



Definicja funkcji. Sposoby przedstawiania funkcji

Przykłady funkcji. Określanie dziedziny i zbioru wartości funkcji. Zadania na zapisywanie funkcji w postaci grafu, tabelki, wykresu. Zadania na wykazanie zależności określonej dla badanej funkcji. Animacja - sposoby przedstawiania funkcji. Animacja - czy każdy graf/wykres jest funkcją. Ilustracje interaktywne: zależność między bokiem a polem powierzchni kwadratu, liczba oczek przy wielokrotnym rzucie kostką, dziedzina i wartości funkcji. Zasób zawiera ćwiczenia. Część ćwiczeń jest interaktywna.

Definicja funkcji. Sposoby przedstawiania funkcji

W tym materiale poznasz definicję funkcji oraz nauczysz się określać ją na różne sposoby. Nim przystąpisz do pracy możesz przypomnieć sobie zależności pomiędzy wielkościami w materiale [Definicja funkcji. Sposoby przedstawiania funkcji](#).

Definicja: Funkcja

Funkcją f ze zbioru X w zbiór Y nazywamy przyporządkowanie, które każdemu elementowi zbioru X przyporządkowuje dokładnie jeden element zbioru Y .

Symbolicznie piszemy $f : X \rightarrow Y$. Czytamy „funkcja f odwzorowuje zbiór X w zbiór Y ”.

- Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji, a jego elementy – argumentami funkcji f .
- Zbiór Y nazywamy przeciwdziedziną funkcji. Każdy element y zbioru Y , który został przyporządkowany co najmniej jednemu argumentowi x , nazywamy wartością funkcji f dla argumentu x , co zapisujemy symbolicznie $y = f(x)$. Zbiór Z tych elementów y nazywamy zbiorem wartości funkcji.

Przykład 1

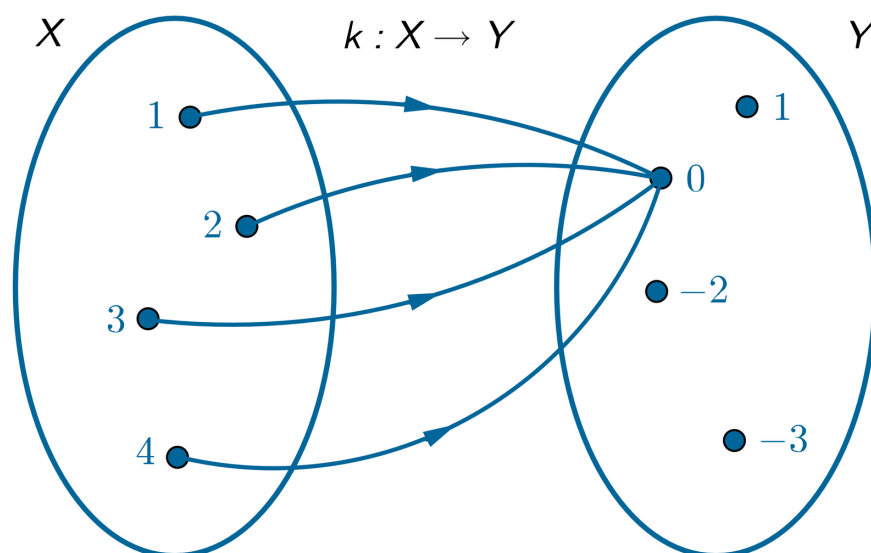
Dane są zbiory $X = \{1, 2, 3, 4\}$ oraz $Y = \{-3, -2, 0, 1\}$. Przedstawimy różne przykłady funkcji określonych na zbiorze X o wartościach ze zbioru Y .

Rozważmy różne sposoby opisu funkcji.

- Funkcja f opisana jest za pomocą tabeli.

x	$f(x)$
1	-3
2	-2
3	-1
4	0

- Funkcja k opisana jest za pomocą grafu.

