



Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 60°

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 60°

Źródło: JF Martin, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Efekt Halo to jedno z najwspanialszych zjawisk widocznych na niebie. To świetlisty, biały lub zawierający kolor tęczy pierścień widoczny wokół Słońca lub Księżyca. Powstaje przy przejściu światła słonecznego lub księżycowego przez chmurę zawierającą bardzo drobne kryształki lodu z różnie zorientowanymi ścianami łamiącymi. Najczęściej występującym efektem Halo jest Halo 22° powstające przez załamanie na powierzchniach kryształów o kącie łamiącym 60° .

W tym materiale wyprowadzimy wartości funkcji trygonometrycznych kąta 60° .

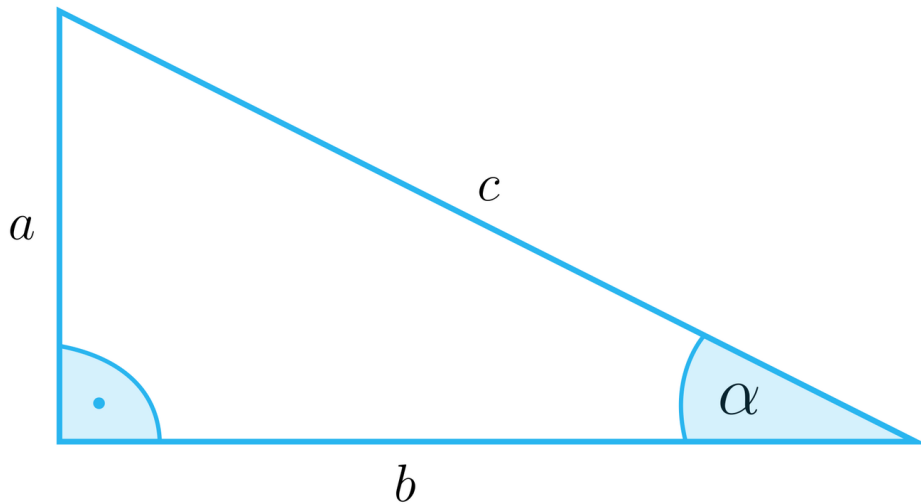
Twoje cele

- Wyprowadzisz wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 60° .
- Wykorzystasz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 60° do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich.
- Zastosujesz funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur.

Przeczytaj

Definicje funkcji trygonometrycznych - przypomnienie

Przypomnijmy definicje funkcji trygonometrycznych:



gdzie:

c – przeciwprostokątna,

a – przyprostokątna przeciwległa do kąta α ,

b – przyprostokątna przyległa do kąta α .

Definicja: Sinus kąta α

Sinusem kąta α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej a przeciwległej do kąta α do przeciwprostokątnej c :

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

Definicja: Cosinus kąta α

Cosinusem kąta α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej b przyległej do kąta α do przeciwprostokątnej c :

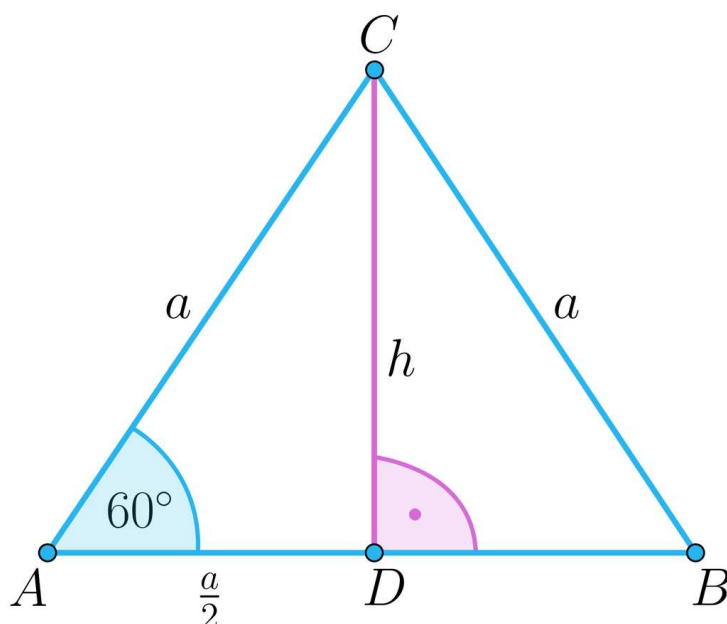
$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

Definicja: Tangens kąta α

Tangensem kąta α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej a przeciwległej do kąta α do przyprostokątnej b przyległej do kąta α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

Wyznaczając wartości funkcji trygonometrycznych kąta 60° rozważmy trójkąt równoboczny ABC o boku a .



