



Oś symetrii wykresu funkcji kwadratowej

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Schemat interaktywny](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Nie każdy wykres funkcji ma oś symetrii. Natomiast okazuje się, że dla każdej paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej istnieje prosta, względem której wykres tej funkcji jest symetryczny. W materiale określimy równanie prostej, która jest osią symetrii wykresu funkcji kwadratowej, a następnie wykorzystamy to równanie do rozwiązywania problemów matematycznych. Bazując na wiedzy teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Rozpoznasz oś symetrii wykresu funkcji kwadratowej.
- Określisz wzór na równanie prostej będącej osią symetrii wykresu funkcji kwadratowej.
- Wyznaczysz na podstawie wzoru funkcji kwadratowej lub jej wykresu równanie osi symetrii paraboli, która jest wykresem tej funkcji.
- Wykorzystasz poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Wykresem funkcji kwadratowej określonej na zbiorze \mathbb{R} wzorem

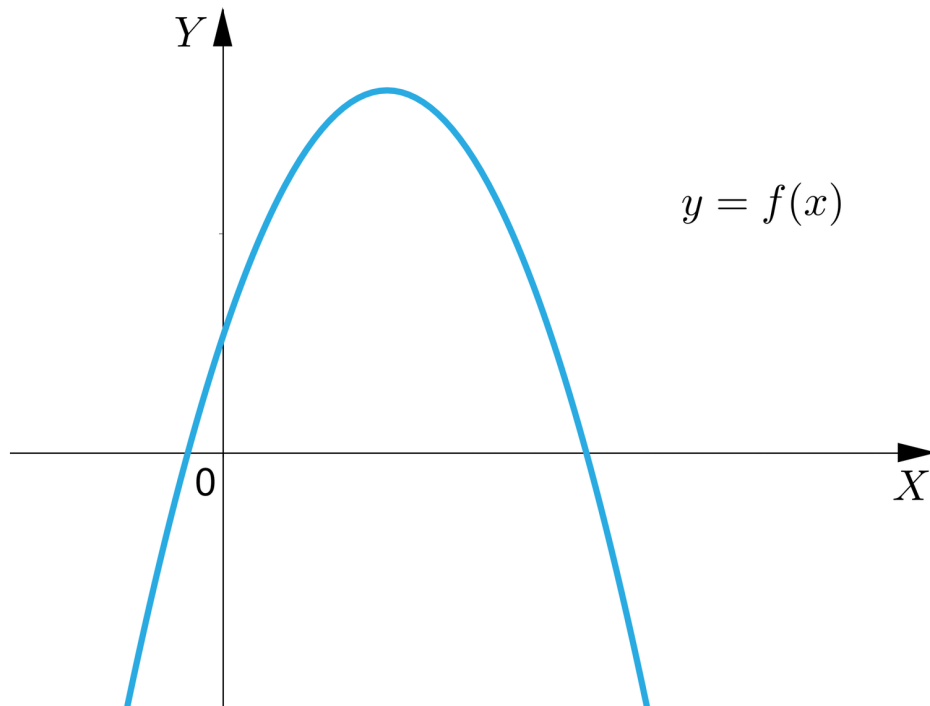
$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$ jest **parabola**.

