



Liczba permutacji – zadania ze złożonymi warunkami

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Liczba permutacji – zadania ze złożonymi warunkami

Źródło: Ellen Qin, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W tej lekcji pokażemy zastosowania twierdzenia o liczbie permutacji.

W prezentowanych przykładach, modelowanych za pomocą permutacji, pokażemy, jak obliczyć wszystkie wyniki doświadczeń poddanych szczególnym ograniczeniom. Złożone zadania często wymagają niestandardowego podejścia, m.in. przechodzenia na zdarzenia przeciwne, tj. określania zaprzeczenia wskazanych warunków.

W rozwiązaniach omawianych przykładów istotne zastosowanie mają również reguły: dodawania, mnożenia i równoliczności.

Twoje cele

- Będziesz doskonalić umiejętność posługiwania się twierdzeniem o liczbie permutacji.
- Nauczysz się, jak analizować modele odwołujące się do pojęcia permutacji w zadaniach dotyczących m.in. rozmieszczeń, w których sąsiednie elementy spełniają szczególne warunki.
- Utrwalisz umiejętność obliczania wszystkich możliwych wyników doświadczeń losowych, które opisywane są jako permutacje poddane pewnym ograniczeniom.
- Stosując regułę równoliczności nauczysz się zapisywać liczbę wszystkich możliwych wyników danego doświadczenia na dwa sposoby, dzięki czemu obliczysz, ile jest

wyników spełniających zadane warunki.

Przeczytaj

W poniższych przykładach wykorzystywać będziemy własności [permutacji](#).

W rozwiązaniach tych przykładów będziemy stosować [twierdzenie o liczbie permutacji](#).

Przykład 1

Obliczymy, ile jest wszystkich [permutacji](#) zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ dwudziestu początkowych dodatnich liczb całkowitych, w których elementy 1 oraz 2 nie sąsiadują ze sobą.

Rozwiązanie

• I sposób:

Zauważmy, że jeżeli wyznaczymy liczbę niesąsiadujących miejsc dla liczb 1 oraz 2, to w każdym z otrzymanych przypadków te liczby rozmieścimy na przydzielonych miejscach na $2!$ sposobów, a pozostałe 18 liczb rozmieścimy na pozostałych miejscach na $18!$ sposobów.

Najpierw wybieramy więc parę niesąsiadujących miejsc w [permutacji](#), postępując według zasady: do miejsca o mniejszym numerze dobieramy miejsce o większym numerze. Wtedy

- do miejsca numer 1 mamy 18 miejsc możliwych do wyboru (od 3 do 20),
- do miejsca numer 2 mamy 17 miejsc możliwych do wyboru (od 4 do 20),
- do miejsca numer 3 mamy 16 miejsc możliwych do wyboru (od 5 do 20),

i tak dalej, aż do miejsca numer 18, gdzie mamy 1 miejsce do wyboru (ostatnie, numer 20).

Zatem wszystkich możliwych miejsc do wyboru dla pary liczb 1, 2 jest

$$1 + 2 + 3 + \dots + 18 = \frac{18 \cdot 19}{2} = 9 \cdot 19 = 171.$$

Korzystając z [reguły mnożenia](#), stwierdzamy ostatecznie, że wszystkich [permutacji](#) spełniających warunki zadania jest $171 \cdot 2! \cdot 18! = 9 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 18! = 18 \cdot 19!$

• II sposób:

Zauważamy, że wszystkich [permutacji](#) zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ jest $20!$. Natomiast [permutacji](#) zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$, w których elementy 1, 2 sąsiadują ze sobą jest $19! \cdot 2!$.

Wynika z tego, że [permutacji](#) spełniających warunki zadania jest

$$20! - 19! \cdot 2! = (20 - 2) \cdot 19! = 18 \cdot 19!$$

Przykład 2

Obliczymy, na ile sposobów możemy rozmieścić liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ dwudziestu początkowych dodatnich liczb całkowitych w 5 rzędach po 4 liczby tak, aby elementy 1 oraz 2 nie sąsiadowały ze sobą. Przyjmujemy tutaj, że liczby sąsiadują ze sobą jeśli leżą obok siebie w tym samym rzędzie.

Rozwiązanie

Dla porządku numerujemy miejsca w rzędach:

- w rzędzie I: od 1 do 4,
- w rzędzie II: od 5 do 8,
- w rzędzie III: od 9 do 12,
- w rzędzie IV: od 13 do 16,
- w rzędzie V: od 17 do 20.