Wysokość AD dzieli trójkąt na dwie przystające figury – przystające trójkąty prostokątne, stąd $|AD| = |DB| = \frac{a}{2}$.

Stosując twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta ADC wyznaczymy wysokość CD trójkąta ABC .

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Wobec powyższego:

$$\sin 60^\circ = \frac{|CD|}{|AC|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{|CD|}{|AD|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$\operatorname{tg} 60^\circ$ możemy również wyliczyć wykorzystując następujący związek: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

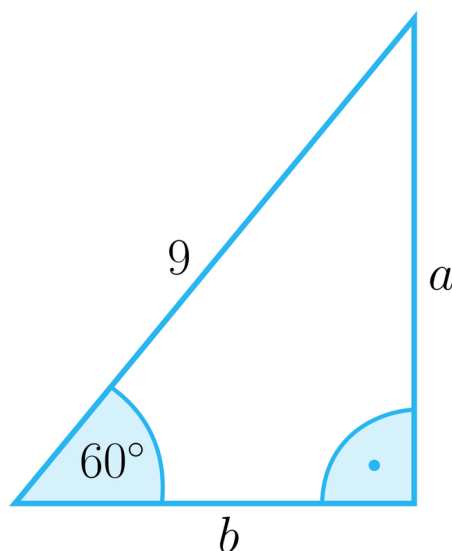
$$\operatorname{tg} 60^{\circ} = \frac{\sin 60^{\circ}}{\cos 60^{\circ}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Zbierzmy wyliczone wartości w tabeli:

α	60°
$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\sqrt{3}$

Przykład 1

W trójkącie prostokątnym długość przeciwprostokątnej jest równa 9, a jeden z kątów ostrych jest równy 60° . Obliczymy długości obu przyprostokątnych.



Rozwiązanie

Trójkąt jest prostokątny, możemy zastosować funkcje trygonometryczne.

Długość boku a wyznaczymy z funkcji sinus:

$$\sin 60^{\circ} = \frac{a}{9} \text{ i } \sin 60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{9}$$

$$2 \cdot a = \sqrt{3} \cdot 9$$

$$a = 4,5\sqrt{3} \text{ cm}$$

Bok b wyznaczymy z funkcji cosinus:

$$\cos 60^\circ = \frac{b}{9} \text{ i } \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{b}{9}$$

$$b = 4,5$$

Mogliśmy b wyznaczyć, wykorzystując fakt, że długość przyprostokątnej trójkąta prostokątnego leżącej przy kącie 60° jest równa połowie długości przeciwprostokątnej, czyli $b = 9 : 2 = 4,5$.

Odpowiedź:

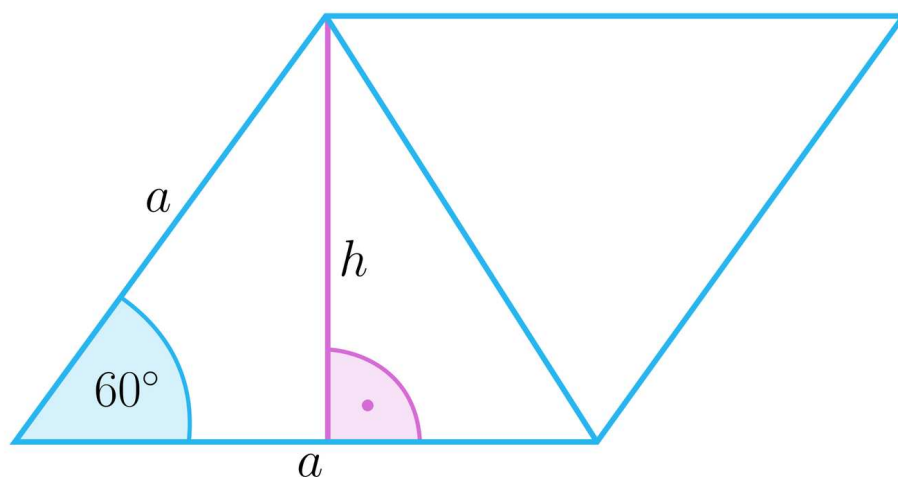
Przyprostokątne mają długość: $a = 4,5\sqrt{3}$ i $b = 4,5$.

