścian (którą przyjmujemy za podstawę) jest trójkątem równobocznym, zaś spodek wysokości ostrosłupa poprowadzonej do podstawy pokrywa się z środkiem okręgu opisanego na podstawie:



- ostrosłupy proste, w których spodek wysokości ostrosłupa pokrywa się z środkiem okręgu opisanego na podstawie, ale podstawą może być dowolny trójkąt:



Przyjrzyjmy się bliżej ostrosłupom prostym. Niech trójkąt ABC będzie podstawą ostrosłupa, D wierzchołkiem ostrosłupa nie leżącym w płaszczyźnie podstawy, zaś S spodkiem wysokości ostrosłupa i środkiem okręgu opisanego na podstawie.

Wówczas łatwo zauważyć, że trójkąty DSC , DSB i DSA są przystające na mocy cechy bok-kąt-bok (DS jest wspólnym bokiem wszystkich trójkątów, wszystkie trójkąty mają kąt prosty oraz $|SC| = |SB| = |SA|$, bo są promieniami tego samego okręgu). Zatem $|AD| = |BD| = |CD|$, czyli wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa prostego są równej

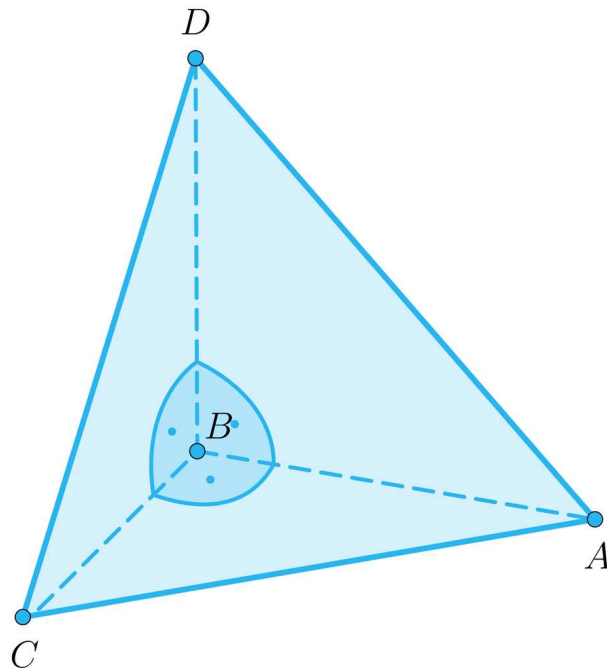
długości. Łatwo też zauważyć, że wszystkie krawędzie boczne nachylone są do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem.

Jako ćwiczenie pozostawiamy twierdzenia odwrotne do powyższego:

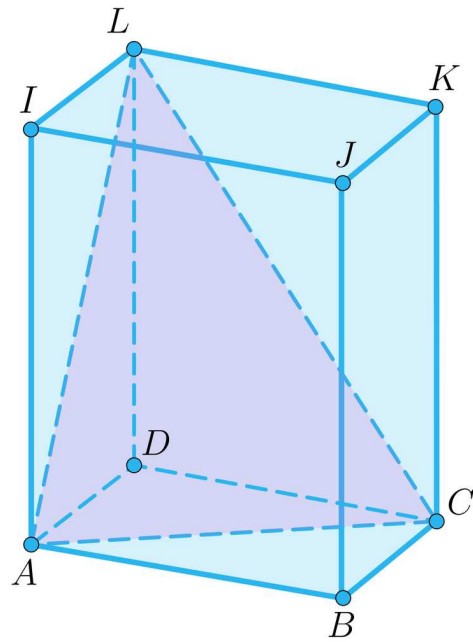
Jeśli wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa są tej samej długości, to jest to ostrosłup prosty.

Jeśli wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem, to jest to ostrosłup prosty.

Często pojawiającym się w zadaniach **czworościanem** jest taki, którego trzy krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka są wzajemnie prostopadłe:



Tego typu czworościany łatwo dostrzec w prostopadłościanach – krawędzie wzajemnie prostopadłe są krawędziami prostopadłościanu wychodzącymi z jednego jego wierzchołka, zaś pozostałe trzy krawędzie czworościanu są przekątnymi tego prostopadłościanu:

