

Rachunki pamięciowe na dużych liczbach

Materiał zawiera ilustracje (fotografie, obrazy, rysunki), filmy, ćwiczenia, w tym ćwiczenia interaktywne.

Filmy - dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie w pamięci dużych liczb zakończonych zerami.

Przykłady i ćwiczenia - dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie w pamięci dużych liczb zakończonych zerami, również w sytuacjach praktycznych.

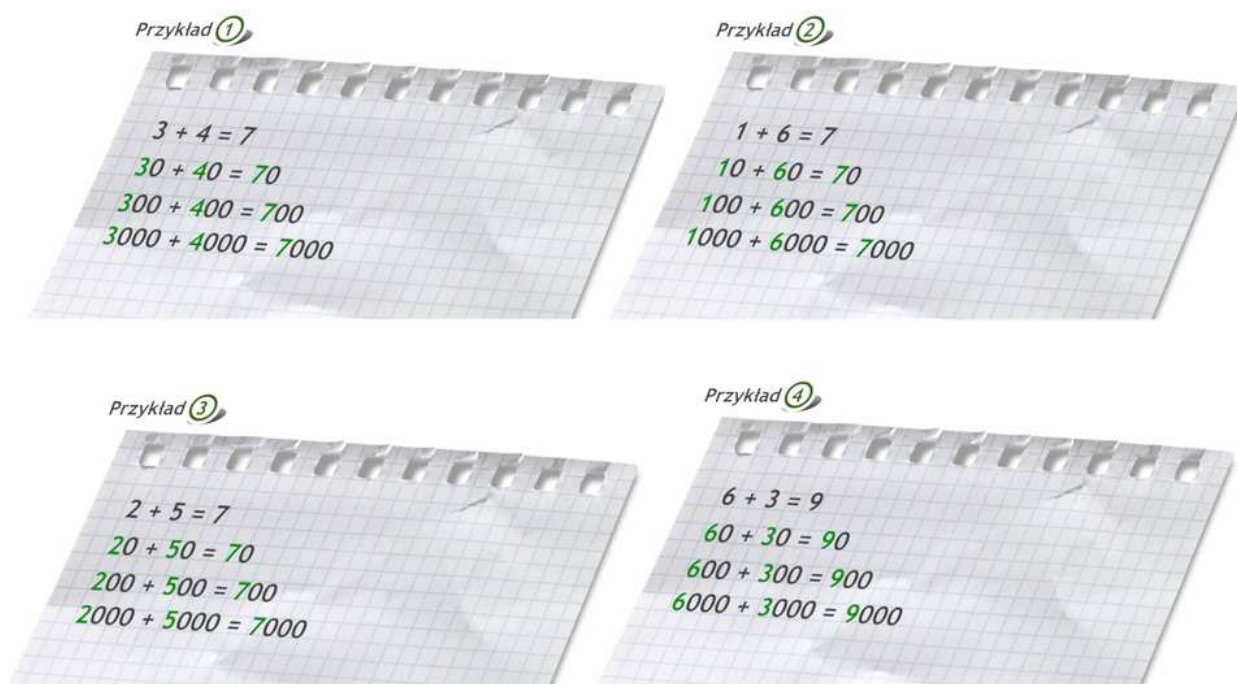
Ciekawostka - mnożenie w pamięci liczb mniejszych od 100 (np. 95 i 96).

Rachunki pamięciowe na dużych liczbach

W naszym otoczeniu często spotykamy duże liczby. Ceny niektórych produktów zapisane są za pomocą liczb wielocyfrowych – rower kosztuje ponad 400 zł, a komputer około 4000 zł. Podróżując, pokonujemy duże odległości. Z Warszawy do Paryża jest 1400 km, a do Nowego Jorku 6900 km. Dzięki umiejętności liczenia na dużych liczbach wiemy, że komputer jest droższy od roweru 10 razy, a Paryż jest o 5500 km bliżej Warszawy niż Nowy Jork.

Do rachunków na takich liczbach nie zawsze potrzebujemy kalkulatora, niektóre można wykonać w pamięci. Jeśli umiemy dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić pamięciowo małe liczby, to powinniśmy poradzić sobie także z działaniami na niektórych większych liczbach.