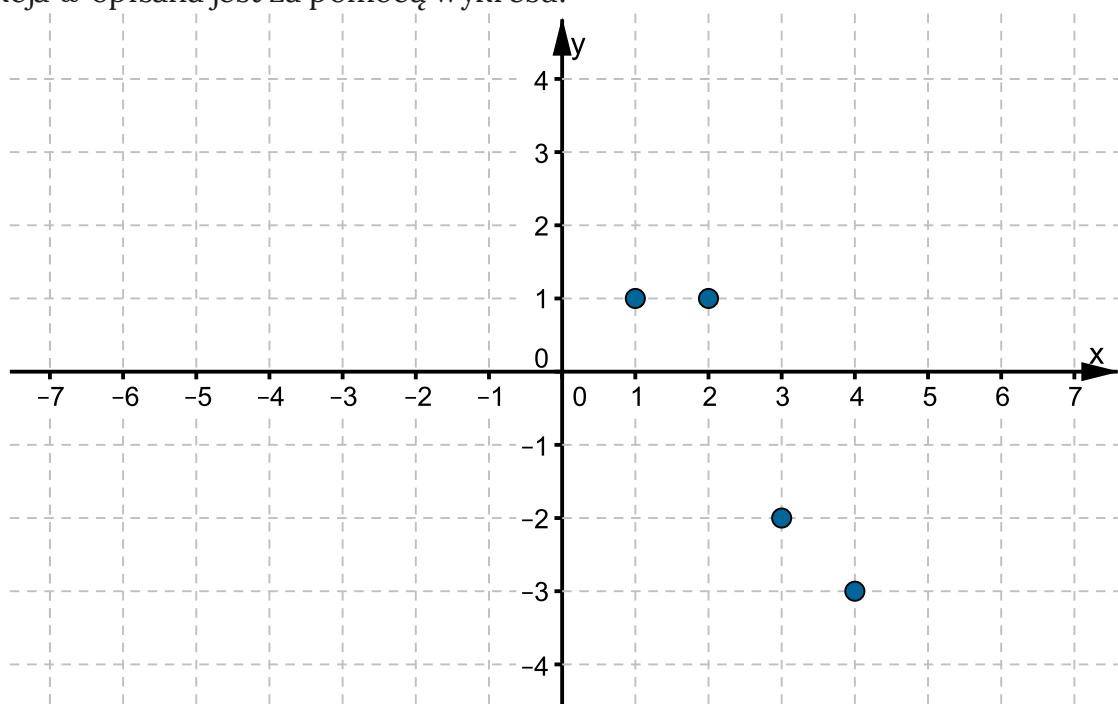


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- Funkcja g opisana jest słownie. Funkcja g każdej liczbie nieparzystej ze zbioru X przyporządkowuje wartość 1. Każdemu z pozostałych argumentów przyporządkowuje liczbę o 4 mniejszą.

Zatem: $g(1) = g(3) = 1$, $g(2) = 2 - 4 = -2$ i $g(4) = 4 - 4 = 0$.

- Funkcja w opisana jest za pomocą wykresu.



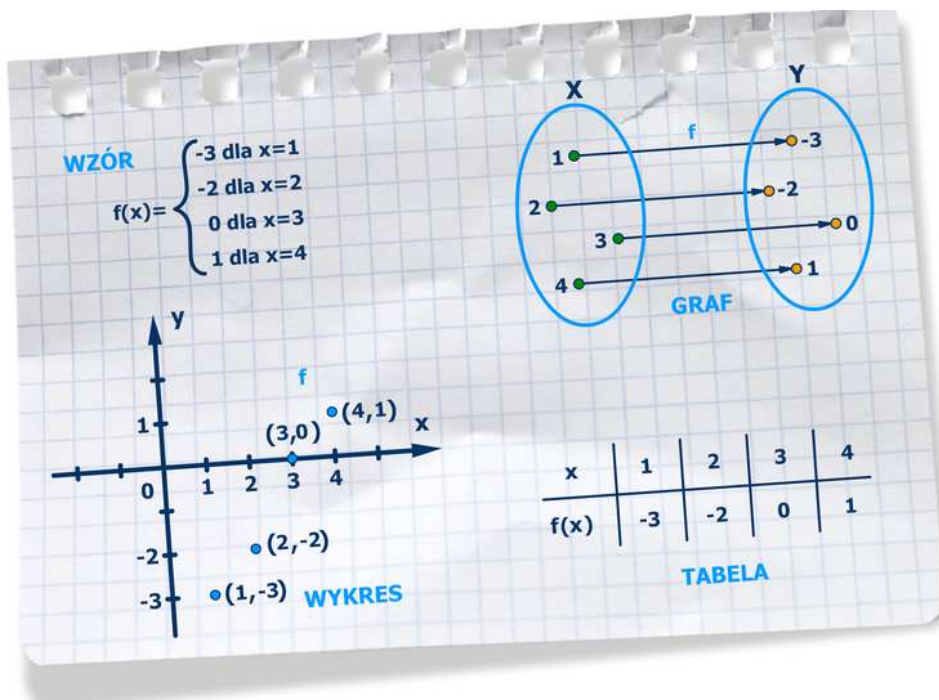
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- Funkcja z opisana jest za pomocą wzoru.

$$z(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x = 1 \\ -2 & \text{dla } x = 2 \\ 0 & \text{dla } x = 3 \\ 1 & \text{dla } x = 4 \end{cases}$$

Przykład 2

Zapoznaj się z poniższą animacją.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1El7RbryCDIP>

Pojecie_funkcji

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja pokazuje w jaki sposób możemy przedstawiać funkcje.

