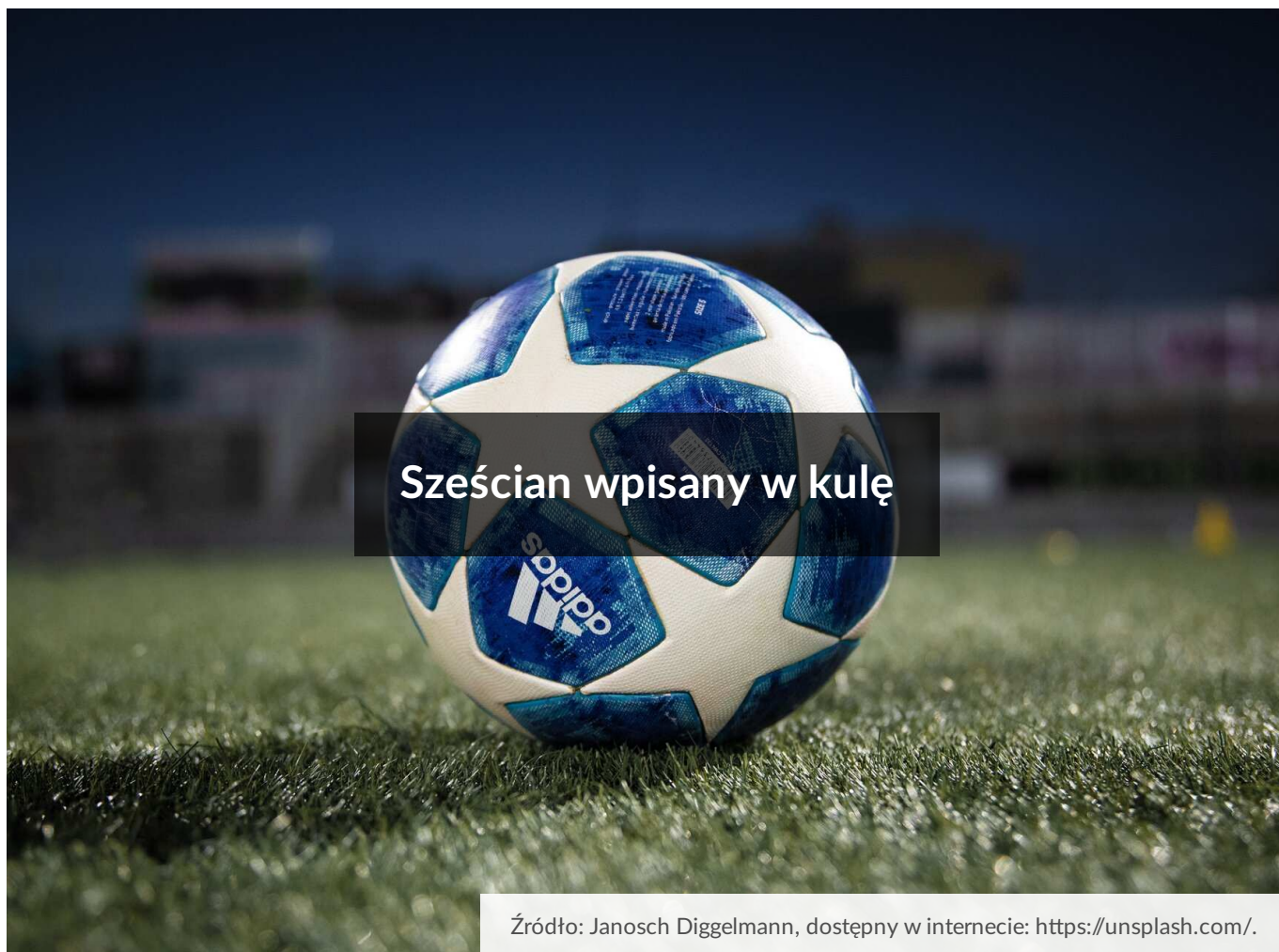




Sześćcian wpisany w kulę

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Na co dzień żyjemy w trójwymiarowej przestrzeni. Pomimo to, zadania o bryłach sprawiają nam sporo kłopotu. Kluczem do rozwiązania zadania z geometrii jest rysunek, ale często nie potrafimy wykonać go w takim rzucie, na którym dobrze widać wielkości podane w zadaniu. Ponieważ rozwiązanie zadania z geometrii przestrzennej sprowadza się do rozwiązania zadania z geometrii płaskiej, warto nauczyć się rysować taki przekrój danej bryły płaszczyzną, który jest znaną nam figurą płaską i zawiera poszukiwaną wielkość oraz możliwie wiele danych wielkości. Tę sztuczkę wykorzystamy do rozwiązania zadań o kuli opisanej na sześciacie.

Twoje cele

- Poznasz własności sześciatu wpisanego w kulę.
- Zastosujesz wzory na pole powierzchni i objętość kuli oraz sześciatu.

Przeczytaj