Przykład 2

Obliczymy pole **rombu** mając daną długość jego boku 12 cm i kąt ostry 60° .

Rozwiązanie

Wprowadźmy oznaczenia: h – wysokość rombu,
 a – długość boku rombu.



Z treści zadania: $a = 12$ cm.

Wzór na pole rombu:

$$P = a \cdot h$$

Aby wyliczyć pole rombu musimy wyznaczyć jego wysokość h .

Wysokość jest prostopadła do boku a , możemy więc skorzystać z funkcji sinus.

$$\frac{h}{a} = \sin 60^\circ \text{ i } \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$h = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$h = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$h = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$P = a \cdot h = 12 \cdot 6\sqrt{3} = 72\sqrt{3}$$

$$P = 72\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

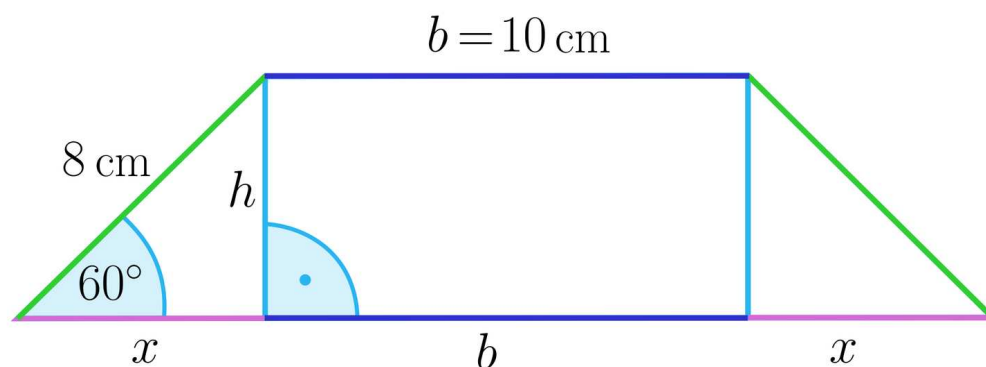
Odpowiedź:

Pole rombu wynosi $72\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Przykład 3

Obliczymy pole i obwód trapezu równoramiennego, którego krótsza podstawa ma długość 10 cm a ramię długości 8 cm tworzy z podstawą kąt 60° .

Rozwiązanie



Pole trapezu wyraża wzór:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

gdzie $a = b + 2x$ – długość dolnej podstawy; b – długość górnej podstawy; h – długość wysokości trapezu.

Aby je wyliczyć musimy mieć dane: a , b i h .

$b = 10 \text{ cm}$ (z treści zadania).

Ponieważ $a = 2x + b$, to $a = 2x + 10$.

Wyznamy h , korzystając z funkcji sinus:

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{8} \text{ i } \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{8}$$

$$2 \cdot h = \sqrt{3} \cdot 8$$

$$\mathbf{h = 4\sqrt{3} \text{ cm}}$$

Aby wyznaczyć długość dłuższej podstawy, musimy obliczyć długość odcinka x :

$$\cos 60^\circ = \frac{x}{8} \text{ i } \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{8}$$

$$2 \cdot x = 1 \cdot 8$$

$$\mathbf{x = 4 \text{ cm}}$$

Przejdźmy teraz do wyliczenia dłuższej podstawy a trapezu.