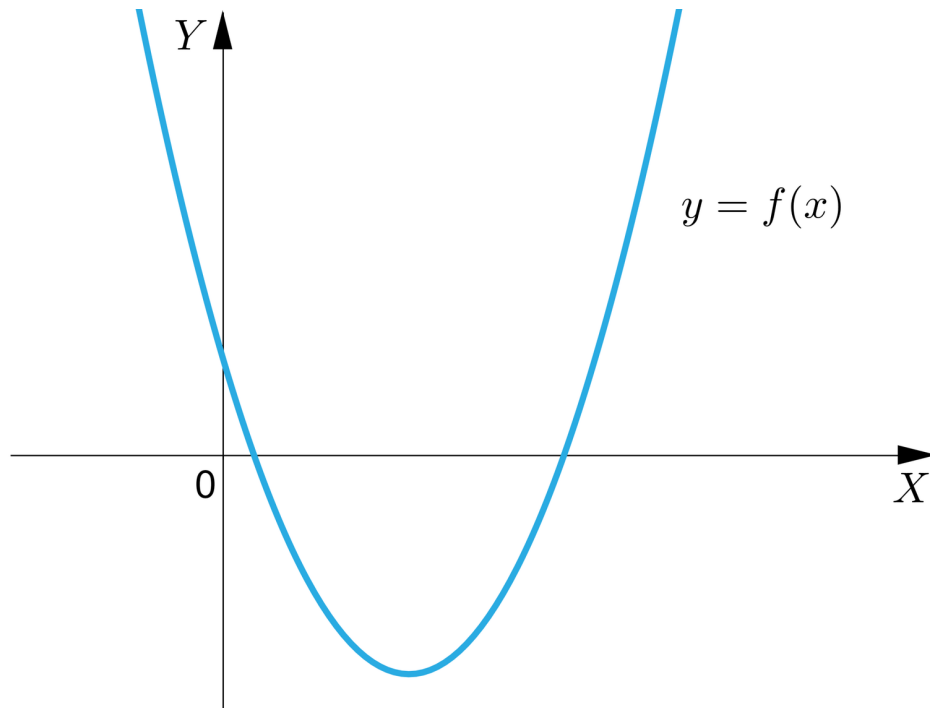
Ważne!

Jeżeli

- $a < 0$, to ramiona paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej są skierowane do dołu,



- $a > 0$, to ramiona paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej są skierowane do góry.



Zdefiniujmy pojęcie osi symetrii wykresu funkcji.

Definicja: Oś symetrii wykresu

Oś symetrii wykresu funkcji to prosta, względem której ten wykres jest sam do siebie symetryczny.

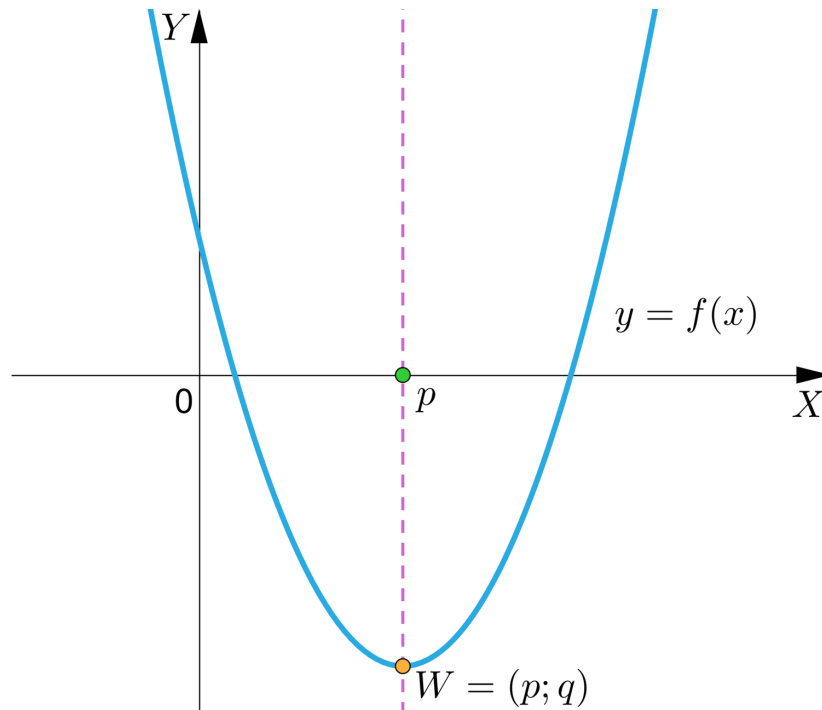
Oś symetrii paraboli – wykresu funkcji kwadratowej