Własności sześcianu i kuli są wszystkim dobrze znane. Potrafimy obliczyć objętość oraz pole powierzchni tych figur przestrzennych. W tym materiale zajmiemy się obiektem, który jest połączeniem kuli i sześcianu oraz nauczymy się, jak wykonać przekrój, który pomoże nam w rozwiązaniu wielu zadań.

Przyjmijmy następującą definicję:

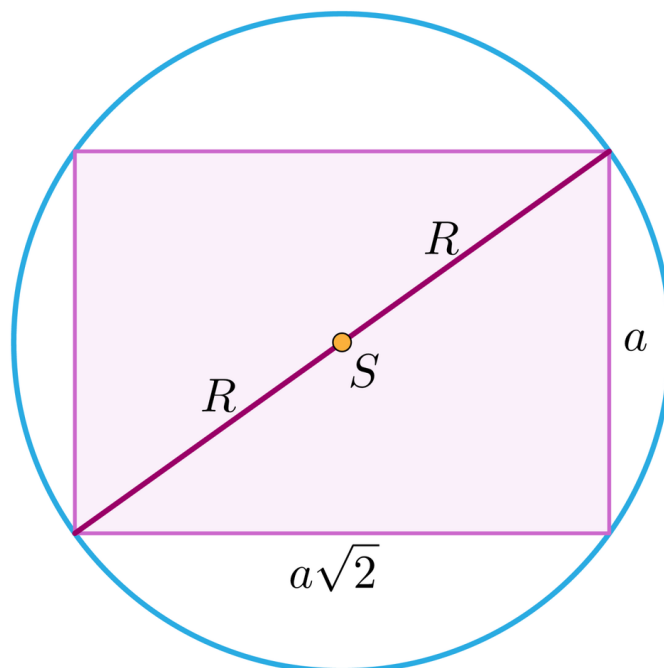
Definicja: sześcian wpisany w kulę

Sześcian jest wpisany w kulę, jeśli wszystkie wierzchołki sześcianu leżą na powierzchni kuli.

Możemy zamiennie używać określenia: **sześcian jest wpisany w kulę lub kula jest opisana na sześcianie**.

Zauważmy, że wszystkie wierzchołki sześcianu leżą na powierzchni kuli. Dwa koła wielkie kuli opisanej na sześcianie są zatem opisane na **przekroju** tego sześcianu zawierającym przekątne równoległych ścian. Zatem długości ich średnic są równe długościom przekątnych sześcianu.

