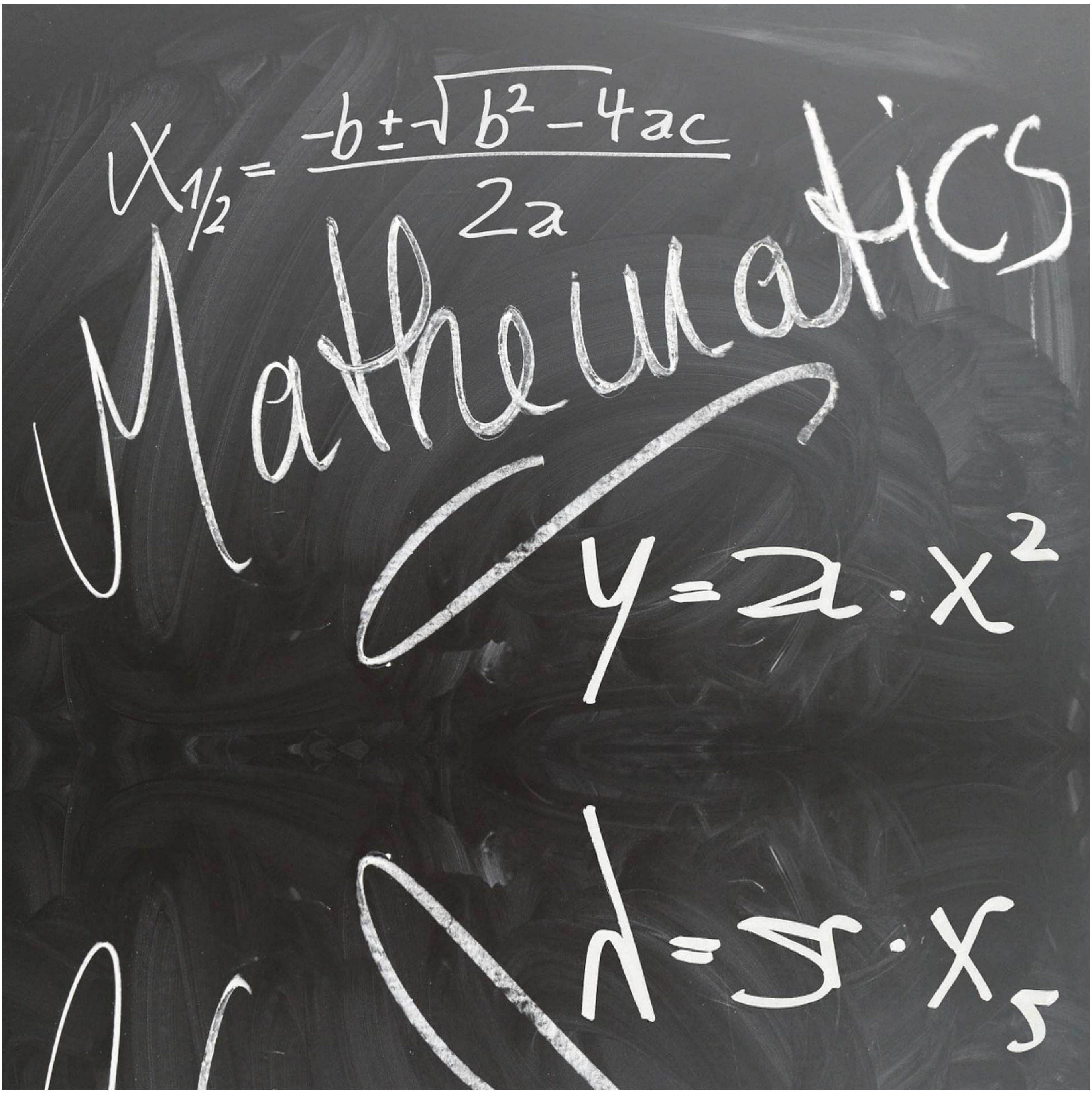
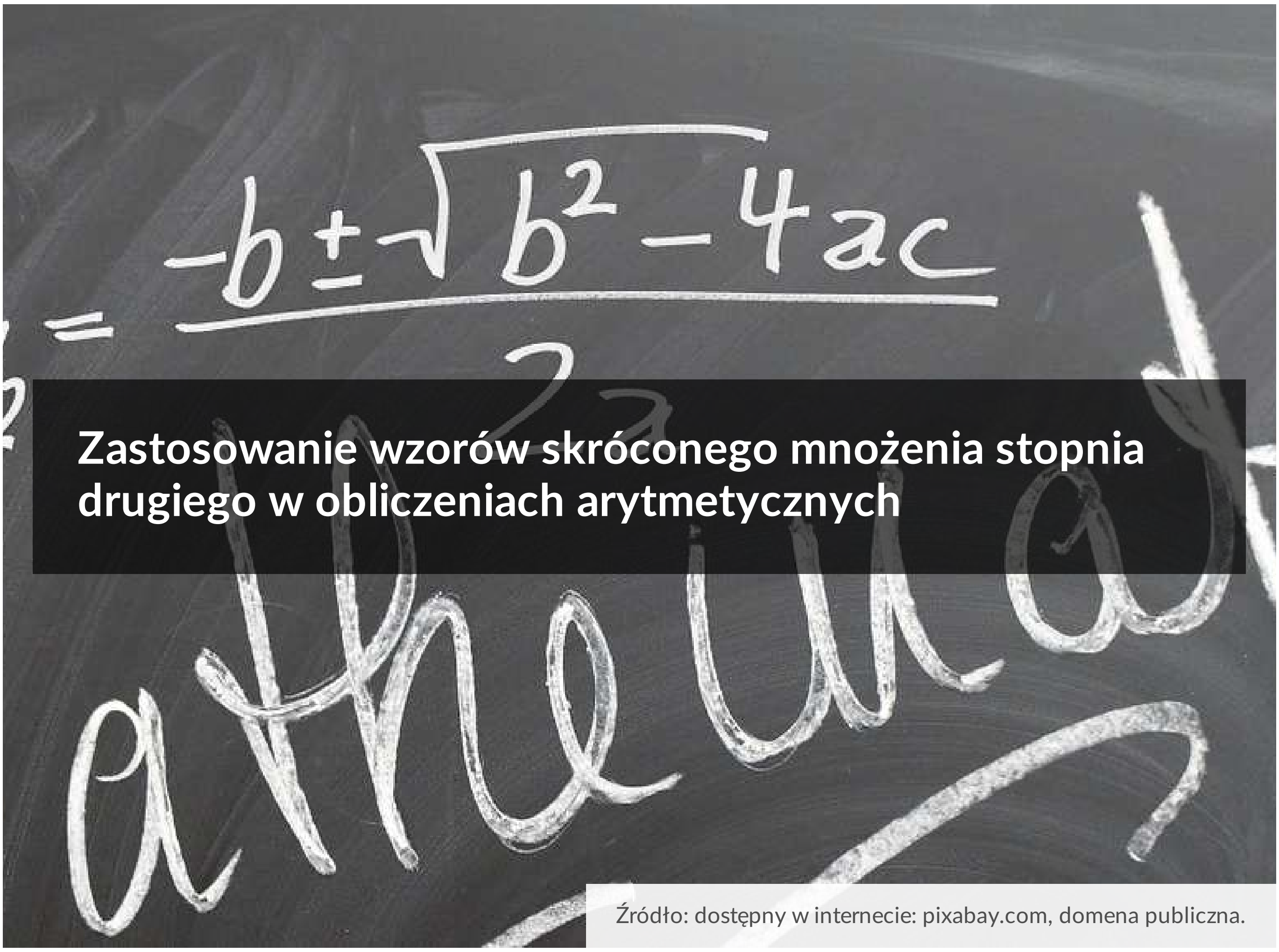


Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia stopnia drugiego w obliczeniach arytmetycznych

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Galeria zdjęć interaktywnych
- Sprawdź się

- Dla nauczyciela



Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia stopnia drugiego w obliczeniach arytmetycznych

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Znamy już wzory skróconego mnożenia stopnia drugiego. Zbierzemy teraz wiadomości dotyczące zastosowania tych wzorów do wykonywania pozornie skomplikowanych rachunków, również w pamięci.

Pokażemy proste sposoby podnoszenia niektórych liczb do kwadratu, zastosujemy wzór na różnicę kwadratów do usuwania niewymierności z mianownika ułamka, zbadamy czy dana liczba jest wymierna czy niewymierna, przekształcimy wyrażenia zawierające pierwiastki.

> **Twoje cele**
>
> - Zastosujesz wzory skróconego mnożenia stopnia drugiego w obliczeniach rachunkowych.
> - Usuniesz niewymierność z mianownika ułamka, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.
> - Zbadasz czy dana liczba jest wymierna czy niewymierna.

Przeczytaj

Obliczenia rachunkowe

W obliczeniach rachunkowych występują często typowe przypadki mnożenia lub podnoszenia liczb do kwadratu. Działania te możemy wykonać w sposób uproszczony, posługując się wzorami skróconego mnożenia.