Jeżeli funkcja kwadratowa jest określona wzorem

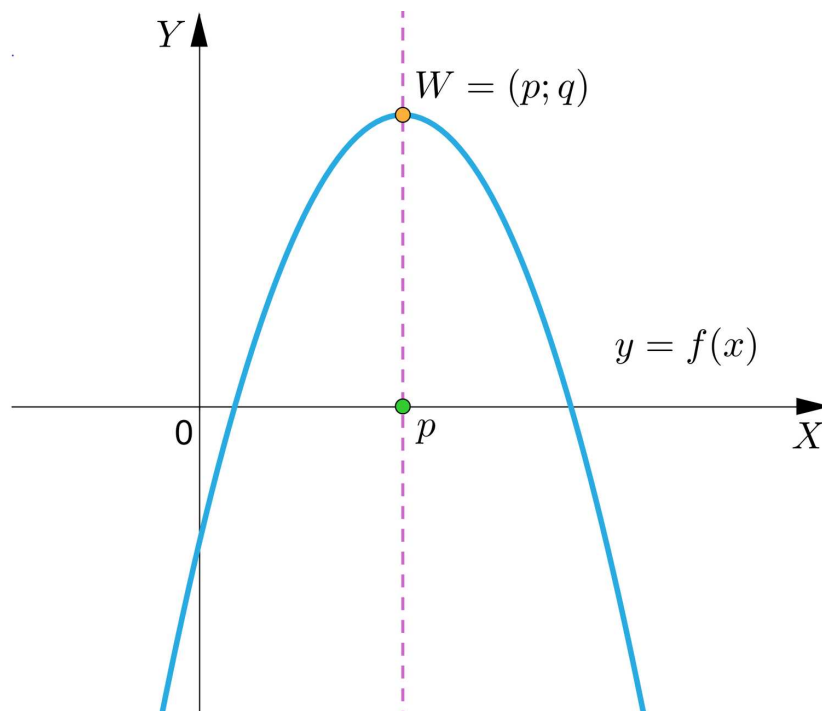
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$, a wierzchołkiem paraboli, która jest wykresem tej funkcji kwadratowej jest punkt o współrzędnych $W = (p, q)$, to osią symetrii wykresu tej funkcji jest prosta o równaniu

$$x = p = \frac{-b}{2a}$$



Wzór na równanie osi symetrii wykresu funkcji kwadratowej nie zależy od położenia ramion paraboli.



Oś symetrii wykresu funkcji kwadratowej jest zawsze równoległa do osi Y układu współrzędnych.

Przykład 1

Wyznamy równanie osi symetrii wykresu funkcji kwadratowej określonej wzorem:

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 4$

b) $f(x) = \sqrt{2}x^2 - x + 2$

Rozwiązanie:

a) $a = -\frac{1}{3}$ oraz $b = 2$, zatem

$$x = \frac{-2}{2 \cdot (-\frac{1}{3})} = \frac{-2}{-\frac{2}{3}} = 3$$

b) $a = \sqrt{2}$ oraz $b = -1$, zatem

$$x = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Jeżeli **funkcja kwadratowa** jest określona za pomocą wzoru w postaci kanonicznej $f(x) = a(x - p)^2 + q$, to bez wykonywania obliczeń możemy wyznaczyć równanie osi symetrii jej wykresu.

Przykład 2

Wyznamy równanie osi symetrii wykresu funkcji kwadratowej f określonej wzorem:

a) $f(x) = -3x^2 + 5$

b) $f(x) = 2(x - 2)^2 - 3$

c) $f(x) = -(x + 8)^2$

Rozwiązanie:

Za każdym razem odczytujemy wartość współczynnika p , zatem osią symetrii wykresu funkcji f jest prosta o równaniu:

a) $x = 0$

b) $x = 2$

c) $x = -8$

Zauważmy, że jeśli do wykresu funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$ należą punkty, których pierwsze współrzędne to odpowiednio x_1 i x_2 oraz punkty te leżą po obu stronach osi symetrii wykresu, w równych odległościach od jej wierzchołka, to równanie osi symetrii wykresu takiej funkcji kwadratowej opisujemy za pomocą wzoru

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Przykład 3

Do wykresu funkcji kwadratowej f należą punkty o współrzędnych $(-3, 5)$ oraz $(5, 5)$. Wyznamy równanie osi symetrii paraboli, która jest wykresem tej funkcji.