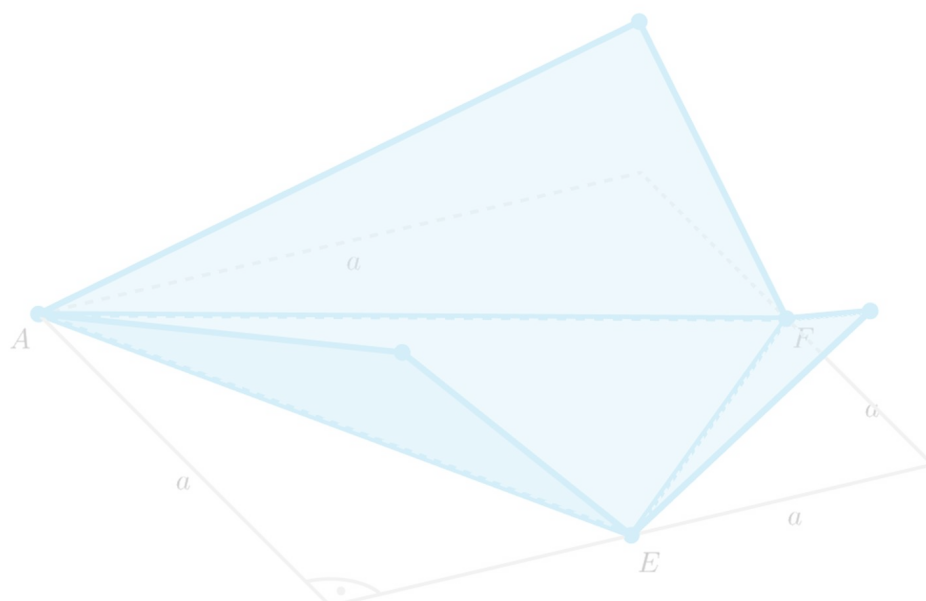


Ciekawym przypadkiem powyższego czworościanu jest taki, którego siatkę można uzyskać z kwadratu.

Problem 1

Zanim zaczniesz czytać dalej, spróbuj tak złożyć kwadrat, aby powstał czworościan. Kwadrat ma być siatką tego czworościanu.

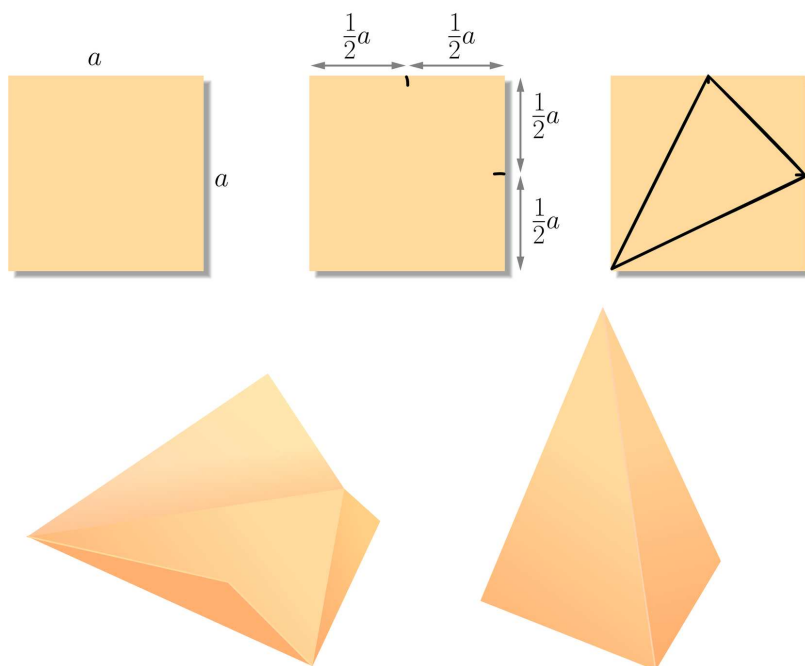
Możesz teraz sprawdzić, jaki czworościan powstaje z siatki będącej kwadratem:



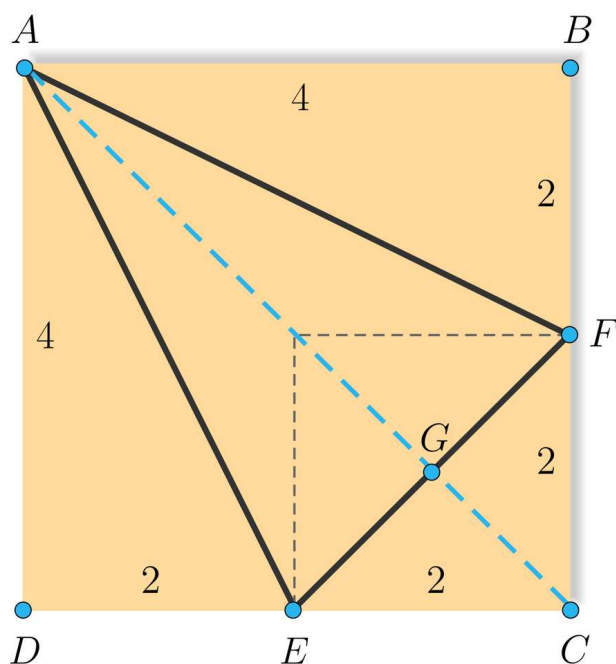
Przykład 1

Obliczymy objętość czworościanu, którego siatka jest kwadratem o boku 4.

Zauważmy, że kwadrat można złożyć wzdłuż linii narysowanych poniżej otrzymując czworościan.