We wszystkich przykładach i zadaniach będziemy posługiwać się właśnie opisanym wyżej przekrojem i oznaczeniami jak na rysunku poniżej.



a – długość krawędzi sześcianu

R – promień kuli opisanej na sześcianie

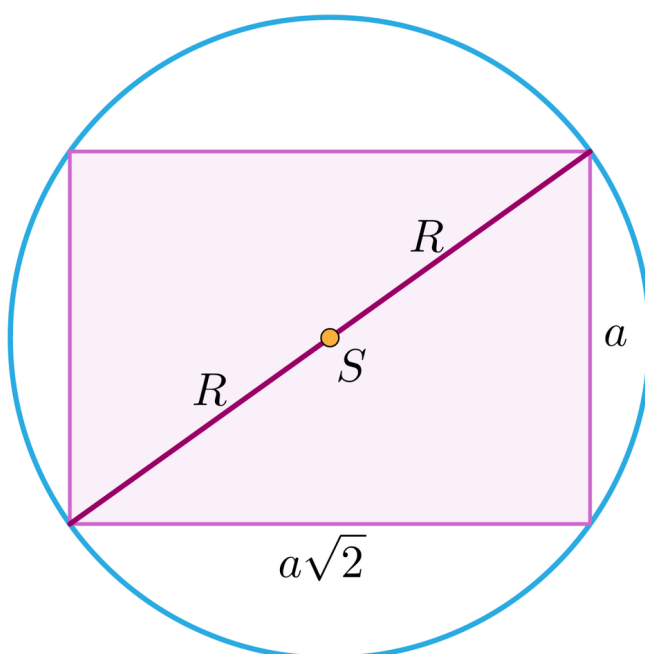
S – środek kuli opisanej na sześcianie

Przykład 1

Rozważmy sześcian o krawędzi długości 6 cm. Jaką objętość będzie miała kula opisana na tym sześcianie?

Rozwiązanie:

Do rozwiązania tego problemu wykorzystamy przekrój płaszczyzną zawierającą przekątną sześcianu i przekątną podstawy sześcianu.



Krawędź sześcianu $a = 6$ cm. Promień kuli R stanowi połowę długości przekątnej sześcianu, czyli $R = \frac{1}{2}a\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ cm.

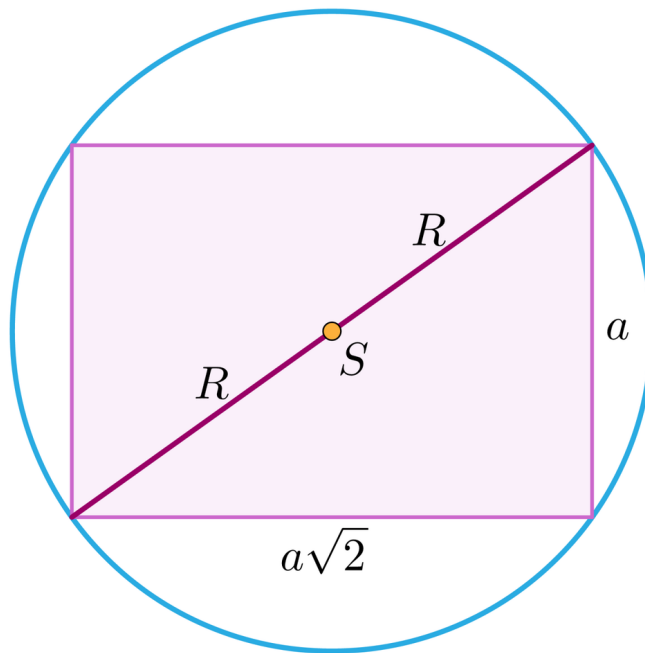
A zatem $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot 81\sqrt{3}\pi = 108\sqrt{3}\pi$ cm³.

Przykład 2

Rozważmy kulę o objętości 36π . Jaka będzie długość krawędzi sześcianu wpisanego w tę kulę?

Rozwiązanie:

Do rozwiązania tego problemu wykorzystamy [przekrój](#) płaszczyzną zawierającą przekątną sześcianu i przekątną podstawy sześcianu.