Ćwiczenie 1



Podaj przykład funkcji określonej na zbiorze $X = \{1, 4, 5, 7\}$ o wartościach ze zbioru $Y = \{-4, -1, 0, 1\}$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



Ile jest wszystkich funkcji określonych na zbiorze $X = \{1, 2, 3, 4\}$ o wartościach ze zbioru $Y = \{-3, -2, 0, 1\}$? Uzupełnij lukę, przeciągając odpowiednią liczbę.

Wszystkich takich funkcji jest

265

267

256

253

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 3

Zapoznaj się z poniższą animacją.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RpNU2W15Drkb8>

Pojecie funkcji_atrapa_animacja_252

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia jak stwierdzić czy graf lub wykres opisuje funkcję.

Przykład 4

Pole kwadratu o boku długości a określamy wzorem $P = a^2$. Wobec tego dla dowolnego $a > 0$, funkcja $P(a) = a^2$ opisuje pole kwadratu o boku a .

Suwakiem możesz zmieniać długość boku kwadratu.



bok kwadratu: $a = 4.5$

pole kwadratu: $P(a) = a^2$

$$P(4.5) = 4.5^2 = 20.25$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PYwGSZnN>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 5

Długość d przekątnej kwadratu jest funkcją długości x jego boku.

W szczególności $d(3) = 3\sqrt{2}$, a ogólnie $d(x) = x\sqrt{2}$, dla $x > 0$.

Przykład 6

Wysokość h trójkąta równobocznego i pole P tego trójkąta są funkcjami długości a boku trójkąta.

W szczególności $h(6) = 3\sqrt{3}$, $P(4) = 4\sqrt{3}$, a ogólnie $h(a) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ oraz $P(a) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, dla $a > 0$.

Ćwiczenie 3



Uzupełnij zdania, przeciągając w luki odpowiednie wzory i założenia lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

- Funkcja przypisująca promieniowi r pole koła o tym promieniu dana jest wzorem $P(r) =$

dla .

- Funkcja przypisująca promieniowi r obwód koła o tym promieniu dana jest wzorem

$L(r) =$ dla .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 7

Rzucamy cztery razy sześcienną kostką. Rozpatrzmy funkcję f , która numerowi rzutu przyporządkowuje liczbę wyrzuconych oczek uzyskanych na kostce w tym rzucie. Wówczas dziedziną funkcji f jest zbiór $\{1, 2, 3, 4\}$, a jej przeciwdziedziną zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, przy czym zbiór wartości funkcji jest co najwyżej czteroelementowy.