Wprowadźmy oznaczenia:



Przyjmijmy trójkąt CEF za podstawę czworościanu. Wówczas wysokością czworościanu będą odcinki AB i AD , które nałożą się na siebie nawzajem. Czyli wysokość czworościanu to 4.

W podstawie znajduje się trójkąt prostokątny równoramienny, więc jego pole to

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2.$$

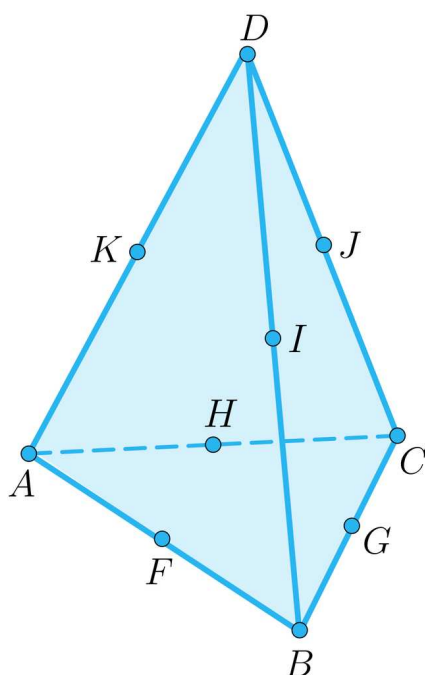
Zatem objętość otrzymanego czworościanu możemy obliczyć stosując wzór na objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 4 = \frac{8}{3}.$$

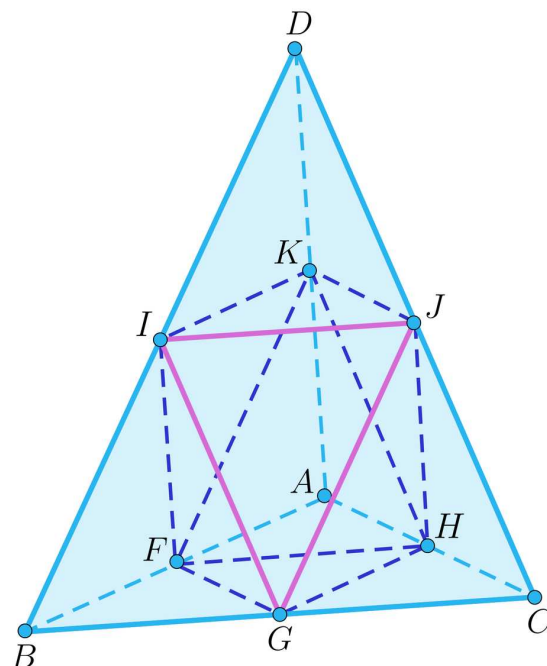
Przykład 2

Dany jest czworościan $ABCD$ o polu powierzchni 100. Na każdej krawędzi wyznaczono jej środek i otrzymane punkty połączono w taki sposób, aby odcinki łączące środki krawędzi leżały na powierzchni ostrosłupa. Otrzymane odcinki tworzą krawędzie nowego wielościanu. Wyznamy pole jego powierzchni.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku poniżej:



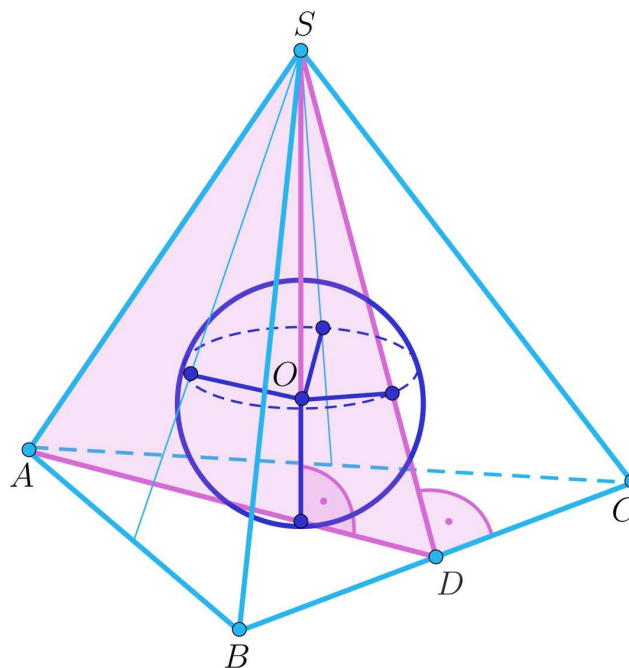
Punkty I, J, K, F, G, H są środkami odcinków BD, CD, AD, AB, BC oraz AC . Po ich połączeniu otrzymujemy krawędzie nowego wielościanu, który okazuje się być ośmiościanem jak niżej