Mając daną objętość kuli możemy obliczyć długość jej promienia. Wystarczy podstawić do wzoru $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Otrzymujemy równanie:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi$$

$$\frac{4}{3}R^3 = 36$$

$$R^3 = 27$$

$$R = 3.$$

Długość krawędzi sześcianu możemy teraz obliczyć na dwa sposoby:

I. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa. Otrzymujemy wówczas równanie:

$$a^2 + (a\sqrt{2})^2 = (2R)^2$$

$$3a^2 = 36$$

$$a^2 = 12$$

$$a = 2\sqrt{3}$$

II. Korzystając ze wzoru na przekątną sześcianu. Otrzymujemy wówczas równanie:

$$a\sqrt{3} = 2R$$

$$a\sqrt{3} = 6$$

$$a = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

Przykład 3

Jaki procent objętości kuli stanowi objętość sześcianu wpisanego w tę kulę? Przyjmijmy przybliżenie $\pi \approx 3,14$.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy, że krawędź sześcianu ma długość a .

Zatem objętość tego sześcianu $V_s = a^3$.

Promień kuli na tym sześcianie $R = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

Zatem objętość kuli $V_k = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}a\sqrt{3}\right)^3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \pi a^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$.

Obliczamy stosunek objętości sześcianu do objętości kuli i wyrażamy go w procentach:

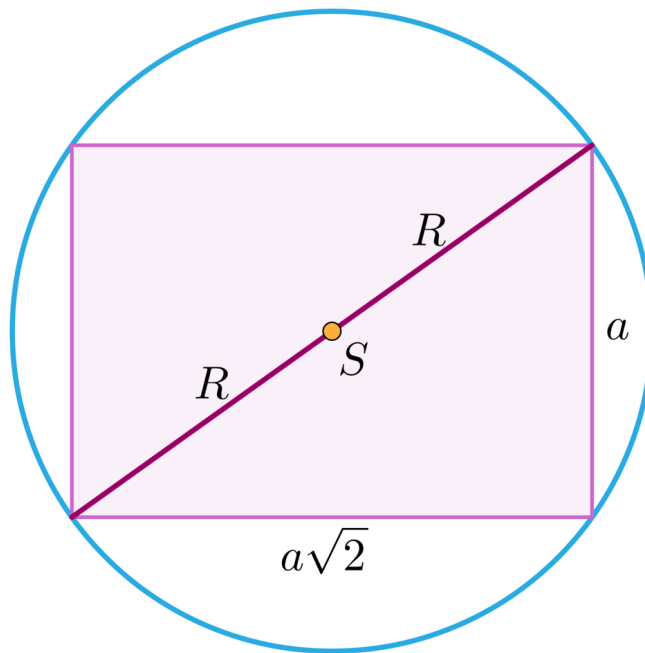
$$x = \frac{a^3}{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3} \cdot 100\% = \frac{2\sqrt{3}}{3\pi} \cdot 100\% \approx \frac{2 \cdot 1,73}{3 \cdot 3,14} \cdot 100\% \approx 36,73\%.$$

Przykład 4

Czy kulę o powierzchni $48\pi \text{ cm}^2$ można opisać na sześcianie o objętości 64 cm^3 ?
Odpowiedź uzasadnimy rachunkowo.

Rozwiązanie:

Wykonajmy odpowiedni rysunek. Będzie to przekrój sześcianu płaszczyzną przechodzącą przez środek kuli i przekątną podstawy sześcianu.



Nasze zadanie to porównanie dwóch wartości: średnicy kuli i przekątnej sześcianu.

Aby obliczyć promień kuli rozwiązujemy równanie wykorzystując dane w zadaniu:

$$4\pi R^2 = 48\pi$$

$$R^2 = 12$$

$$R = 2\sqrt{3}$$

$$\text{czyli } 2R = 4\sqrt{3}.$$

Do obliczenia długości krawędzi sześcianu wykorzystamy wzór na objętość sześcianu o krawędzi a .

$$a^3 = 64$$

$$a = 4$$

Zatem przekątna sześcianu ma długość

$$a\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

Wynika stąd, że przekątna sześcianu jest równa średnicy kuli, czyli kulę o powierzchni $48\pi \text{ cm}^2$ można opisać na sześcianie o objętości 64 cm^3 .