Przykład 1



Film dostępny pod adresem [/preview/resource/RJO98WsMXT3OJ](#)

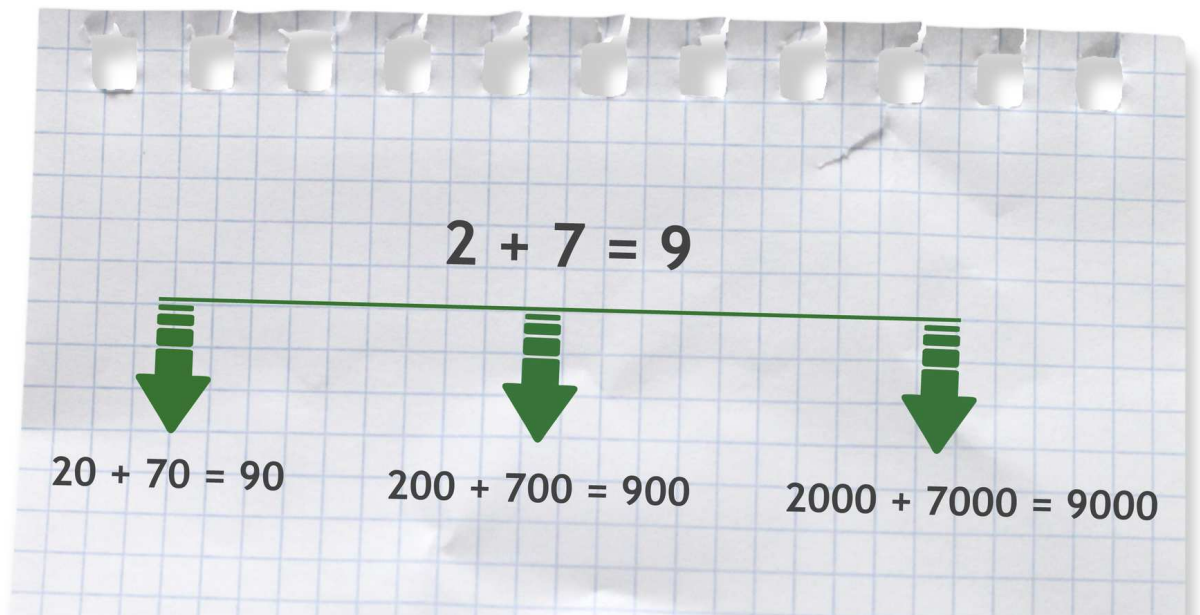
Rachunki pamięciowe na dużych liczbach_atrapa_animacja_40

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia przykłady pamięciowego dodawania liczb zakończonych zerami.

Przykład 2

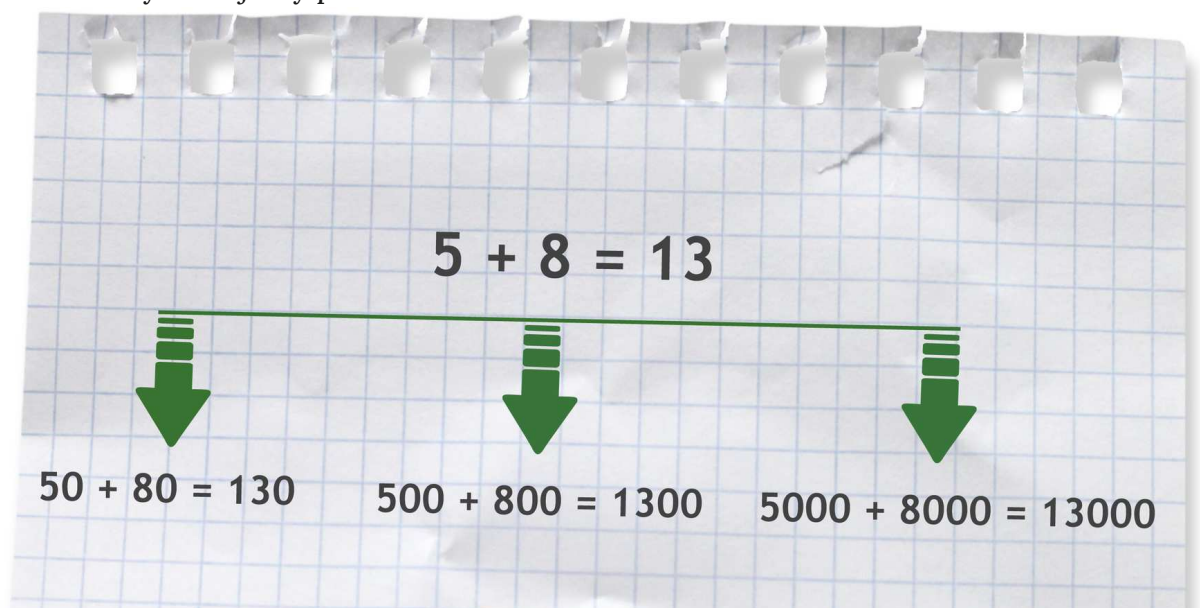
Jeśli wiemy, że $2 + 7 = 9$, to dodawanie liczb 20 i 70 sprowadza się do dodania 2 i 7 oraz dopisania do wyniku, czyli 9, zera.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Analogicznie dodajemy 200 i 700. Znow dodajemy 2 i 7 i dopisujemy do wyniku, czyli 9, dwa zera. Dodając 2000 i 7000 postępujemy tak samo. Dodajemy 2 i 7, a do wyniku dopisujemy trzy zera.