Zauważmy teraz, że przeciwległe ściany otrzymanego ośmiościanu są przystające. Możemy to uzasadnić na przykładzie ścian GIJ oraz FHK . Odcinek IJ ma długość równą połowie odcinka BC (łączy środki boków trójkąta BCD) oraz odcinek FH ma długość równą połowie odcinka BC (łączy środki boków trójkąta ABC). Ponadto $|KF| = \frac{1}{2} \cdot |BD| = |GJ|$, bo KF łączy środki boków trójkąta ABD , zaś GJ łączy środki boków trójkąta CBD , oraz $|KH| = \frac{1}{2} \cdot |CD| = |GI|$, bo KH łączy środki boków trójkąta ACD , zaś GI łączy środki boków trójkąta CBD . Zatem na mocy cechy bok-bok-bok trójkąty IJG oraz FHK są przystające. Poza tym oba są podobne w skali $1 : 2$ do trójkąta CBD (na mocy cechy bok-bok-bok podobieństwa trójkątów). Zatem pole każdego z tych trójkątów jest równe $\frac{1}{4}$ pola trójkąta CBD , więc suma tych pól to $\frac{1}{2}$ pola trójkąta CBD . Analogicznie postępujemy dla pozostałych par trójkątów będących ścianami ośmiościana. Stąd już łatwo wyciągnąć wniosek, że pole powierzchni ośmiościana jest równe połowie pola powierzchni czworokąta, czyli wynosi 50.

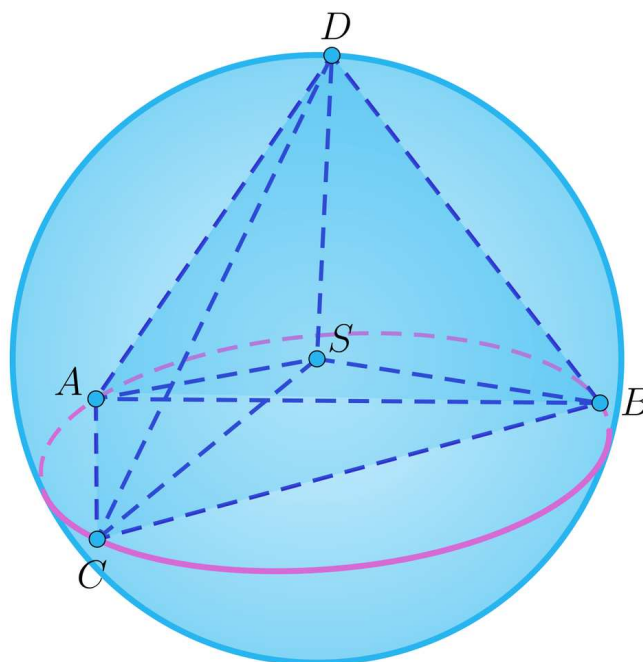
Środek kuli wpisanej w czworościan

W każdy czworościan można wpisać kulę. Jest to kula, która jest styczna do wszystkich ścian czworościanu (ma z każdą z nich dokładnie jeden punkt wspólny). Środek kuli wpisanej w czworościan jest równoodległy od wszystkich jego ścian. Odległość jest równa promieniowi kuli.



Środek kuli opisanej na czworościanie

Na każdym czworościanie można opisać kulę. Kula opisana na czworościanie to taka kula, której powierzchnia (sfera) zawiera wszystkie wierzchołki czworościanu. Środek kuli opisanej na czworościanie jest równoodległy od wszystkich jego wierzchołków. Odległość ta jest równa promieniowi kuli.



Przypomnijmy, że na płaszczyźnie przez trzy dowolne punkty nie leżące na jednej prostej przechodzi dokładnie jeden okrąg. W przestrzeni trójwymiarowej można udowodnić analogiczne twierdzenie:

Przez cztery różne punkty nie leżące na jednej płaszczyźnie przechodzi dokładnie jedna sfera.

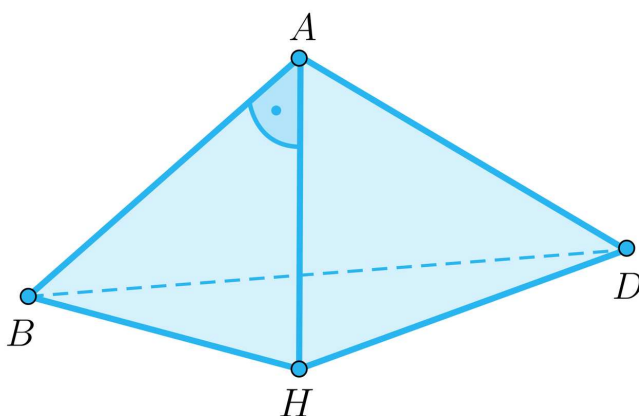
Przykład 3

Wyznamy promień kuli opisanej na czworościanie, którego ściany spełniają następujące warunki:

- jedna ze ścian jest trójkątem równobocznym o boku a oraz
- trzy pozostałe ściany są przystającymi trójkątami prostokątnymi równoramiennymi o przeciwprostokątnej a .