$$a = 2x + 10$$

$$a = 2 \cdot 4 + 10 = 18$$

$$\mathbf{a = 18 \text{ cm}}$$

Wyliczone wartości h i a podstawiamy do wzoru na pole trapezu:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{18+10}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 14 \cdot 4\sqrt{3} = 56\sqrt{3}$$

$$\mathbf{P = 56\sqrt{3} \text{ cm}^2}$$

Obwód [trapezu](#) jest sumą długości jego boków:

$$O = 18 + 10 + 2 \cdot 8 = 28 + 16 = 44$$

$$\mathbf{O = 44 \text{ cm}}$$

Odpowiedź:

Pole trapezu wynosi $56\sqrt{3} \text{ cm}^2$, a jego obwód 44 cm.

Przykład 4

Uprościmy wyrażenie:

$\frac{\cos \alpha}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}$, a następnie obliczymy jego wartość dla $\alpha = 60^\circ$.

Rozwiązanie

Przekształcamy wyrażenie, wykorzystując następujące związki między funkcjami trygonometrycznymi: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ i $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\frac{\cos \alpha}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1+\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2} = \frac{\cos \alpha}{1+\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\cos \alpha}{\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\cos \alpha}{\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\cos \alpha}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\cos \alpha}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \cos^3 \alpha$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \text{ więc } \cos^3 \alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Odpowiedź:

Wartość wyrażenia dla $\alpha = 60^\circ$ wynosi $\frac{1}{8}$.

Przykład 5

Udowodnimy, że jeśli $\frac{x}{y} = \frac{z}{t} = \operatorname{tg} 60^\circ$, to $\frac{4x+6z}{16y \cdot \sin 60^\circ + 12\sqrt{3}t} = \cos 60^\circ$

Rozwiązanie

Skoro $\frac{x}{y} = \operatorname{tg} 60^\circ$, to $x = y\sqrt{3}$.

Analogicznie, skoro $\frac{z}{t} = \operatorname{tg} 60^\circ$, to $z = t\sqrt{3}$.

Zatem:

$$\frac{4x+6z}{16y \cdot \sin 60^\circ + 12\sqrt{3}t} = \frac{4y\sqrt{3}+6t\sqrt{3}}{16y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 12\sqrt{3}t} = \frac{\sqrt{3}(4y+6t)}{8y\sqrt{3}+12\sqrt{3}t} = \frac{\sqrt{3}(4y+6t)}{2\sqrt{3}(4y+6t)} = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$$

co należało udowodnić.

Przykład 6

Udowodnimy, że $\log_2(\operatorname{tg} 60^\circ) + \frac{1}{\log_{\sin 60^\circ}(\cos 60^\circ)} = 1$

Rozwiązanie

$$\log_2(\operatorname{tg} 60^\circ) + \frac{1}{\log_{\sin 60^\circ}(\cos 60^\circ)} = \log_2 \sqrt{3} + \frac{1}{\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{2}}$$

Skorzystamy z twierdzenia o odwrotności logarytmu:

$$\frac{1}{\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

i z twierdzenia o zamianie podstaw logarytmu:

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}}{\log_2 \frac{1}{2}} = -\log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Mamy zatem:

$$\log_2 \sqrt{3} + \frac{1}{\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{2}} = \log_2 \sqrt{3} - \log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Skorzystamy teraz z twierdzenia o różnicy logarytmów o tej samej podstawie:

$$\log_2 \sqrt{3} - \log_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \log_2 \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \log_2 2 = 1$$

co należało udowodnić.