Słownik

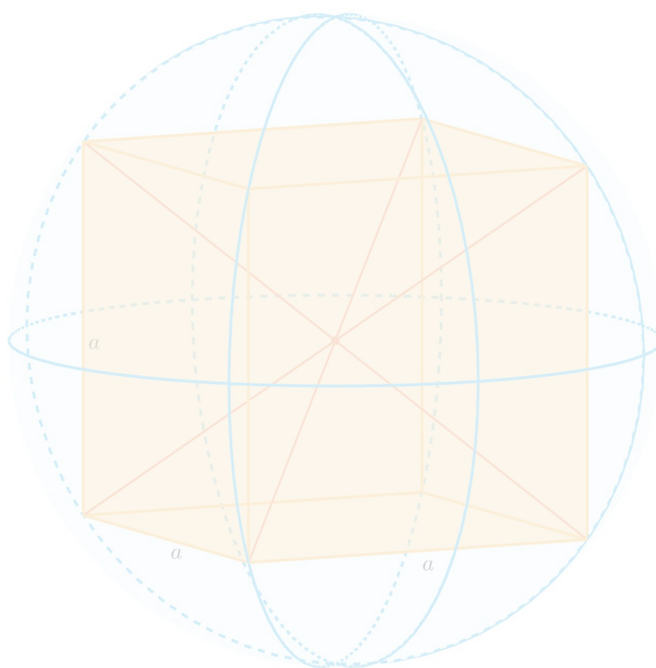
przekrój

figura płaska powstająca w miejscu przecięcia bryły geometrycznej pewną płaszczyzną

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą symulacją interaktywną. Przedstawiono w niej sześcian wpisany w kulę. Narysuj w zeszycie przekrój płaszczyzną przechodzącą przez środek kuli i przekątną podstawy sześcianu.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1DszPopy>

Polecenie 2

Na podstawie obserwacji symulacji interaktywnej oceń prawdziwość podanych zadań, zaznaczając odpowiednio prawdę lub fałsz.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Na każdym sześcianie można opisać kulę.	☐	☐
Średnica kuli opisanej na sześcianie jest dwa razy dłuższa od krawędzi tego sześcianu.	☐	☐
Środek kuli opisanej na sześcianie jest środkiem przekątnej tego sześcianu.	☐	☐

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Oceń prawdziwość podanych zadań zaznaczając odpowiednio prawdę lub fałsz.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Kula o promieniu 3 cm jest opisana na sześcianie o krawędzi $2\sqrt{3}$ cm.	☐	☐
Kula o promieniu 3 dm jest opisana na sześcianie o objętości 27 dm^3 .	☐	☐
Kula o objętości 36π jest opisana na sześcianie o krawędzi $2\sqrt{3}$.	☐	☐

Ćwiczenie 2



Oblicz pole powierzchni kuli opisanej na sześcianie o objętości 216 cm^3 . Podaj cyfrę setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku. Przyjmij przybliżenie $\pi \approx 3,14$.

$P =$

Ćwiczenie 3



Objętość kuli opisanej na sześcianie o powierzchni całkowitej 72 jest równa:

☐ 972π

☐ 2916π

☐ 36π

☐ 7776π

Ćwiczenie 4



Przekrój sześcianu płaszczyzną zawierającą jego przekątną i przekątną podstawy sześcianu jest prostokątem o polu równym $8\sqrt{2}$. Oblicz objętość kuli opisanej na tym sześcianie. Uzupełnij tekst tak, aby otrzymać rozwiązanie zadania. Kliknij w lukę, aby rozwinąć listę i wybrać prawidłową odpowiedź.

Zauważmy, że opisany w treści zadania prostokąt jest prostokątem o bokach .

Wykorzystując podane w zadaniu pole tego prostokąta otrzymujemy równanie

. Stąd krawędź sześcianu jest równa . Promień kuli opisanej na sześcianie jest równy , czyli . Podstawiając do wzoru na objętość kuli otrzymujemy czyli .