W rozwiązaniu tego zadania skorzystamy z faktu, że przez dowolne cztery punkty, które nie leżą na jednej płaszczyźnie przechodzi dokładnie jedna sfera.

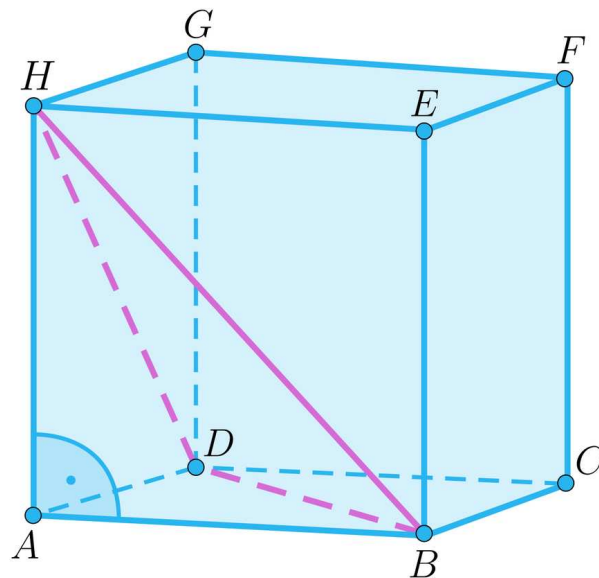
Zauważmy najpierw, że omawiany czworościan jest ostrosłupem prawidłowym trójkątnym, w którym kąt między krawędziami bocznymi jest prosty.



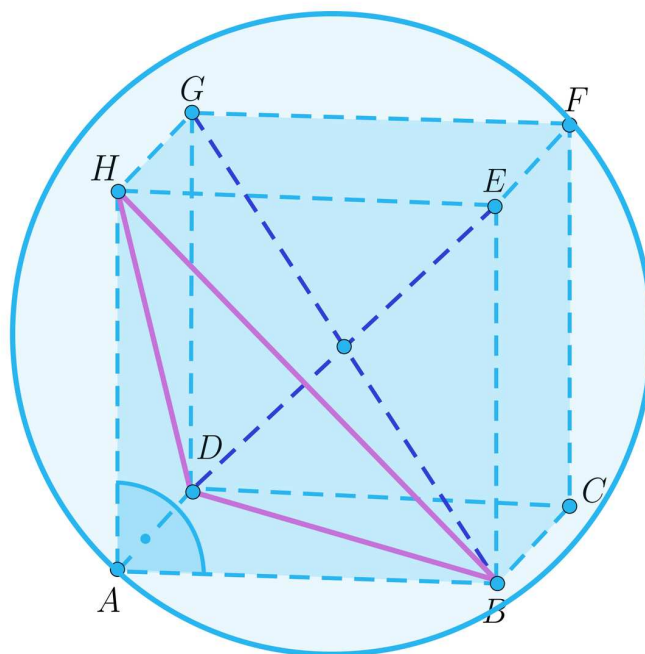
Zauważmy, że rozważany ostrosłup można otrzymać z sześcianu w następujący sposób:

- wierzchołek A ostrosłupa jest jednym z wierzchołków sześcianu,
- krawędzie boczne ostrosłupa są krawędziami sześcianu,
- krawędzie podstawy ostrosłupa są przekątnymi ścian sześcianu.

Łatwo obliczyć, że krawędź sześcianu ma długość $\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Ponieważ punkt przecięcia przekątnych sześcianu jest równoodległy od wszystkich jego wierzchołków, więc jest środkiem kuli opisanej na sześcianie.



Skoro cztery punkty nie leżące na jednej płaszczyźnie wyznaczają strefę w sposób jednoznaczny, więc kula opisana na czworościanie i kula opisana na sześcianie jest tą samą kulą. Jej promień R to połowa przekątnej d sześcianu:

$$R = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

wysokość ostrosłupa

odległość wierzchołka nie leżącego w podstawie ostrosłupa od jego rzutu prostokątnego na płaszczyznę podstawy; również odcinek o długości równej tej odległości