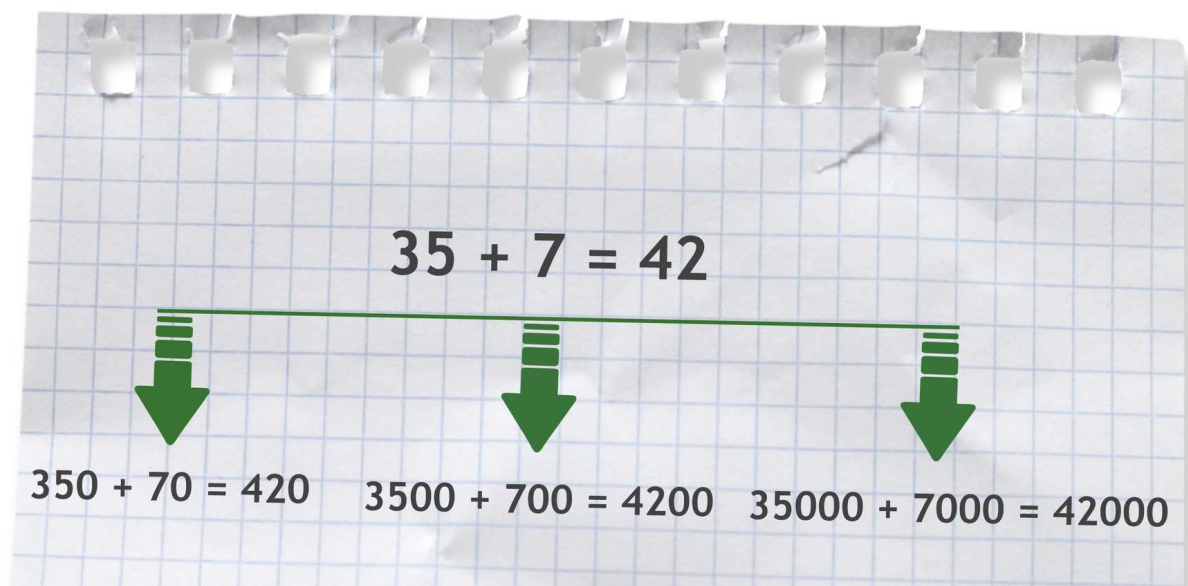
Większe liczby dodajemy podobnie.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