Rozwiązanie przedstawimy w nawiązaniu do rozwiązania poprzedniego przykładu i obu przedstawionych tam sposobów.

W nawiązaniu do pierwszego sposobu zauważmy, że do liczby miejsc wtedy obliczonych wystarczy doliczyć 4 pary miejsc, które mają sąsiednie numery, ale w tym przypadku już nie sąsiadują ze sobą.

Są to pary miejsc o numerach: 4 i 5, 8 i 9, 12 i 13 oraz 16 i 17. Zatem ogółem niesąsiadujących miejsc dla liczb 1 oraz 2 jest $171 + 4 = 175$, a więc szukana liczba rozmieszczeń jest równa $175 \cdot 18! \cdot 2!$.

W nawiązaniu do drugiego sposobu zauważmy, że od liczby $19! \cdot 2!$ [permutacji](#), w których elementy 1 oraz 2 sąsiadują ze sobą należy odjąć 4 wymienione powyżej przypadki, które już nie opisują pary sąsiednich miejsc. Otrzymamy wtedy, że przypadków dla sąsiadujących miejsc jest

$$19! \cdot 2! - 4 \cdot 18! \cdot 2! = (19 - 4) \cdot 18! \cdot 2! = 15 \cdot 18! \cdot 2!.$$

Zatem przypadków, kiedy 1 oraz 2 nie sąsiadują ze sobą jest

$$\begin{aligned} 20! - 15 \cdot 18! \cdot 2! &= 20 \cdot 19 \cdot 18! - 15 \cdot 18! \cdot 2! = (19 \cdot 10 - 15) \cdot 18! \cdot 2! = \\ &= 175 \cdot 18! \cdot 2!. \end{aligned}$$

Przykład 3

Obliczymy, ile jest wszystkich [permutacji](#) zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, w których liczba 1 jest zapisana na wcześniejszym miejscu niż liczba 3, liczba 3 jest zapisana na wcześniejszym miejscu niż liczba 5 oraz liczba 5 jest zapisana na wcześniejszym miejscu niż liczba 7. Warunki zadania spełnia np. [permutacja](#) $(1, 6, 4, 3, 5, 7, 2)$.

- **I sposób:**

Najpierw wstawimy do tej **permutacji** liczby 2, 4 oraz 6: ponieważ dla trzech różnych elementów mamy wybrać trzy miejsca z siedmiu dostępnych, to wszystkich możliwości jest

$$V_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.$$

Zauważmy, że zgodnie z warunkami zadania jest tylko jeden sposób ustawienia liczb 1, 3, 5, 7 na pozostałych 4 miejscach. Wobec tego jest 210 **permutacji** spełniających warunki zadania.

- **II sposób:**

Wszystkich **permutacji** zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ jest $7!$

Zauważmy, że jeżeli w dowolnej **permutacji** tego zbioru ustalimy 4 miejsca dla liczb 1, 3, 5, 7, to rozmieszczając je na tych ustalonych miejscach tylko w jednym przypadku będą one zapisane w żądanej kolejności. A ponieważ wszystkich przypadków rozmieszczenia 4 liczb na 4 ustalonych miejscach jest $4!$, więc na podstawie **reguły równoliczności** dostajemy, że **permutacji** spełniających warunki zadania jest $\frac{7!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.

Przykład 4

Obliczymy, ile jest wszystkich **permutacji** zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, w których liczba 1 jest zapisana na wcześniejszym miejscu niż liczba 2, liczba 3 jest zapisana na wcześniejszym miejscu niż liczba 4 oraz liczba 5 jest zapisana na wcześniejszym miejscu niż liczba 6. Warunki zadania spełnia np. **permutacja** $(3, 5, 4, 7, 6, 1, 2)$.

Zauważmy, że jeżeli w dowolnej **permutacji** zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ustalimy dwa miejsca dla liczb 1, 2, to przy ich rozmieszczaniu na ustalonych miejscach będą one zapisane w żądanej kolejności w jednym przypadku z dwóch możliwych. Takich **permutacji** jest więc $\frac{1}{2} \cdot 7! = \frac{7!}{2}$.