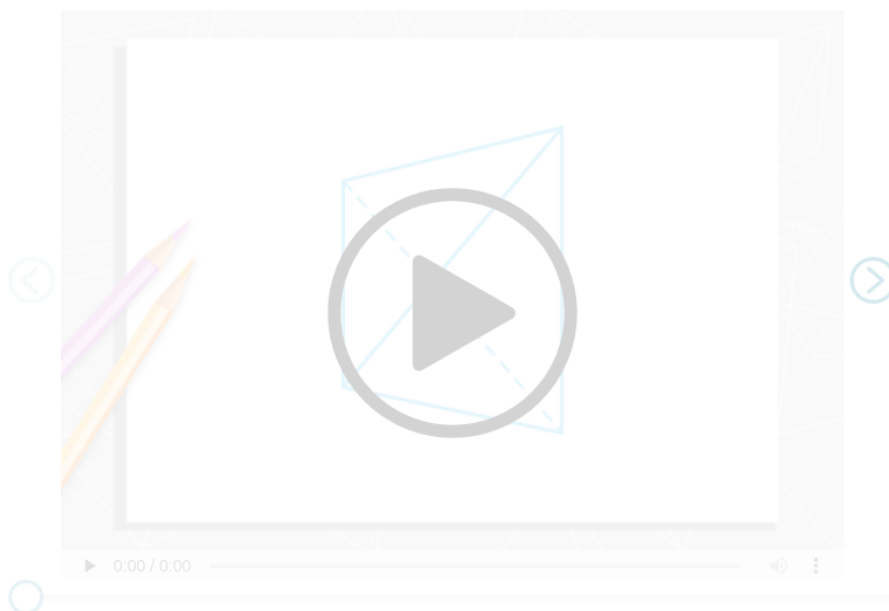
czworościan

wielościan o czterech ścianach; ściany czworościanu są trójkątami

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją multimedialną, a następnie wykonaj polecenie 2.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dk9jx7FfU>

Polecenie 2

Dany jest prostopadłościan o krawędziach długości 3, 4, 5. Oblicz objętość czworościanu, którego krawędzie pokrywają się z przekątnymi ścian tego prostopadłościanu.

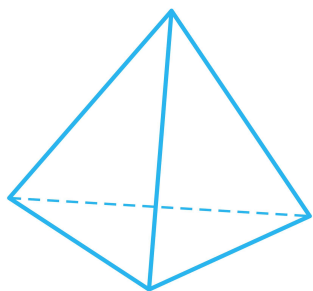
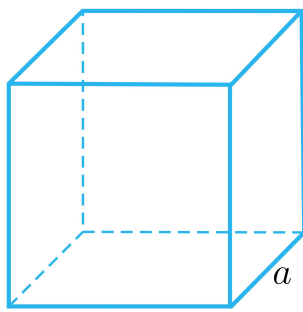
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

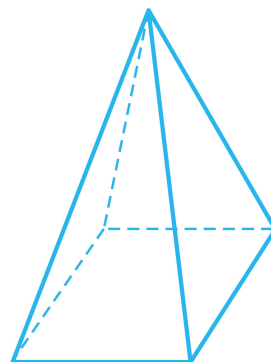
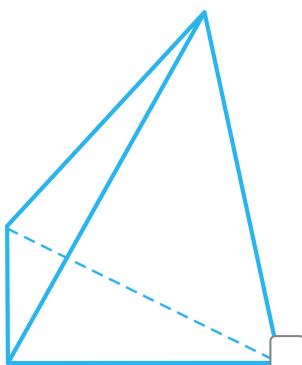
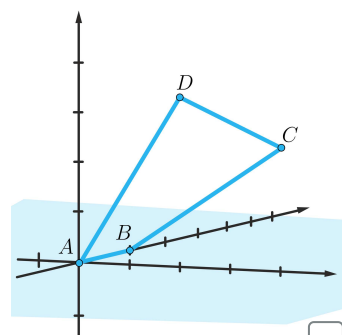
Ćwiczenie 1



Zaznacz wszystkie te spośród figur narysowanych poniżej, które są czworościanami.

☐

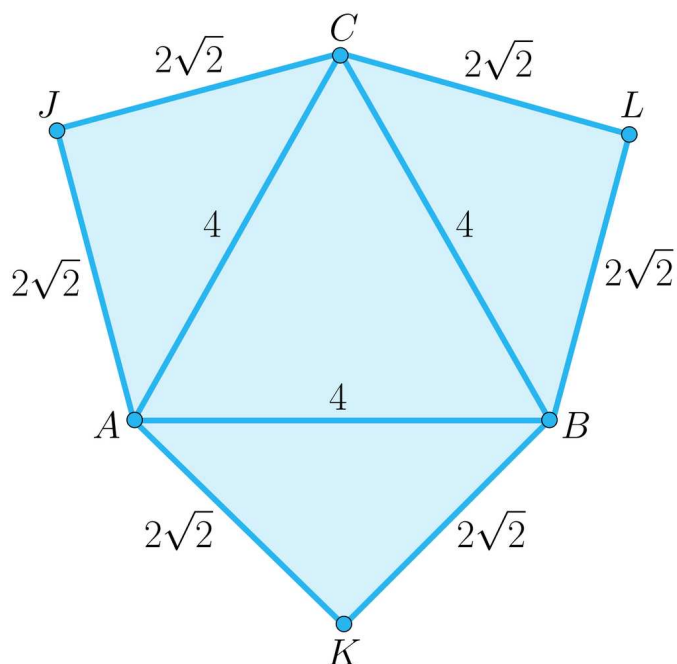
a

☐☐☐☐

Ćwiczenie 2



Dana jest siatka pewnego czworościanu.