☒ I rzut ☐ II rzut ☐ III rzut ☐ IV rzut

I rzut - start

I rzut - stop

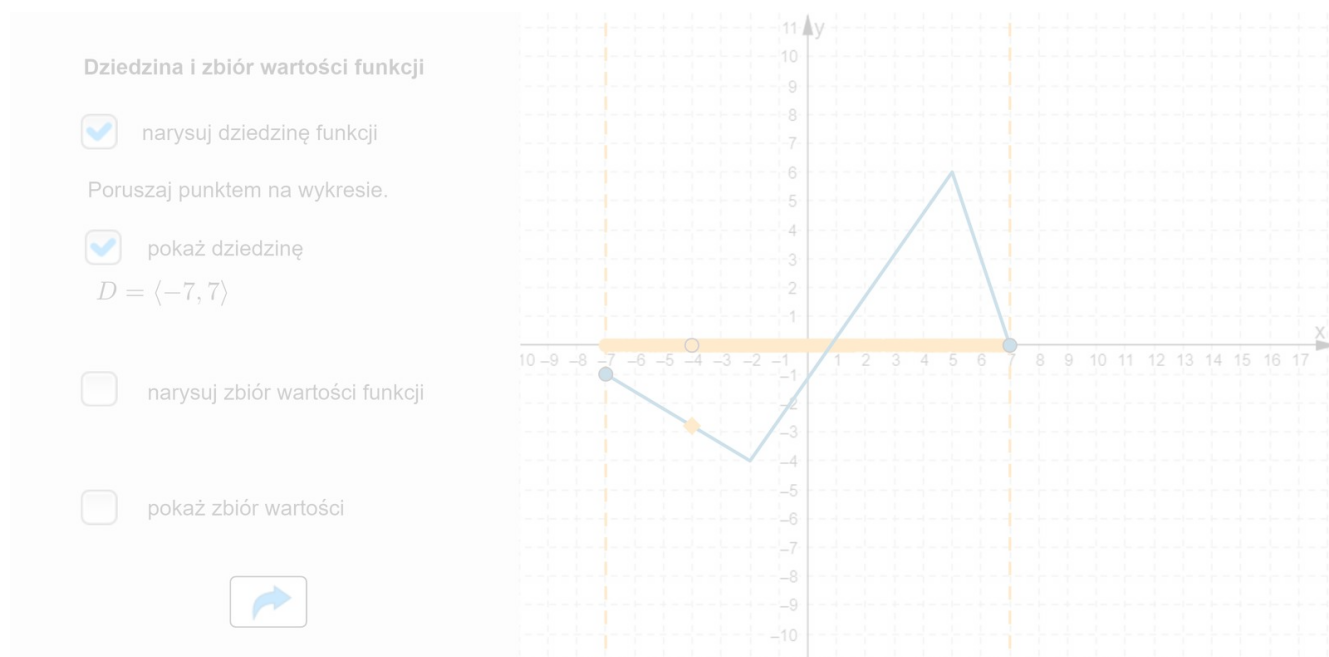
numer rzutu	1	2	3	4
wynik rzutu	5	3	2	3

Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PYwGSZnN>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Polecenie 1

Dla danej funkcji określ dziedzinę i zbiór wartości.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PYwGSZnN>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

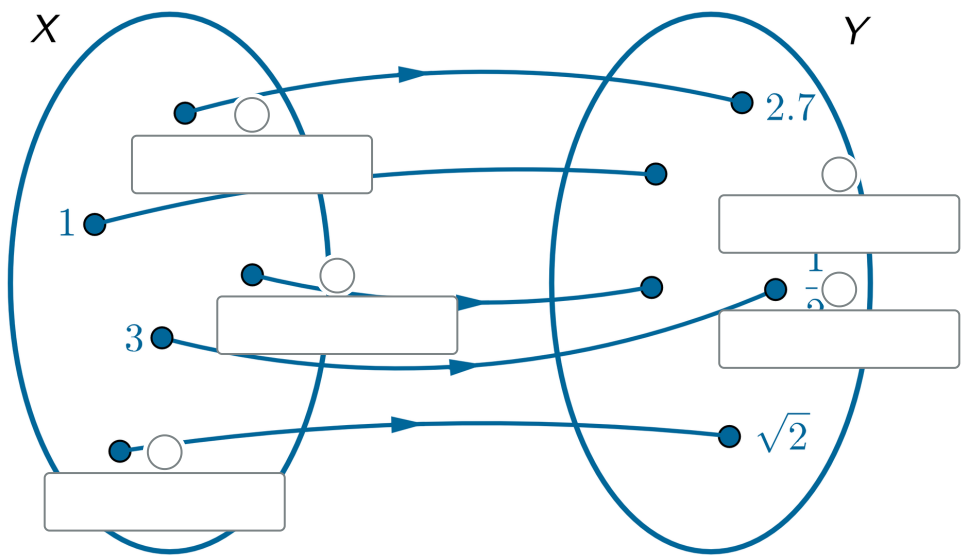
Ćwiczenie 4



Funkcja g , ze zbioru X w zbiór Y , określona jest za pomocą tabeli.

Funkcja g					
x	1	2	3	4	5
$g(x)$	2	-3	$\frac{1}{2}$	2,7	$\sqrt{2}$

Uzupełnij graf tej funkcji, wpisując odpowiednie liczby w puste pola.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Dane są zbiory $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $Y = \{-1, 0, 1, 2, 5\}$ oraz funkcja $f: X \rightarrow Y$ taka, że

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{dla } x < 0 \\ x - 3 & \text{dla } x > 1 \\ x + 1 & \text{dla } x = 0 \text{ lub } x = 1 \end{cases}.$$

Uzupełnij tabelkę.

x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Uczniom klasy Ia przyporządkowane są w dzienniku kolejne numery od 1 do 33. Które z poniższych przyporządkowań jest funkcją? Uzupełnij zdania, przeciągając w luki odpowiednie słowa lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

- Przyporządkowanie, w którym każdemu numerowi ucznia przyporządkowujemy dzień tygodnia, w którym się uczeń urodził, funkcją.
- Przyporządkowanie, w którym każdemu z 7 dni tygodnia przyporządkowujemy numer z dziennika tego ucznia, który się w tym dniu urodził funkcją.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Funkcja s każdej liczbie dwucyfrowej przypisuje sumę cyfry dziesiątek i podwojonej cyfry jedności.

a. Oblicz $s(37)$.

b. Zapisz w tabeli wartości funkcji s dla argumentów większych od 94.