Słownik

romb

czworokąt o wszystkich bokach równych, jest szczególnym przypadkiem równoległoboku; przeciwległe boki rombu są równoległe, przekątne dzielą się na połowy i są wzajemnie prostopadłe; są one równocześnie dwusiecznymi kątów

trapez

czworokąt, którego ma przynajmniej jedną parę boków równoległych;

przystawanie figur

własność figur geometrycznych; dwie figury są przystające jeżeli jedną można otrzymać z drugiej przez wykonanie pewnej ilości przesunięć, obrotów i symetrii

Animacja

Polecenie 1

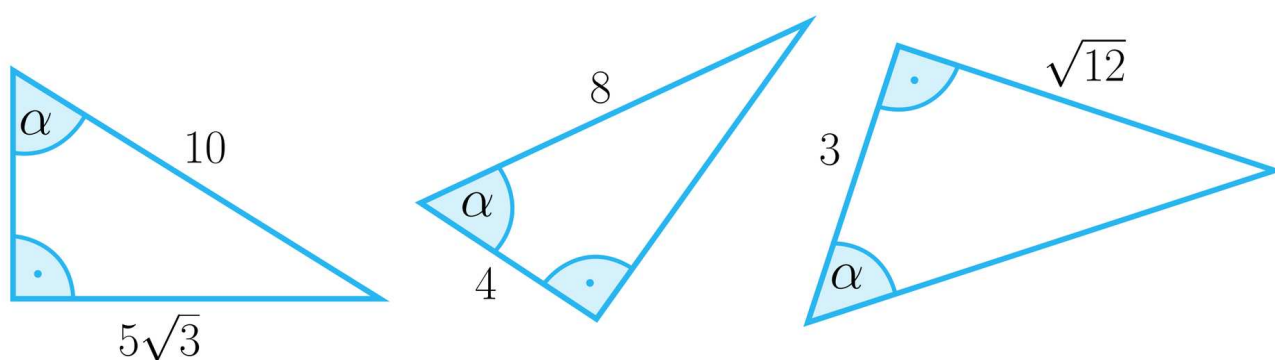
Utrwalisz wyprowadzenie wartości funkcji trygonometrycznych kąta 60° zapoznając się z animacją. Następnie rozwiąż zadania i porównaj z odpowiedziami.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DCCQTvsWX>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej wartości funkcji trygonometrycznych kąta 60° stopni.

Polecenie 2

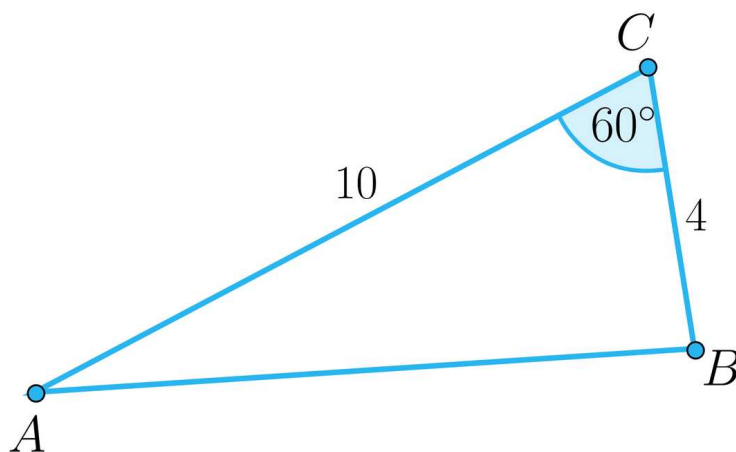
Dany jest trójkąt prostokątny:



Czy kąt α ma miarę 60° ?

Polecenie 3

Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AC| = 10$, $|BC| = 4$ i $|\sphericalangle ACB| = 60^\circ$. Na jakie odcinki wysokość poprowadzona z wierzchołka B dzieli bok AC ?



Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

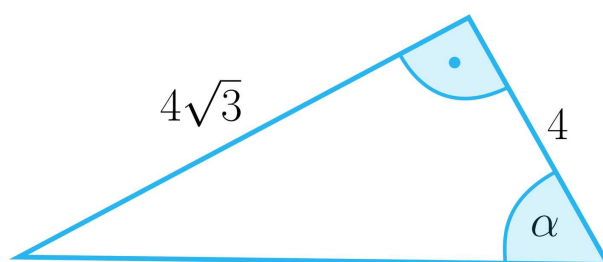
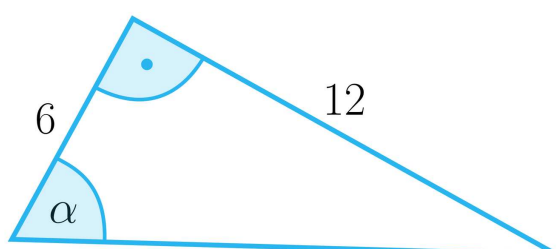
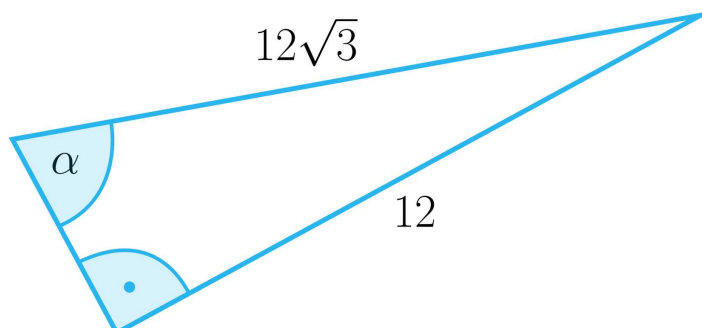
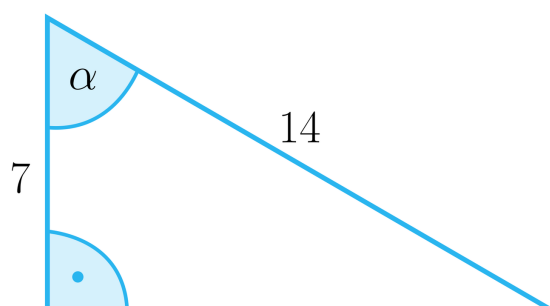
Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Wybierz wszystkie rysunki, na których kąt $\alpha = 60^\circ$.

☐☐☐☐

Ćwiczenie 3



Uporządkuj wyrażenia w kolejności rosnącej.

$$\sin 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$$



$$\cos 60^\circ - \sin 60^\circ$$



$$\sin 60^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ$$



$$\sin 60^\circ + \cos 60^\circ$$



Ćwiczenie 4



W trójkącie prostokątnym długość przeciwprostokątnej jest równa 16, a jeden z kątów ostrych jest równy 60° . Obwód tego trójkąta wynosi:

☐ $48 + 16\sqrt{3}$

☐ $24 + 16\sqrt{3}$

☐ $24 + 8\sqrt{2}$

☐ $24 + 8\sqrt{3}$

Ćwiczenie 5



Wpisz w luki liczby tak, aby otrzymać zdania prawdziwe.

Wysokość rombu o boku długości $2\sqrt{3}$ i kącie ostrym 60° wynosi .

Pole rombu o krótszej przekątnej długości $2\sqrt{3}$ i kącie ostrym 60° wynosi $a\sqrt{3}$. Zatem $a =$.

Bok rombu o dłuższej przekątnej $10\sqrt{3}$ i kącie ostrym 60° ma długość .

Ćwiczenie 6



Dany jest trapez równoramienny, którego krótsza podstawa jest równa 7 cm, a ramię długości 13 cm tworzy z dłuższą podstawą kąt 60° . Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Wysokość tego trapezu ma długość $\frac{13\sqrt{3}}{2}$.

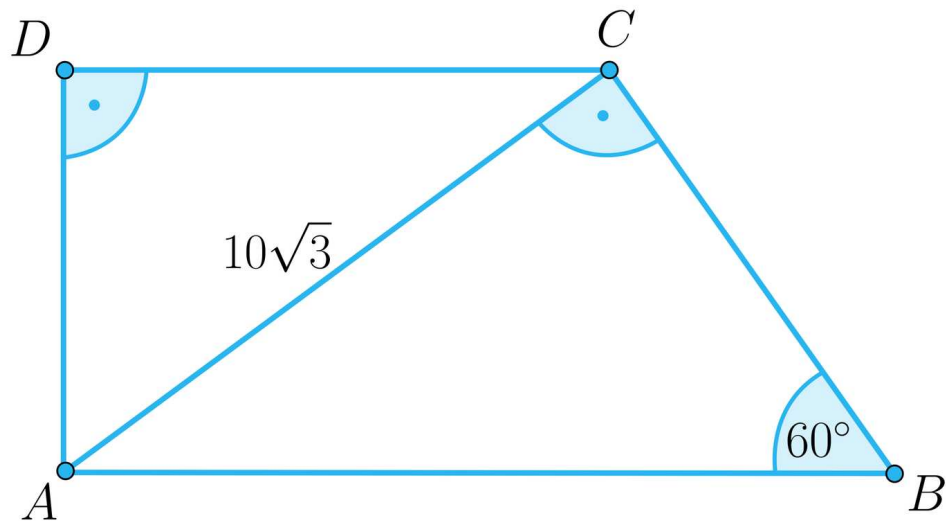
☐ Pole tego trapezu wynosi $\frac{351\sqrt{3}}{4}$.