Oblicz objętość tego czworościanu.

Ćwiczenie 3



Połącz w pary czworościany z ich cechami charakterystycznymi.

ostrosłup prosty trójkątny

wszystkie ściany są przystającymi trójkątami równobocznymi

ostrosłup prawidłowy trójkątny

ściany boczne są trójkątami równoramiennymi

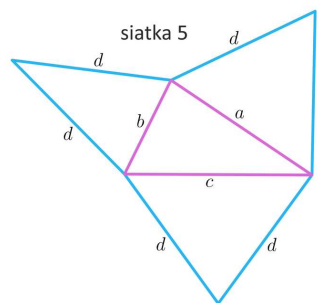
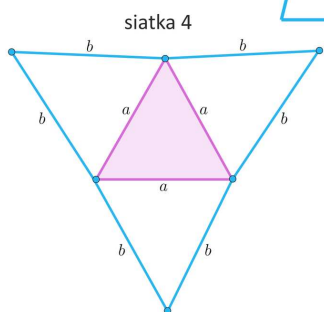
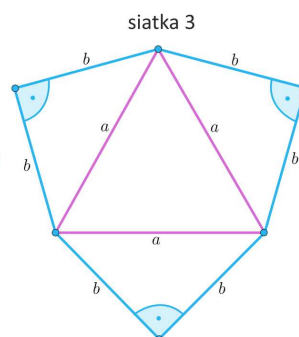
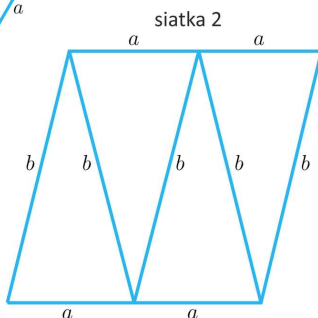
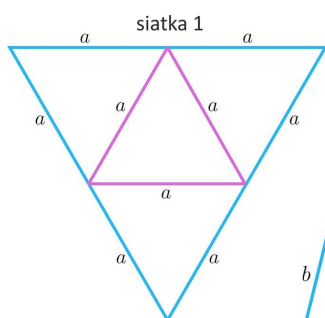
czworościan foremny

ściany boczne są trójkątami równoramiennymi, zaś podstawa jest trójkątem równobocznym

Ćwiczenie 4



Poniżej narysowane są siatki pewnych czworościanów. Do każdego czworościanu przeciągnij i upuść jego nazwy oraz własności. Różne litery oznaczają różne wielkości.



siatka 1

Ma dokładnie trzy krawędzie tej samej długości.

Ma dokładnie trzy krawędzie tej samej długości.

siatka 2

Jest czworościanem foremnym.

Jest ostrosłupem prawidłowym.

Jest ostrosłupem prawidłowym.

siatka 3

Jest ostrosłupem prostym.

Wszystkie ściany mają takie samo pole.

siatka 4

Ma cztery krawędzie długości b oraz dwie krawędzie długości a .

Jest ostrosłupem prawidłowym.

siatka 5

Ma dokładnie trzy krawędzie tej samej długości.

Wszystkie ściany mają takie samo pole.

Ćwiczenie 5



Jaka jest objętość czworościanu, którego krawędzie zawierają się w przekątnych ścian sześcianu o krawędzi 6?

Ćwiczenie 6



Rozwiąż test. Oceń poprawność zdań.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Objętość kuli opisanej na czworościanie foremnym jest większa niż objętość tego czworościanu.	☐	☐
Środek kuli wpisanej w czworościan jest równoodległy od wszystkich wierzchołków tego czworościanu.	☐	☐
Środek kuli opisanej na czworościanie leży zawsze wewnątrz tego czworościanu.	☐	☐
Środek kuli opisanej na czworościanie jest równoodległy od wierzchołków tego czworościanu.	☐	☐

Ćwiczenie 7



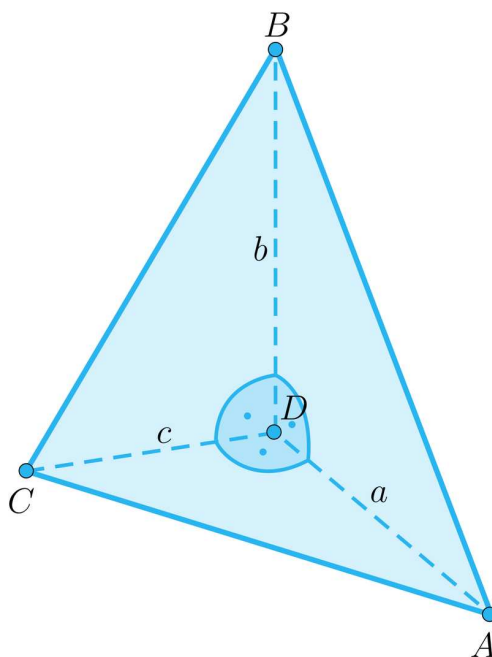
Udowodnij, że jeśli wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa trójkątnego mają równe długości, to jest to ostrosłup prosty.