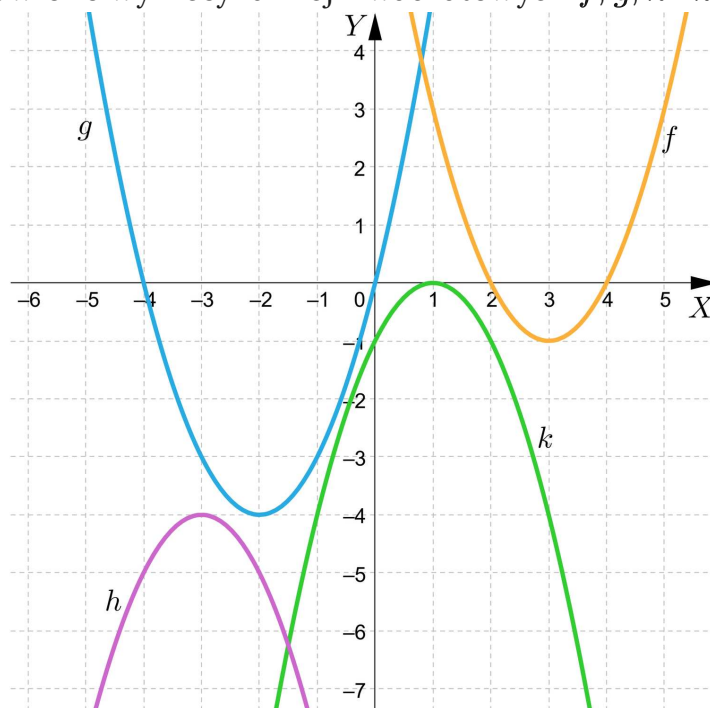
Rozwiązanie:

Jeżeli do wykresu funkcji kwadratowej f należą punkty o współrzędnych $(-3, 5)$ oraz $(5, 5)$, to korzystając z powyższej własności równanie osi symetrii jest postaci:

$$x = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Przykład 4

Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji kwadratowych f , g , h i k .



Odczytamy równania osi symetrii wykresów tych funkcji.

Rozwiązanie:

Równania osi symetrii tych funkcji są określone poniższymi wzorami:

- dla wykresu funkcji f : $x = 3$,
- dla wykresu funkcji g : $x = -2$,
- dla wykresu funkcji h : $x = -3$,
- dla wykresu funkcji k : $x = 1$.

Przykład 5

Wyznamy, dla jakich wartości parametru m osią symetrii wykresu funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = x^2 + (m^2 - m)x + 3$ jest prosta o równaniu $x = -6$.

Rozwiązanie:

Wartości współczynników ze wzoru funkcji kwadratowej f wynoszą odpowiednio:

$$a = 1$$

$$b = m^2 - m$$

Zatem oś symetrii paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej f opisuje równanie:

$$x = \frac{-m^2+m}{2}$$

Wobec tego do wyznaczenia wartości parametru rozwiązujemy równanie:

$$-6 = \frac{-m^2+m}{2}$$

$$-m^2 + m + 12 = 0$$

$$m_1 = \frac{-1-7}{-2} = 4 \text{ oraz}$$

$$m_2 = \frac{-1+7}{-2} = -3$$

Wobec tego $m \in \{-3, 4\}$.

Przykład 6

Wyznamy, dla jakich wartości parametru m równaniem osi symetrii wykresu funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = 2x^2 - (m + 3)x - 2$ jest prosta, która leży w I i IV ćwiartce układu współrzędnych.

Rozwiązanie:

Wartości współczynników ze wzoru funkcji kwadratowej f wynoszą odpowiednio:

$$a = 2$$

$$b = -(m + 3)$$

Zatem oś symetrii paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej f opisuje równanie:

$$x = \frac{m+3}{4}$$

Jeżeli oś symetrii wykresu tej funkcji leży w I i IV ćwiartce układu współrzędnych, to do wyznaczenia wartości parametru m rozwiązujemy nierówność:

$$\frac{m+3}{4} > 0$$

Zatem $m > -3$, czyli $m \in (-3, \infty)$.

Przykład 7

Do wykresu funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$ należą punkty o współrzędnych $(-1, -2)$, $(2, -5)$ oraz $(0, 1)$.

Wyznamy równanie osi symetrii wykresu tej funkcji.