☐ Dłuższa podstawa tego trapezu ma długość $7 + 7\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 7



Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ (jak na rysunku poniżej), w którym krótsza przekątna jest równa $10\sqrt{3}$, a dłuższe ramię tworzy z dłuższą podstawą kąt 60° .



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Krótsza podstawa tego trapezu ma długość 10.

☐ Wysokość tego trapezu ma długość $5\sqrt{3}$.

☐ Obwód tego trapezu wynosi $45 + 5\sqrt{3}$.

☐ Dłuższa podstawa tego trapezu ma długość 20.

Ćwiczenie 8



Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AC| = 10$ cm oraz $|BC| = 14$ cm. Na jakie odcinki dzieli bok BC wysokość poprowadzona z wierzchołka A , jeśli kąt ACB ma miarę 60° ? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $5\sqrt{3}$ cm i $(14 - 5\sqrt{3})$ cm

☐ 4 cm i 10 cm

☐ 6 cm i 8 cm

☐ 5 cm i 9 cm

Dla nauczyciela

Autor: Anna Wołoszyn

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 60°

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180° , w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° i 60° ;

6) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty).

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach;

11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- poznaje metodę wyprowadzenia wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 60°
- wykorzystuje wartości funkcji trygonometrycznych kąta 60° do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich
- analizuje zadania oraz wybiera najefektywniejszą metodę prowadzącą do ich rozwiązania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- wykład informacyjny
- burza mózgów
- pokaz multimedialny

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu
- projektor multimedialny
- e-podręcznik

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie podają definicje funkcji trygonometrycznych (zapisują je na tablicy).
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 3-osobowe grupy.
2. Nauczyciel prezentuje materiał „Konstrukcje kątów o miarach 15° , 30° , 45° , 60° ” e-podręcznika w części dotyczącej konstrukcji kąta 60° .
3. Każda z grup otrzymuje zadanie polegające na analizie materiału zawartego w sekcji „Przeczytaj”.
4. Uczniowie w grupach analizują przykłady zawarte w sekcji „Przeczytaj”.
5. Nauczyciel kontroluje pracę uczniów udzielając im wskazówek.
6. Uczniowie oglądają animację i omawiają ją wraz z nauczycielem.

7. Uczniowie rozwiązują zadania znajdujące się pod animacją.
8. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela.

Faza podsumowująca:

1. Wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych wskazanych przez nauczyciela.
2. Uczniowie określają co było dla nich trudne lub niezrozumiałe a nauczyciel udziela wyjaśnień.
3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wykonanie ćwiczeń interaktywnych, które nie zostały rozwiązane na lekcji.

Materiały pomocnicze:

- [Konstrukcje kątów o miarach \$15^\circ\$, \$30^\circ\$, \$45^\circ\$, \$60^\circ\$](#)
- [Trójkąty i ich własności](#)
- [Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego](#)

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może polecić przyniesienie cyrkli i na tych zajęciach uczniowie skonstruują kąt 60° .

Materiał może być inspiracją do przygotowania przez uczniów prezentacji opisującej model kosmologiczny Keplera oparty na wielościanach foremnych.

Materiały zawarte w multimedium uczniowie mogą wykorzystać w przygotowaniu się do lekcji. Umożliwi im to wystąpienie na zajęciach w roli ekspertów.