



Prawdopodobieństwo warunkowe

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Prawdopodobieństwo warunkowe

Źródło: Mark Daynes, dostępny w internecie: unsplash, domena publiczna.

Pewien monarcha z okazji swoich urodzin wybrał losowo jednego z trzech niewolników A , B , C i wyzwolił go, ale zainteresowanym nie powiedział którego.

Niewolnik miał otrzymać odpowiednie dokumenty dopiero za tydzień.

Niewolnik A koniecznie chciał się dowiedzieć kto jest tym szczęśliwcem. Jednak strażnikom monarcha zabronił udzielać odpowiedzi na to pytanie. Zatem A zapytał jednego ze strażników – który z niewolników B czy C jest wyzwolony. Strażnik odpowiedział, że C nie jest wyzwolony. A pomyślał – albo ja zostałem wyzwolony, albo B . Czyli prawdopodobieństwo, że zostałem wyzwolony jest równe $\frac{1}{2}$, a nie jak przedtem, równe $\frac{1}{3}$, gdy tego nie wiedziałem.



Niewolnicy na plantacji w Wirginii

(*The Old Plantation*, ok. 1790).

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

Po pewnym czasie *A* doszedł do smutnego wniosku – strażnik nie lubi *B*. Więc gdyby on nie został wyzwolony, na pewno by mi to powiedział. Skoro tak się nie stało, to znaczy, że to *B* został wyzwolony. Prawdopodobieństwo, że zostałem wyzwolony jest równe zero.

Jak myślisz – w którym przypadku *A* miał rację?

Aby odpowiedzieć na to pytanie, warto sięgnąć do wiadomości związanych z prawdopodobieństwem warunkowym, które zawarte są w tym materiale. Zatem po zapoznaniu się z odpowiednim wzorem zapewne bez problemu odpowiesz na pytanie.

Twoje cele

- Określisz prawdopodobieństwo warunkowe zajścia danego zdarzenia.
- Zastosujesz wzór na prawdopodobieństwo warunkowe w sytuacjach praktycznych.
- Uzasadnisz proste zależności probabilistyczne.

Przeczytaj

Chcąc określić prawdopodobieństwo zajścia danego zdarzenia losowego, określamy zespół warunków przy których to zdarzenie zachodzi.

W niektórych wypadkach nie wpisuje się wszystkich warunków, bo ich zachowanie jest przyjęte umownie (np. w rzucie kostką symetryczność tejże kostki). Jeżeli jednak istnieje warunek B , który ma istotny wpływ na prawdopodobieństwo zajścia danego zdarzenia A , to mówimy o prawdopodobieństwie zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B i prawdopodobieństwo to oznaczamy symbolem $P(A/B)$.

Definicja: Prawdopodobieństwo warunkowe

Niech $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$ oraz niech $P(B) > 0$. Prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia A , pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B , nazywamy liczbę

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Liczbę tę nazywamy **prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia A** , pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B .

Przykład 1

Rzucamy dwukrotnie kostką do gry. Za pierwszym razem wypadły dwa oczka. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma uzyskanych oczek jest liczbą pierwszą.

Niech Ω będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych w tym doświadczeniu.

$$|\Omega| = 36$$

Oznaczmy:

A – zdarzenie polegające na tym, że suma wszystkich liczb uzyskanych oczek jest liczbą pierwszą,

B – zdarzenie polegające na tym, że za pierwszym razem wypadły dwa oczka.

Zdarzenia możliwe B	Zdarzenia sprzyjające $A \cap B$
(2, 1)	(2, 1)
(2, 2)	(2, 3)
(2, 3)	(2, 5)
(2, 4)	
(2, 5)	
(2, 6)	

$$P(B) = \frac{6}{36}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{36}$$

Obliczamy **prawdopodobieństwo warunkowe**.

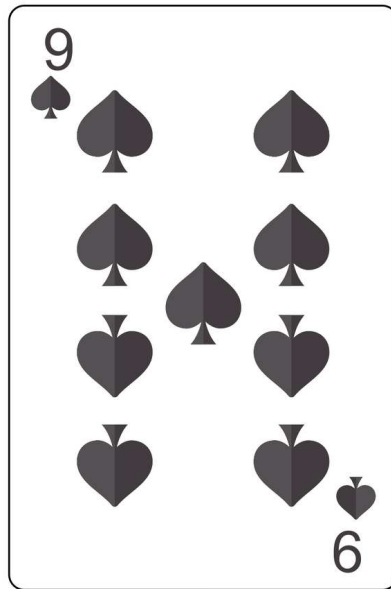
$$P(A/B) = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{2}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo, że suma uzyskanych oczek jest liczbą pierwszą jest równe $\frac{1}{2}$.