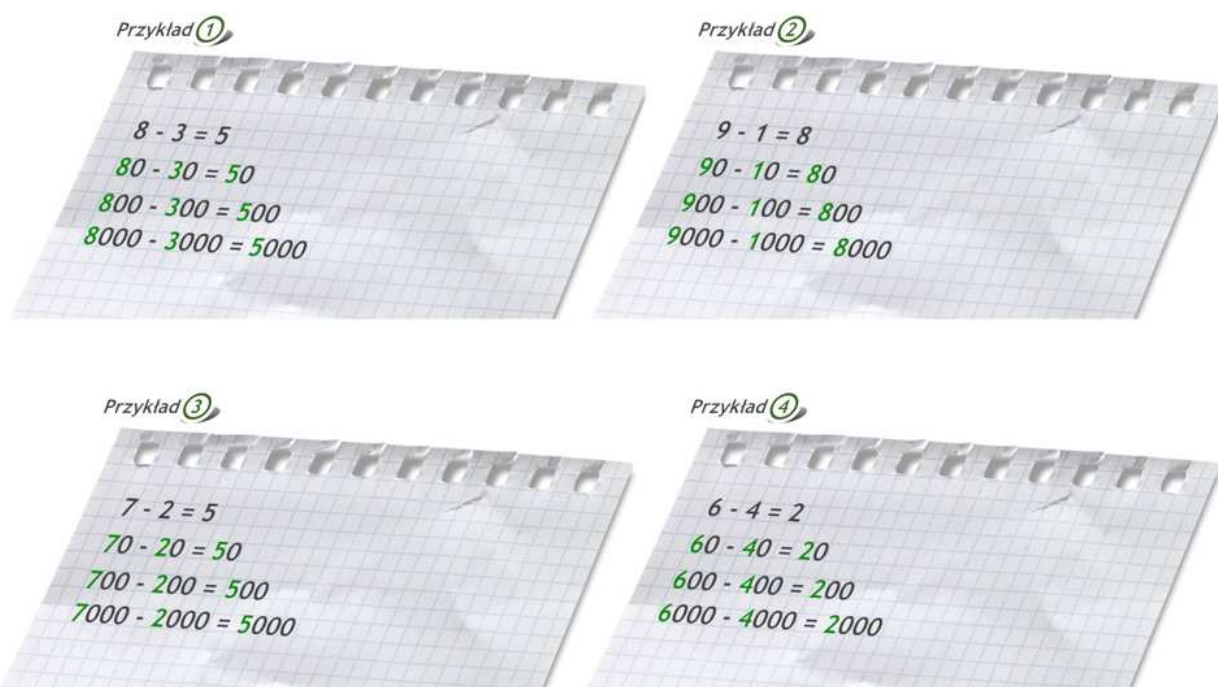
Przykład 3

Podobnie jak w poprzednim przykładzie dodajemy większe liczby.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 4



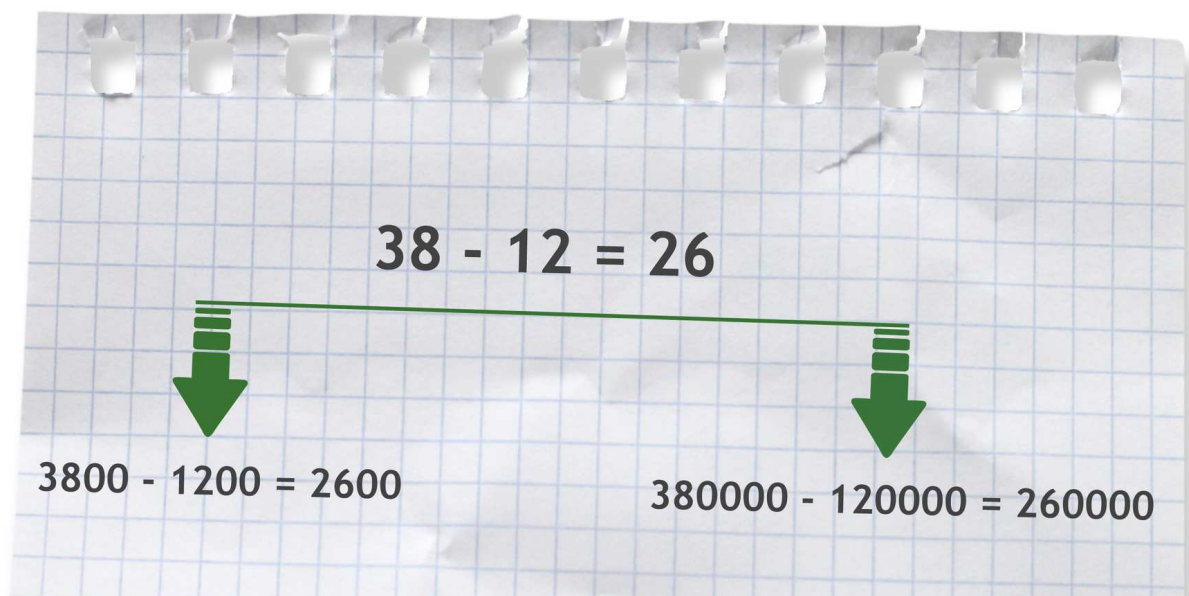
Film dostępny pod adresem </preview/resource/RqyLusAN19XJu>

Rachunki pamięciowe na dużych liczbach_atrapa_animacja_41

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia przykłady pamięciowego odejmowania liczb zakończonych zerami.