$R = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$

$V = 8\sqrt{6}\pi$

$a\sqrt{2}$ i a

$R = \sqrt{6}$

$a^2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

$a = 2\sqrt{2}$

$V = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{6})^3$

Ćwiczenie 5



Przeciagnij poprawną odpowiedź lub kliknij w lukę, aby wyświetlić listę i wybrać prawidłową odpowiedź.

Stosunek pola powierzchni sześcianu do pola powierzchni kuli opisanej na tym sześcianie wynosi:

- $\frac{6}{\pi}$
- 2π
- $\frac{\pi}{6}$
- 6π
- $\frac{\pi}{2}$
- $\frac{2}{\pi}$

Ćwiczenie 6



Krawędź sześcianu zwiększono 3 razy. Powierzchnia kuli opisanej na tym sześcianie zwiększy się wówczas dziewięciokrotnie. Wybierz odpowiedź TAK lub NIE i jej uzasadnienie spośród podanych.

TAK czy NIE	Uzasadnienie
TAK ☐	ponieważ skala podobieństwa $k = 3$ co oznacza, że przekątna sześcianu zwiększy się 3 razy, zatem promień kuli zwiększy się trzykrotnie. Stąd powierzchnia kuli zwiększy się 6-krotnie. ☐
	ponieważ skala podobieństwa $k = 3$ co oznacza, że pole powierzchni sześcianu zwiększy się 9-krotnie, zatem pole powierzchni kuli również zwiększy się 9-krotnie. ☐
NIE ☐	ponieważ powierzchnia kuli zwiększy się również trzykrotnie. ☐

Ćwiczenie 7



W pewnym sześcianie długość krawędzi zwiększono o 6. Zauważono wówczas, że przekątna tego sześcianu zwiększyła się czterokrotnie. Oblicz o ile zwiększyła się objętość kuli opisanej na tym sześcianie.

Ćwiczenie 8



W pewnym sześcianie, przekątna jest o 2 dłuższa od krawędzi tego sześcianu. Wykaż, że pole powierzchni kuli opisanej na tym sześcianie jest równe $(12 + 6\sqrt{3})\pi$.

Dla nauczyciela

Autor: Małgorzata Kantor – Szczęśniak

Przedmiot: Matematyka

Temat: Sześcian wpisany w kulę

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, poziom rozszerzony.

Podstawa programowa:

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje sześcian wpisany w kulę i potrafi naszkicować przekrój osiowy tej sytuacji,
- bada zależność między promieniem kuli wpisanej w sześcian a krawędzią sześcianu,
- stosuje wzory na pola powierzchni i objętość kuli oraz sześcianu,
- przeprowadza proste rozumowanie pomagające ustalić strategię rozwiązania zadania.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm,
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem symulacji interaktywnej i ćwiczeń interaktywnych,
- analiza pomysłów.

Formy pracy:

- praca w grupach,
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do Internetu,
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale,
- projektor multimedialny/ tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj” oraz przypomnienie zależności między polami powierzchni i objętościami brył podobnych.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat: „Sześcian wpisany w kulę” i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prowadzi rozmowę nauczającą w oparciu o symulację i problemy zawarte w poleceniu 2 z sekcji „Symulacja interaktywna” .
2. Nauczyciel dzieli klasę na 6 grup. Każda grupa otrzymuje do rozwiązania jedno ćwiczenie spośród ćwiczeń 1 – 6 w części „Sprawdź się”.
3. Wyznaczony przez nauczyciela uczeń omawia rozwiązanie zadania na forum klasy.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel omówia ewentualne problemy z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Po dzisiejszej lekcji powinienem/ powinna zapamiętać, że”

Praca domowa:

Uczniowie dobierają się w pary i rozwiązują ćwiczenia 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Kula i sfera](#)
- [Własności sześciątów i prostopadłościów](#)

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może wykorzystać symulację interaktywną do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania dotyczące tematu lekcji.