Ćwiczenie 8



Dany jest czworościan $ABCD$. Krawędzie wychodzące z wierzchołka D tego czworościanu są parami prostopadłe. Wykaż, że kwadrat pola trójkąta ABC jest równy sumie kwadratów pól trójkątów ADC , BDC oraz ADB .

Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku:



Uporządkuj poniższe wypowiedzi, aby otrzymać poprawne rozwiązanie zadania.

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkątach BHA i BHC otrzymujemy równania:

Teraz naszym celem jest pokazanie, że kwadrat pola trójkąta ABC jest równy $\frac{1}{4}(a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2)$.

$$h^2 + x^2 = a^2 + b^2 \text{ oraz } h^2 + \left(\sqrt{a^2 + c^2} - x\right)^2 = b^2 + c^2$$

Zauważmy najpierw, że przy przyjętych oznaczeniach suma kwadratów pól trójkątów ADC , BDC oraz ADB jest równa

$$P_{ADC}^2 + P_{BDC}^2 + P_{ADB}^2 = \left(\frac{1}{2}ac\right)^2 + \left(\frac{1}{2}bc\right)^2 + \left(\frac{1}{2}ab\right)^2.$$

Aby to osiągnąć, wyznaczamy długości odcinków BC , CA i AB w zależności od a ,

b, c .

Mając dane długości odcinków AB , CA i BC , możemy obliczyć wysokość trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka B .

W tym celu oznaczmy spodek tej wysokości przez H , jej długość przez h oraz $|AH| = x$.

Wówczas $|CH| = |CA| - x = \sqrt{a^2 + c^2} - x$.

Wobec powyższego kwadrat pola trójkąta ABC jest równy $\frac{1}{4}(a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2)$, co dowodzi tezy twierdzenia.

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkątach BCD , BDA oraz ADC mamy:

$$|AB| = \sqrt{a^2 + b^2}, |CA| = \sqrt{a^2 + c^2}, |BC| = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Teraz jesteśmy już gotowi wyrazić pole trójkąta ABC w zależności od a, b, c :

Powyższe wyrażenie po uproszczeniu przyjmuje postać $\frac{1}{4}(a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2)$.

$$h = \sqrt{\frac{a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2}{a^2 + c^2}}$$

Po odjęciu powyższych równań stronami otrzymujemy $x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + c^2}}$. Zaś po podstawieniu wyznaczonego x do wybranego z nich mamy:

$$\begin{aligned} P_{ABC} &= \frac{1}{2}|BH| \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2}{a^2 + c^2}} \cdot \sqrt{a^2 + c^2} = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2} \end{aligned}$$

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Czworościán

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- odróżnia czworościán od innych brył;
- rozpoznaje czworościány szczególne;
- wykorzystuje własności czworościánu do rozwiązywania zadań z geometrii przestrzennej.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;

- mapa myśli.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu;
- projektor multimedialny;
- e-podręcznik;
- arkusze papieru, pisaki.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie zastanawiają się z czym kojarzą słowo czworościan podają przykłady jak taka bryła wygląda.
2. Nauczyciel prosi uczniów aby przypomnieli definicję ostrosłupa oraz jego podstawowe własności.
3. Nauczyciel podaje temat lekcji, wspólnie z uczniami określa kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie definiują czworościan i jego własności.
2. Nauczyciel dzieli uczniów na 4 grupy. Każda z grup tworzy mapę myśli zawierającą podział czworościanów i ich własności. Po prezentacji prac grup powstaje jedna, wspólna dla całej klasy mapa myśli z klasyfikacją czworościanów.
3. Wybrani uczniowie rysują siatki dla poszczególnych czworościanów.
4. Uczniowie w grupach rozwiązują ćwiczenie 4 w sekcji „Sprawdź się”.
5. Uczniowie analizują przykłady pokazujące czworościan opisany na kuli i wpisany w kulę.
6. Uczniowie zapoznają się z prezentacją multimedialną i rozwiązują polecenie z nią związane.
7. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 5-7 w sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji.
2. Na zakończenie nauczyciel dokonuje oceny pracy wylosowanej grupy. Prosi o samoocenę uczniów dotyczącą współpracy w zespole oraz wykonanego zadania. Dokonuje oceny pracy wybranych uczniów.

Praca domowa:

- Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane na zajęciach.

Materiały pomocnicze:

[Czworościan foremny](#)

Wskazówki metodyczne:

Prezentację multimedialną i polecenie z nią związane można wykorzystać jako zadania domowe. Elementy znajdujące się w prezentacji multimedialnej można również wykorzystać w lekcji „Czworościan foremny” lub „Kąty między ścianami w czworoscianie”.