Z kolei, gdy w każdej z tych $\frac{7!}{2}$ **permutacji** ustalimy dwa miejsca dla liczb 3, 4, to przy ich rozmieszczaniu na ustalonych miejscach będą one zapisane w żądanej kolejności w jednym przypadku z dwóch możliwych. Zatem **permutacji** spełniających oba powyższe warunki jest $\frac{1}{2} \cdot \frac{7!}{2} = \frac{7!}{2 \cdot 2}$.

Jeżeli następnie w każdej z tych $\frac{7!}{2 \cdot 2}$ **permutacji** ustalimy dwa miejsca dla liczb 5, 6, to przy ich rozmieszczaniu na ustalonych miejscach będą one zapisane w żądanej kolejności w jednym przypadku z dwóch możliwych. Wobec tego **permutacji** spełniających wszystkie trzy podane warunki jest $\frac{1}{2} \cdot \frac{7!}{2 \cdot 2} = \frac{7!}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 630$.

Przykład 5

Permutację $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ nazwiemy *ciekawą*, jeśli spełniony jest warunek

$$x_1 + x_2 < x_6 + x_7.$$

Wykażemy, że wszystkich *ciekawych permutacji* jest 2208.

Dowód

Liczba wszystkich **permutacji** $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ jest równa $7!$

Wszystkie te **permutacje** możemy podzielić na trzy rozłączne zbiory:

- zbiór **permutacji ciekawych** (dla każdej z nich spełniony jest warunek $x_1 + x_2 < x_6 + x_7$),
- zbiór **permutacji antyciekawych**, dla których spełniony jest warunek $x_1 + x_2 > x_6 + x_7$,
- oraz zbiór **permutacji obojętnych**, dla których spełniony jest warunek $x_1 + x_2 = x_6 + x_7$.

Zauważmy, że każdej **permutacji ciekawej** można wzajemnie jednoznacznie przyporządkować **permutację antyciekawą**: wystarczy w **permutacji** jednego typu zamienić jednocześnie wyrazy pierwszy z ostatnim oraz drugi z przedostatnim a otrzymamy **permutację** drugiego typu.

Na podstawie **reguły równoliczności** stwierdzamy zatem, że liczba wszystkich **permutacji ciekawych** jest równa liczbie **permutacji antyciekawych**.

Obliczymy, ile jest **permutacji obojętnych**.

Zauważmy, że po wyznaczeniu przykładowej czwórki (x_1, x_2, x_6, x_7) różnych elementów wybranych ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, które spełniają warunek $x_1 + x_2 = x_6 + x_7$ możemy od razu obliczyć, że jest 8 wszystkich czwórek (x_1, x_2, x_6, x_7) , które są szczególnymi **permutacjami** wyznaczonej czwórki. Mianowicie, dla tej szczególnej wyznaczonej jak powyżej czwórki warunek zostanie zachowany, gdy:

- wymienimy ze sobą wartości w parze x_1, x_2 ,
- wymienimy ze sobą wartości w parze x_6, x_7
- zamienimy ze sobą wartości par x_1, x_2 z x_6, x_7 .

Zatem każda znaleziona czwórka (x_1, x_2, x_6, x_7) różnych elementów wybranych ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, które spełniają warunek $x_1 + x_2 = x_6 + x_7$ jest reprezentantem $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ czwórek (x_1, x_2, x_6, x_7) z różnych **permutacji obojętnych**. Ponieważ do każdego z takiej grupy 8 przypadków pozostałe elementy x_3, x_4, x_5

permutacji obojętnej można dopisać na $3!$ sposobów, więc liczba **permutacji obojętnych** jest równa $8 \cdot 3! \cdot n$, gdzie n to liczba reprezentantów różnych czwórek (x_1, x_2, x_6, x_7) .

Czwórki te będziemy odróżniać ze względu na wartość sumy x_1, x_2 oraz przez reprezentanta, którego wyrazy spełniają warunek $x_1 < x_6 < x_7 < x_2$.