--

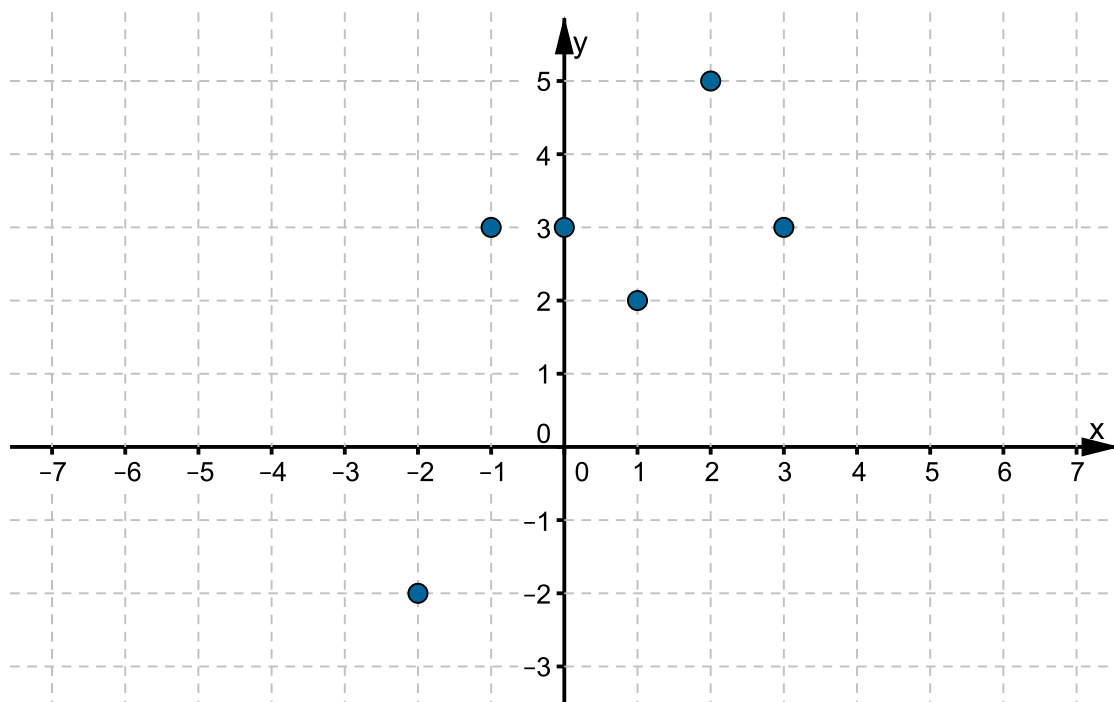
--

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f , określonej na zbiorze $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oceń i zaznacz, które równości są prawdziwe.

☐ $f(-2) + f(0) + f(2) + 1 = f(-1) + f(1) + f(3)$

☐ $f(-2) + f(2) = 0$

☐ $f(-1) + f(0) = 6$

☐ $f(0) + f(1) = f(2)$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = 2x^2 - x + 3$. Zaznacz wszystkie równości, które są prawdziwe.

☐ $f(3) = f(-3)$

☐ $f(0) = 3$

☐ $f(-1) = 0$

☐ $f(1) + f(2) = 10$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



W klasie jest 31 uczniów. Każdemu z nich na zakończenie roku szkolnego została wystawiona pozytywna ocena z matematyki. Uzasadnij, że wśród uczniów jest co najmniej siedmiu takich, którzy na zakończenie roku szkolnego uzyskali taką samą ocenę z matematyki.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



Graniastosłup prawidłowy ma w podstawie wielokąt o n wierzchołkach ($n \geq 3$).

Oznaczmy:

- przez $w(n)$ liczbę wszystkich wierzchołków tego graniastosłupa,
- przez $k(n)$ liczbę wszystkich krawędzi tego graniastosłupa,
- przez $s(n)$ liczbę wszystkich ścian tego graniastosłupa.

a. Wyznacz: $w(3)$, $k(4)$, $s(5)$.

b. Wyznacz: $w(31)$, $k(28)$, $s(17)$.

c. Dla ustalonej liczby naturalnej $n \geq 3$ podaj wzory funkcji: $w(n)$, $k(n)$, $s(n)$.

d. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 3$ prawdziwa jest równość
 $w(n) + s(n) - k(n) = 2$.