Przykład 1

Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy, kwadrat różnicy lub różnicę kwadratów, obliczymy 79^2, 103^2, $83 \cdot 97$.

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy.

$79^2 = \left(80 - 1\right)^2 = 80^2 - 2 \cdot 80 \cdot 1 + 1^2 = 6241$

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy.

$703^2 = \left(700 + 3\right)^2 = 700^2 + 2 \cdot 700 \cdot 3 + 3^2 = 494209$

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

$83 \cdot 97 = \left(90 - 7\right)\left(90 + 7\right) = 90^2 - 7^2 = 8051$

Ważne!

Bezpośrednio ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów, wynika następująca własność:

Jeśli $a + b = 1$ to $a^2 - b^2 = a - b$.

Jeśli $a - b = 1$ to $a^2 - b^2 = a + b$.

Przykład 2

Wykorzystamy powyższą własność do obliczenia w pamięci $597^2 - 596^2$ i $(0,97)^2 - (0,03)^2$.

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów i z tego, że $597 – 596 = 1$ i $0,97 + 0,03 = 1$

$597^2 - 596^2 = 597 + 596 = 1193$

$(0,97)^2 - (0,03)^2 = 0,97 - 0,03 = 0,94$

Wzory skróconego mnożenia można też wykorzystać do przekształcania wyrażeń zawierających pierwiastki.

Przykład 3

Zapiszemy wyrażenie $W = \left(\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2 - \sqrt{89^2 - 80^2}$ w najprostszej postaci.

Uprościmy najpierw każdy ze składników.

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy i ze wzoru na różnicę kwadratów.

$W_1 = \left(\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2 =$

$= 4 - 2\sqrt{3} + 4 + 2\sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{\left(4-2\sqrt{3}\right)\left(4+2\sqrt{3}\right)}$

$W_1 = 8 + 2 \cdot \sqrt{16-12} = 8 + 4 = 12$

Drugi ze składników zamieniamy na iloczyn (ze wzoru na różnicę kwadratów) i pierwiastkujemy.

$W_2 = \sqrt{89^2 - 80^2} = \sqrt{(89-80)(89+80)} = \sqrt{9 \cdot 169} = 3 \cdot 13 = 39$

Teraz powracamy do rozważanego wyrażenia.

$$W = W_1 - W_2 = 12 - 39 = -27$$

Usuwanie niewymierności z mianownika ułamka

Wiemy już, że iloczyn liczb niewymiernych może być liczbą wymierną lub niewymierną. Chcąc więc usunąć niewymierność z mianownika ułamka, należy rozszerzyć ułamek przez takie wyrażenie, aby w wyniku otrzymać liczbę wymierną.

Najprościej jest zatem pomnożyć licznik i mianownik ułamka tak, aby w mianowniku otrzymać iloczyn sumy przez różnicę tych samych wyrażeń i zastosować wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

Przykład 4

Znajdziemy liczbę odwrotną do liczby $2 + 7\sqrt{3}$.

Szukana liczba to $\frac{1}{2+7\sqrt{3}}$. Zauważmy, że w mianowniku zapisanego ułamka znajduje się suma dwóch wyrażeń, zatem aby usunąć niewymierność z mianownika, rozszerzamy ułamek przez różnicę tych samych wyrażeń.

$$\frac{1}{2+7\sqrt{3}} = \frac{1}{2+7\sqrt{3}} \cdot \frac{2-7\sqrt{3}}{2-7\sqrt{3}} = \frac{2-7\sqrt{3}}{4-147} = \frac{7\sqrt{3}-2}{143}$$

Odwrotność liczby $2+7\sqrt{3}$ to $\frac{7\sqrt{3}-2}{143}$.

Przykład 5

Wykażemy, że liczba $W = \frac{1-\sqrt{2}}{5-3\sqrt{2}} + \frac{1+\sqrt{2}}{5+3\sqrt{2}}$ jest wymierna.

$$W = \frac{1-\sqrt{2}}{5-3\sqrt{2}} + \frac{1+\sqrt{2}}{5+3\sqrt{2}}$$

Sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika.

$$W = \frac{1-\sqrt{2}}{5-3\sqrt{2}} \cdot \frac{5+3\sqrt{2}}{5+3\sqrt{2}} + \frac{1+\sqrt{2}}{5+3\sqrt{2}} \cdot \frac{5-3\sqrt{2}}{5-3\sqrt{2}}$$

Wykonujemy w liczniku mnożenie, w mianowniku stosujemy wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

$$W = \frac{5+3\sqrt{2}-5\sqrt{2}-6+5-3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-6}{5^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2}$$

Redukujemy wyrazy podobne w liczniku, w mianowniku wykonujemy wskazane działania.

$$W = -\frac{2}{7}$$

Liczba $-\frac{2}{7}$ zapisana jest za pomocą ilorazu liczb całkowitych, zatem W to liczba wymierna.