Rozwiązanie:

Jeżeli do wykresu funkcji kwadratowej f należą punkty o współrzędnych $(-1, -2)$, $(2, -5)$ oraz $(0, 1)$, to do wyznaczenia wartości współczynników a, b, c rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} -2 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \\ -5 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \\ 1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 = a - b + c \\ -5 = 4a + 2b + c \\ 1 = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 = a - b + 1 \\ -5 = 4a + 2b + 1 \\ 1 = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Zatem osią symetrii paraboli, która jest wykresem funkcji f jest prosta o równaniu:

$$x = \frac{-1}{2 \cdot (-2)} = \frac{1}{4}$$

Przykład 8

Wyznamy równanie osi symetrii wykresu funkcji f określonej wzorem

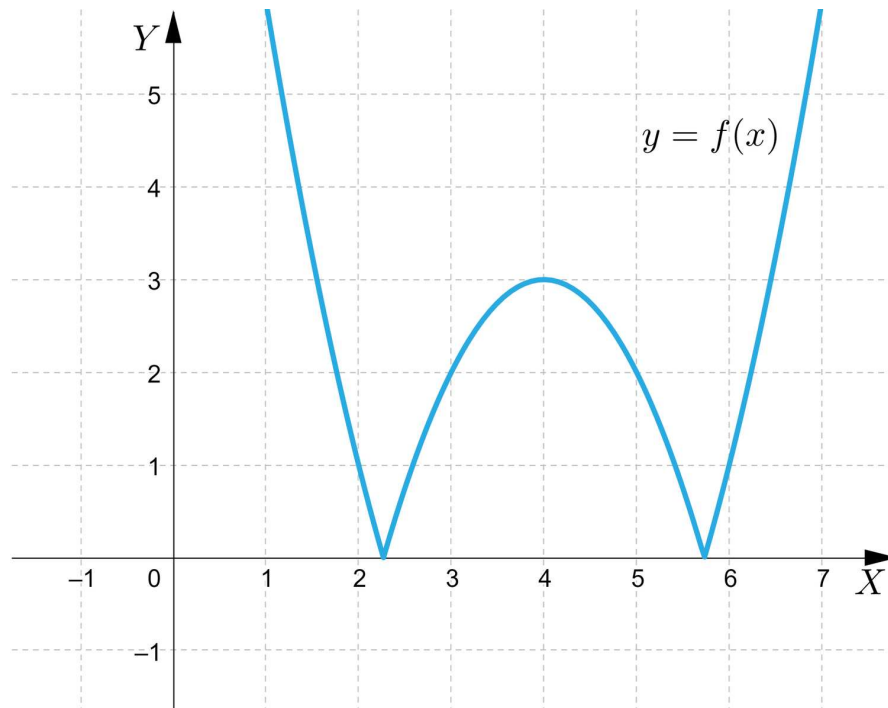
$$f(x) = |x^2 - 8x + 13|.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że wzór funkcji f możemy zapisać w następującej postaci:

$$f(x) = |x^2 - 8x + 13| = |(x - 4)^2 - 3|$$

Wykres tej funkcji przedstawiono na poniższym rysunku.



Zatem osią symetrii wykresu tej funkcji jest prosta o równaniu $x = 4$.

Słownik

parabola

wykres funkcji kwadratowej

funkcja kwadratowa

funkcja określona wzorem

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$

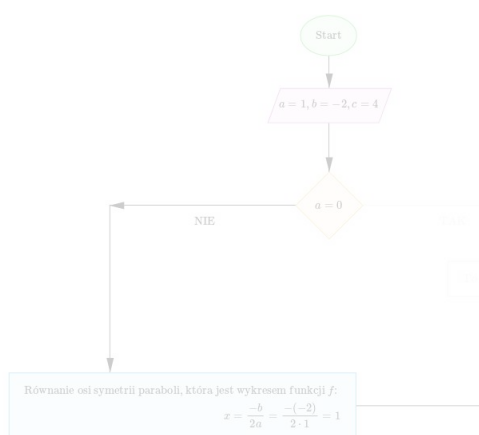
Schemat interaktywny

Polecenie 1

Przeanalizuj działanie schematu interaktywnego, a następnie rozwiąż poniższe polecenie.