Mamy wtedy następujące przypadki:

1. $x_1 + x_2 = 5$, którą reprezentuje jedynie czwórka $(1, 4, 2, 3)$,
2. $x_1 + x_2 = 6$, którą reprezentuje jedynie czwórka $(1, 5, 2, 4)$,
3. $x_1 + x_2 = 7$, którą reprezentują trzy czwórki: $(1, 6, 2, 5)$, $(1, 6, 3, 4)$ oraz $(2, 5, 3, 4)$,
4. $x_1 + x_2 = 8$, którą reprezentują trzy czwórki: $(1, 7, 2, 6)$, $(1, 7, 3, 5)$ oraz $(2, 6, 3, 5)$,
5. $x_1 + x_2 = 9$, którą reprezentują trzy czwórki: $(2, 7, 3, 6)$, $(2, 7, 4, 5)$ oraz $(3, 6, 4, 5)$,
6. $x_1 + x_2 = 10$, którą reprezentuje jedynie czwórka $(3, 7, 4, 6)$,
7. $x_1 + x_2 = 11$, którą reprezentuje jedynie czwórka $(4, 7, 5, 6)$.

Zatem $n = 1 + 1 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 = 13$, co oznacza, że wszystkich **permutacji obojętnych** jest $13 \cdot 8 \cdot 3!$.

Wobec tego **permutacji ciekawych** jest $\frac{7! - 13 \cdot 8 \cdot 3!}{2} = 2208$.

To spostrzeżenie kończy dowód.

Słownik

permutacja zbioru n -elementowego

Każdy ciąg utworzony ze wszystkich elementów zbioru n -elementowego.

liczba wszystkich permutacji zbioru n -elementowego

Liczba wszystkich permutacji zbioru n -elementowego jest równa $P_n = n!$

reguła mnożenia

liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia polegającego na wykonaniu po kolei n czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z k_1 sposobów, druga – na jeden z k_2 sposobów, trzecia – na jeden z k_3 sposobów i tak dalej do n -tej czynności, która może zakończyć się na jeden z k_n sposobów, jest równa

$$k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$$

reguła równoliczności

Dwa zbiory A i B są równoliczne (mają tyle samo elementów) jeżeli ich elementy można przyporządkować wzajemnie jednoznacznie, to znaczy: każdemu elementowi zbioru A

przyporządkujemy dokładnie jeden element zbioru B oraz każdemu elementowi zbioru B przyporządkujemy dokładnie jeden element zbioru A

reguła dodawania

jeżeli zbiory $A_1, A_2, \dots, A_n$ są parami rozłączne, to liczba elementów zbioru $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ jest równa sumie liczb elementów każdego ze zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_n$: $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$

ciąg

funkcja, której dziedziną jest zbiór wszystkich dodatnich liczb całkowitych lub pewien jego podzbiór, a wartościami są liczby rzeczywiste

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z przedstawioną poniżej galerią. Przeanalizuj zaprezentowane w niej rozwiązanie zadania dotyczącego wyznaczenia wszystkich permutacji zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, w których wyróżnione trzy elementy nie są zapisane obok siebie.

Polecenie 2

Rozumując podobnie, jak w rozwiązaniu zadania omówionego w powyższej animacji oblicz, ile jest wszystkich permutacji zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, w których elementy 2, 4, 6, 8 nie są zapisane obok siebie.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Grupa 6 osób, wśród których są Aniela, Ignacy i Zosia zajmuje miejsca ponumerowane kolejno od 14 do 19 w tym samym rzędzie sali kinowej.

Na ile sposobów może ta grupa rozmieścić się tak, aby numery miejsc na których usiedli Aniela, Ignacy i Zosia, w tej właśnie kolejności, tworzyły ciąg rosnący?

W poniższe kratki wpisz kolejno cyfry: setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

--	--	--

Ćwiczenie 2



W pewnej grupie są Hela, Jagna i jeszcze 10 innych osób. Rozpatrzmy następujące przypadki.

(a) całą tę dwunastoosobową grupę ustawiamy w jednym rzędzie,

(b) całą tę dwunastoosobową grupę ustawiamy w dwóch rzędach po 6 osób,

(c) całą tę dwunastoosobową grupę ustawiamy w trzech rzędach po 4 osoby,

(d) całą tę dwunastoosobową grupę ustawiamy w czterech rzędach po 3 osoby.

Oblicz, ile jest w każdym z tych przypadków wszystkich możliwych ustawień takich, żeby Hela i Jagna nie stały obok siebie.

Przyporządkuj podane po prawej liczby do odpowiedniego przypadku.

(b)	$116 \cdot 10!$
(c)	$56 \cdot 2! \cdot 10!$
(a)	$10 \cdot 11!$
(d)	$19 \cdot 3! \cdot 10!$

Ćwiczenie 3



Rozpatrujemy wszystkie liczby sześciocyfrowe zapisane za pomocą cyfr 8, 7, 6, 5, 4, 3 bez powtarzania jakiegokolwiek cyfry.