Przykład 2

Z talii 52 kart wyciągamy losowo jedną kartę. Obliczymy prawdopodobieństwo, że jest to dziewiątka, jeżeli wiadomo, że wylosowana karta jest pikiem.



Losujemy jedną kartę z 52.

$$|\Omega| = 52$$

Oznaczmy:

A – zdarzenie polegające na tym, że wyciągnięta karta to 9,

B – zdarzenie polegające na tym, że wyciągnięta karta to pik.

Należy obliczyć $P(A/B)$.

Zdarzeniu B sprzyja 13 zdarzeń elementarnych (w talii mamy 13 pików).

$$|B| = 13 \text{ i } P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$A \cap B$ – wylosowana karta to dziewiątka pik.

$|A \cap B| = 1$ – w talii jest jedna dziewiątka pik

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52}$$

Korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe.

$$P(A/B) = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{13}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo, że wylosowana karta to dziewiątka pik jest równe $\frac{1}{13}$.

Przykład 3

W pudle są trzy kule żółte i cztery zielone. Losujemy kolejno dwie kule bez zwracania. Obliczymy prawdopodobieństwo tego, że za drugim razem wylosujemy kulę żółtą, jeżeli za pierwszym razem też wylosowaliśmy kulę żółtą.

W opisanym doświadczeniu istotna jest kolejność losowania kul i kule nie mogą się powtarzać.

Zatem zdarzeniami elementarnymi są dwuelementowe wariacje bez powtórzeń zbioru siedmioelementowego.

$$|\Omega| = 7 \cdot 6 = 42$$

Oznaczmy:

A – zdarzenie polegające na tym, że za drugim razem wylosowano kulę żółtą,

B – zdarzenie polegające na tym, że pierwszym razem wylosowano kulę żółtą,

$A \cap B$ – zdarzenie polegające na tym, że za pierwszym i drugim razem wylosowano kulę żółtą.

$$|B| = 3 \cdot 6 = 18$$

$$P(B) = \frac{18}{42}$$

Za pierwszym razem losujemy kulę żółtą z trzech znajdujących się w pudle, ale za drugim razem już tylko dwie kule żółte znajdują się w pudle.

$$|A \cap B| = 3 \cdot 2 = 6$$

$$P(A \cap B) = \frac{6}{42}$$

Korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe.

$$P(A/B) = \frac{\frac{6}{42}}{\frac{18}{42}} = \frac{1}{3}$$

Zauważmy, że szukane prawdopodobieństwo możemy wyznaczyć też w inny sposób.

Jeżeli przyjmiemy, że B jest zdarzeniem pewnym, to

$$|\Omega| = 2 + 4 = 6 \text{ i } |A| = 2$$

Zatem

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo tego, że za drugim razem wylosujemy kulę żółtą, jeżeli za pierwszym razem też wylosowaliśmy kulę żółtą jest równe $\frac{1}{3}$.

Przykład 4

W finale zawodów łuczniczych startuje czterech zawodników: Arek, Marek, Darek i Jarek. Prawdopodobieństwo wygrania zawodów przez każdego z nich jest równe odpowiednio: $\frac{3}{9}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{2}{9}$. Niestety Arek i Marek wycofali się z zawodów z powodu kontuzji. Obliczymy prawdopodobieństwo tego, że teraz zawody wygra Darek.

Mamy obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wygra Darek pod warunkiem, że wygra Darek lub Jarek.

Oznaczmy:

D - zdarzenie polegające na tym, że wygra Darek,

J - zdarzenie polegające na tym, że wygra Jarek.

Niech $B = D \cup J$.

Zauważmy, że

$$D \subset D \cup J, \text{ zatem } D \cap (D \cup J) = D$$

$$\text{Zatem } P(B) = \frac{5}{9}, P(D \cap B) = \frac{3}{9}.$$

Ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe wynika, że

$$P(D/B) = \frac{3}{9} : \frac{5}{9} = \frac{3}{5}$$

Zauważmy, że prawdopodobieństwo zajścia rozpatrywanego zdarzenia można obliczyć jako stosunek częstości zajścia zdarzenia D do częstości zajścia zdarzenia $D \cup J$.