Jeśli w mianowniku ułamka występują więcej niż dwa wyrazy zawierające pierwiastki, można również, usuwając niewymierność z mianownika, stosować odpowiedni wzór skróconego mnożenia.

Przykład 6

Oszacujemy wartość wyrażenia $W = \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ z dokładnością do jednego miejsca po przecinku, przyjmując $\sqrt{2} \approx 1,4$ i $\sqrt{6} \approx 2,4$.

$$W = \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

Rozszerzamy ułamek przez $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

$$W = \frac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}} \cdot \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\left(1+\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}}$$

W mianowniku ułamka wykonujemy mnożenie, stosując wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

$$W = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+2\sqrt{2}+2-3}$$

Redukujemy wyrazy podobne w mianowniku ułamka.

$$W = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

Usuwamy niewymierność z mianownika ułamka.

$$W = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

Szacujemy wartość otrzymanego wyrażenia.

$$W \approx \frac{2+1{,}4-2{,}4}{4} = 0,25$$

Wartość wyrażenia jest równa w przybliżeniu 0,25.

Słownik

wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy

kwadrat sumy dwóch wyrażeń jest równy sumie kwadratów tych wyrażeń plus podwojony iloczyn pierwszego wyrażenia przez drugie

wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy

kwadrat różnicy dwóch wyrażeń jest równy sumie kwadratów tych wyrażeń minus podwojony iloczyn pierwszego wyrażenia przez drugie

wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów

różnica kwadratów dwóch dowolnych wyrażeń jest równa iloczynowi sumy tych wyrażeń przez ich różnicę

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Przypomnij sobie, w jaki sposób usuwaliśmy niewymierność typu $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$ z mianownika ułamka, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

Zaproponuj sposób usuwania niewymierności typu $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}+e\sqrt{f}$. Skonfrontuj swoje pomysły z przykładami podanymi w galerii zdjęć interaktywnych.

Polecenie 2

Zapisz w najprostszej postaci $\frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}+\frac{3}{\sqrt{3}+3}}$.

Polecenie 3

Usuń niewymierność z mianownika ułamka $A=\frac{1}{\sqrt{35}+\sqrt{15}+\sqrt{7}+\sqrt{3}}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Zapisz w najprostszej postaci $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt{20}-\sqrt{5}}}$.

Ćwiczenie 8

Usuń niewymierność z mianownika ułamka $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{8}}$.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia stopnia drugiego w obliczeniach arytmetycznych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3-b^3, a^n-b^n.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje wzory skróconego mnożenia stopnia drugiego w obliczeniach rachunkowych
- usuwa niewymierność z mianownika ułamka, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów
- bada czy dana liczba jest wymierna czy niewymierna
- uzasadnia poprawność prowadzonych rozumowań

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- metoda trójkąta
- analiza przypadku

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał dostęp do komputera
- kartony, mazaki

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

Uczniowie przypominają sobie w grupach wiadomości i umiejętności związane ze wzorami skróconego mnożenia stopnia 2. Metodą trójkąta dokonują analizy problemów, które sprawiają im kłopot, zapisują też co pomaga, a co przeszkadza w rozwiązywaniu zadań związanych ze wzorami skróconego mnożenia.

Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

Uczniowie pracują w grupach metodą analizy przypadków. Zapoznają się z przykładami przedstawionymi w sekcji „Przeczytaj", analizują je.

Następnie oglądają galerię zdjęć interaktywnych, analizują zapisane tam ćwiczenia, omawiają je i na ich podstawie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne.

Rola nauczyciela ogranicza się do wspierania pracy grup, wyjaśniania wątpliwości.

Faza podsumowująca:

Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca uczniom wykonać te ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane podczas lekcji.

Nauczyciel poleca też przygotowanie przez uczniów na następną lekcję przykładów wykorzystania wzorów skróconego mnożenia w zadaniach na dowodzenie.

Materiały pomocnicze:

Działania na wyrażeniach algebraicznych - zadania, zadania generatorowe

Wskazówki metodyczne:

Z galerią zdjęć interaktywnych uczniowie mogą zapoznać się indywidualnie, a ćwiczenia interaktywne nauczyciel może wykorzystać jako mini – kartkówkę lub krótki sprawdzian.