Przyjmijmy, że jest wśród nich n wszystkich takich liczb, w których cyfra 3 jest zapisana w wyższym rzędzie dziesiętnym niż cyfra 8 i jednocześnie cyfra 7 jest zapisana w niższym rzędzie dziesiętnym niż cyfra 6 (te warunki spełnia np. liczba 436587).

Zaznacz wszystkie prawdziwe nierówności.

☐ $n < \frac{8!}{4!}$

☐ $n < \frac{6!}{4}$

☐ $n > \frac{8!}{5!}$

☐ $n > \frac{6!}{3!}$

Ćwiczenie 4



Oznaczamy:

- przez s liczbę wszystkich permutacji $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$ zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, które spełniają warunek $x_1 < x_8$,
- przez t liczbę wszystkich permutacji $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$ zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, które dla $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ spełniają warunek: jeśli $x_i = 3$ i $x_j = 4$, to $i < j$.

Połącz w pary równe liczby.

$2t + 16s$

$15 \cdot 8!$

$3t + 5s$

$17 \cdot 8!$

$t + 21s$

$16 \cdot 8!$

$4t + 4s$

$20 \cdot 8!$

Ćwiczenie 5



Rozpatrujemy wszystkie permutacje zbioru

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

Ile jest wśród nich wszystkich takich ciągów, w których iloczyn każdych dwóch kolejnych wyrazów jest parzysty?

☐ $5! \cdot 4!$

☐ $3 \cdot 4! \cdot 4!$

☐ $4! \cdot 4!$

☐ $2 \cdot 4! \cdot 4!$

Ćwiczenie 6



Permutację $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ nazwiemy *udaną*, jeśli spełniony jest warunek

$$x_2 + x_6 > x_3 + x_4.$$

Wynika stąd, że wszystkich *udanych* permutacji jest: .

Ćwiczenie 7



Rozpatrujemy wszystkie permutacje dziesięcioelementowego zbioru

$$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}.$$

Oblicz ile jest wśród nich takich ciągów, w których każda samogłoska sąsiaduje zarówno z lewej jak i z prawej strony ze spółgłoską (w zbiorze A są trzy samogłoski: a, e, i).

☐ $7! \cdot \frac{8!}{3!}$

☐ $\frac{10!}{3!}$

☐ $7! \cdot \frac{6!}{3!}$

☐ $\frac{10!}{7!}$

Ćwiczenie 8



Dla każdej permutacji $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$ zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ rozpatrujemy sumę

$$|x_1 - x_2| + |x_3 - x_4| + |x_5 - x_6| + |x_7 - x_8|.$$

Następnie dodajemy wszystkie tak otrzymane sumy i wynik tego działania oznaczamy przez S . Wpisz w puste pole odpowiednią liczbę.

Wynika stąd, że $\frac{S}{6!} =$.

Dla nauczyciela

Autor: Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Liczba permutacji – zadania ze złożonymi warunkami

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XI. Kombinatoryka

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- posługuje się twierdzeniem o liczbie permutacji,
- analizuje modele odwołujące się do pojęcia permutacji w zadaniach dotyczących m.in. rozmieszczeń, w których sąsiednie elementy spełniają szczególne warunki,
- oblicza wszystkie możliwe wyniki doświadczeń losowych, które opisywane są jako permutacje poddane pewnym ograniczeniom,
- stosuje regułę równoliczności nauczysz się zapisywać liczbę wszystkich możliwych wyników danego doświadczenia na dwa sposoby, dzięki czemu obliczysz, ile jest wyników spełniających zadane warunki.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda tekstu przewodniego.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- telefony z dostępem do internetu.

Przebieg lekcji**Przed lekcją:**

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat lekcji i wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają pojęcie permutacji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w parach zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszycie minimum dwa pytania. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zapoznali się z treścią materiału w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych”. Następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.

3. Uczniowie wykonują wskazane przez nauczyciela ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy omawiane są na forum i komentowane przez nauczyciela.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończone na zajęciach.

Materiały pomocnicze:

- [Permutacja](#)
- [Inne spojrzenie. Permutacje, kombinacje, wariacje](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Liczba permutacji – zadania ze złożonymi warunkami „.