Zdarzenie D zachodzi w 3 przypadkach na 9, a zdarzenie $D \cup J$ w 5 przypadkach na 9. Stąd

$$P(A/B) = \frac{3}{5}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo tego, że wygra Darek jest równe $\frac{3}{5}$.

Jeśli w zadaniu nie podajemy specjalnych warunków, jakie mają spełniać dane zdarzenia losowe, to zakładamy, że należą do tego samego zbioru zdarzeń elementarnych.

Przykład 5

Wykażemy, że jeśli $P(A) = 0,7$ i $P(B) = 0,6$ to $P(A/B) \geq 0,5$.

Aby obliczyć **prawdopodobieństwo warunkowe**, musimy najpierw znaleźć $P(A \cap B)$.

Skorzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego.

$$P(A \cap B) = 1 - P[(A \cap B)'] = 1 - P(A' \cup B')$$

Teraz korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń.

$$P(A \cap B) = 1 - [P(A') + P(B') - P(A' \cap B')]$$

$$P(A \cap B) = 1 - P(A') - P(B') + P(A' \cap B')$$

$$P(A \cap B) \geq 1 - P(A') - P(B') = P(A) - (1 - P(B))$$

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

Przechodzimy do wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe.

$$P(A/B) \geq \frac{P(A) + P(B) - 1}{P(B)}$$

$$P(A/B) \geq \frac{0,7 + 0,6 - 1}{0,6} = 0,5.$$

Słownik

prawdopodobieństwo warunkowe

niech $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$ oraz niech $P(B) > 0$; prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia A , pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B , nazywamy liczbę

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapozna się z galerią zdjęć interaktywnych. Przeanalizuj zawarte tam przykłady. Spróbuj je rozwiązać innymi sposobami.

Polecenie 2

Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany uczeń pewnej szkoły uczy się języka włoskiego i muzyki jest równe $0,075$. Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany uczeń tej szkoły uczy się muzyki jest równe $0,45$. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany uczeń z tej szkoły uczy się włoskiego, pod warunkiem, że uczy się muzyki.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



W dwudziestoosobowej klasie dziesięciu uczniów uczy się języka angielskiego i niemieckiego, ośmiu języka angielskiego i francuskiego, dwóch języka niemieckiego i francuskiego.

Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany uczeń z tej klasy uczy się języka francuskiego, jeżeli wiadomo, że uczy się języka angielskiego.

Ćwiczenie 8



Rzucono dwa razy kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia dwa razy parzystej liczby oczek, jeżeli wiadomo, że szóstka nie wypadła ani razu.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Prawdopodobieństwo warunkowe

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, klasa III lub IV, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe i stosuje wzór Bayesa, stosuje twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa prawdopodobieństwo warunkowe zajścia danego zdarzenia
- stosuje wzór na prawdopodobieństwo warunkowe w sytuacjach z kontekstem realistycznym
- uzasadnia proste zależności probabilistyczne
- dobiera i tworzy modele matematyczne podczas rozwiązywania problemów praktycznych i teoretycznych

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- wykres Ishikawy
- analiza morfologiczna

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą 2 – 1 (dwóch zadaje pytania, jeden odpowiada) powtarzają wiadomości na temat sposobów obliczania prawdopodobieństwa zdarzeń.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach zapoznają się z materiałami z sekcji „Przeczytaj” oraz z galerią zdjęć interaktywnych. Następnie analizują zależności przyczynowo – skutkowe w zadaniach na prawdopodobieństwo warunkowe i sporządzają wykres Ishawy pokazujący te zależności.
2. Grupy prezentują swoje wykresy i wspólnie ustalają algorytm rozwiązywania zadań na prawdopodobieństwo warunkowe.
3. Ostatnim elementem tej części lekcji jest wspólne rozwiązywanie ćwiczeń interaktywnych 1 – 4 i analiza morfologiczna problemów związanych z wyznaczeniem prawdopodobieństwa warunkowego.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wykonanie zadań interaktywnych 5 – 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Klasyczna definicja prawdopodobieństwa \(treść rozszerzona\)](#)

Wskazówki metodyczne:

Galeria zdjęć interaktywnych może być wykorzystana jako wprowadzenie do zajęć poświęconych twierdzeniu Bayesa.