Podaj parametry całkowite funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$:

$a = 1$
 $b = -2$
 $c = 4$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dyeai06G1>

Polecenie 2

Podaj równania osi symetrii wykresów funkcji kwadratowych f określonych wzorami:

a) $f(x) = \sqrt{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$

b) $f(x) = (\sqrt{3} + 1)x^2 + x + 2$

c) $f(x) = -\sqrt{5}x^2 + 5$

Polecenie 3

Stwórz algorytm obliczający równanie osi symetrii paraboli, która jest wykresem funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$, mając dane jej parametry.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



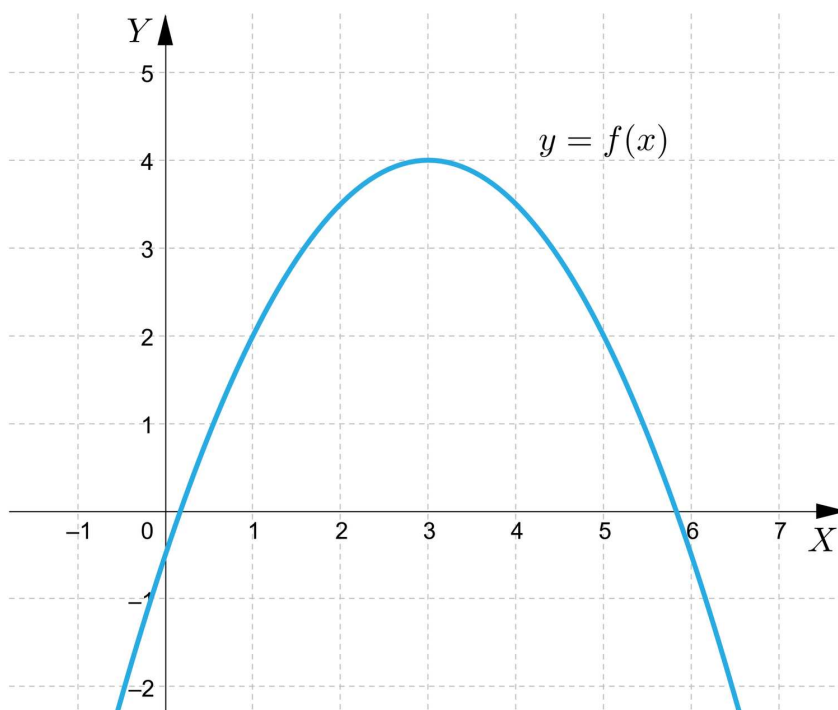
Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Ćwiczenie 7



Do wykresu funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$ należą punkty o współrzędnych $(-1, -2)$, $(2, 4)$ oraz $(3, 2)$.

Wyznaczmy równanie osi symetrii wykresu tej funkcji.

Ćwiczenie 8



Wyznaczmy równanie osi symetrii wykresu funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = |-x^2 - 8x - 13|$.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Oś symetrii wykresu funkcji kwadratowej

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje);

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje oś symetrii wykresu funkcji kwadratowej;
- określa wzór na równanie prostej będącej osią symetrii wykresu funkcji kwadratowej;
- wyznacza na podstawie wzoru funkcji kwadratowej lub jej wykresu równanie osi symetrii paraboli, która jest wykresem tej funkcji;
- wykorzystuje poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda kota i myszy;
- liga zadaniowa;
- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi wybraną osobę o odczytanie tematu lekcji tj. „Oś symetrii wykresu funkcji kwadratowej”, a następnie określa cele i kryteria sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Schemat interaktywny”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy materiału.
3. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.
4. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują zadania 3-5 na czas (od zadania łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże zadania jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
5. Uczniowie rozwiązują zadania wykonując ćwiczenia nr 6, 7 i 8 w sekcji „Sprawdź się” metodą kot i mysz. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po 2 nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej - role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem - procedura się powtarza.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, omawia ewentualne problemy podczas rozwiązania ćwiczeń w temacie: „Oś symetrii wykresu funkcji kwadratowej”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub jej wykresie.](#)
- [Współrzędne wierzchołka paraboli.](#)

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Schemat interaktywny” można wykorzystać jako powtórzenie wiadomości z zakresu wyznaczania osi symetrii wykresu funkcji kwadratowej.
- „Schemat interaktywny” można zastosować do szkicowania wykresów funkcji kwadratowej oraz wyznaczania współrzędnych wierzchołka paraboli, będącej wykresem tej funkcji.