Przykład 5



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 1



Uzupełnij poniższe równości odpowiednimi cyframi. Kliknij w lukę, aby rozwinąć listę i wybierz brakujące cyfry dla każdej równości.

- $3700 + 5100 = \boxed{}00$
- $14000 + 25000 = 39\boxed{}$
- $3900 + 4500 = \boxed{}00$
- $270000 + 540000 = \boxed{}0000$
- $9200 + 4600 = 138\boxed{}$
- $12000 + 97000 = \boxed{}000$
- $5300 + 200 = 55\boxed{}$
- $23000 + 8000 = 31\boxed{}$
- $400 + 1200 = \boxed{}00$
- $434000 + 25000 = \boxed{}000$

000	84	000	459	81	4590	88	459	0000	161	109	008
16	00	00	00000								

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



Uzupełnij luki, wpisując odpowiednie cyfry.

- $8900 - 5400 = \boxed{}00$
- $76000 - 15000 = \boxed{}000$
- $6700 - 2500 = 42\boxed{}$
- $4200000 - 4100000 = \boxed{}00000$
- $8200 - 8000 = 2\boxed{}$
- $36000 - 27000 = 9\boxed{}$
- $9700 - 4000 = 57\boxed{}$
- $830000 - 8000 = \boxed{}000$
- $1100 - 20 = 108\boxed{}$
- $22200 - 500 = 217\boxed{}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Oblicz w pamięci, a następnie kliknij w lukę, aby rozwinąć listę i wybierz poprawną liczbę dla każdej równości.

- $300 + 1800 = \boxed{}$
- $6700 - 500 = \boxed{}$
- $2000 + 2400 + 1500 = \boxed{}$
- $100000 - 35000 - 12000 = \boxed{}$
- $18000 - 6400 = \boxed{}$
- $230000 + 17000 = \boxed{}$
- $24000 + 8000 - 2000 = \boxed{}$
- $7500 + 2500 = \boxed{}$

247000

11600

92000

10000

400000

119200

40000

30000

5300

116000

6200

5900

53000

2100

62000

1000

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ciekawostka

Wiadomo, że:

$$12 + 21 = 33 = 3 \cdot 11$$

$$123 + 321 = 444 = 4 \cdot 111$$

$$234 + 432 = 666 = 6 \cdot 111$$

$$123456 + 654321 = 777777 = 7 \cdot 111111.$$

Zastanów się, jakich liczb dotyczy ta zależność. Czy wszystkich? A może składniki sum coś łączy? Podaj kilka kolejnych przykładów.

Jeśli potrafimy mnożyć w pamięci liczby w zakresie 100, to poradzimy sobie również z mnożeniem niektórych dużych liczb.

Najłatwiej mnożyć liczby przez 10, 100, 1000, 10000 itd.

Ćwiczenie 4

Wykonaj wskazane w tabeli mnożenia, używając kalkulatora. Uzupełnij komórki tabeli, wpisując odpowiednie wartości.

.	3	7	13	45	72	105	238
10							
100							
1000							

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zapamiętaj!

- Aby pomnożyć liczbę przez 10, wystarczy do tej liczby dopisać na jej końcu jedno zero.
- Aby pomnożyć liczbę przez 100, wystarczy do tej liczby dopisać na jej końcu dwa zera.
- Aby pomnożyć liczbę przez 1000, wystarczy do tej liczby dopisać na jej końcu trzy zera.

- Aby pomnożyć liczbę przez 10000, wystarczy do tej liczby dopisać na jej końcu cztery zera.

Przykład 6

Jak pomnożyć daną liczbę przez 20, 30, 40, 50, ... lub przez 200, 300, 400, 500, ...? Czy jest to równie proste?



Wpłaciliśmy do banku 30 banknotów o nominale 200 euro każdy.
Jaką kwotę wpłaciliśmy?

$$\begin{aligned} 30 \cdot 200 &= (3 \cdot 10) \cdot (2 \cdot 100) = \\ &= (3 \cdot 2) \cdot (10 \cdot 100) = \\ &= 6 \cdot 1000 = 6000 \end{aligned}$$

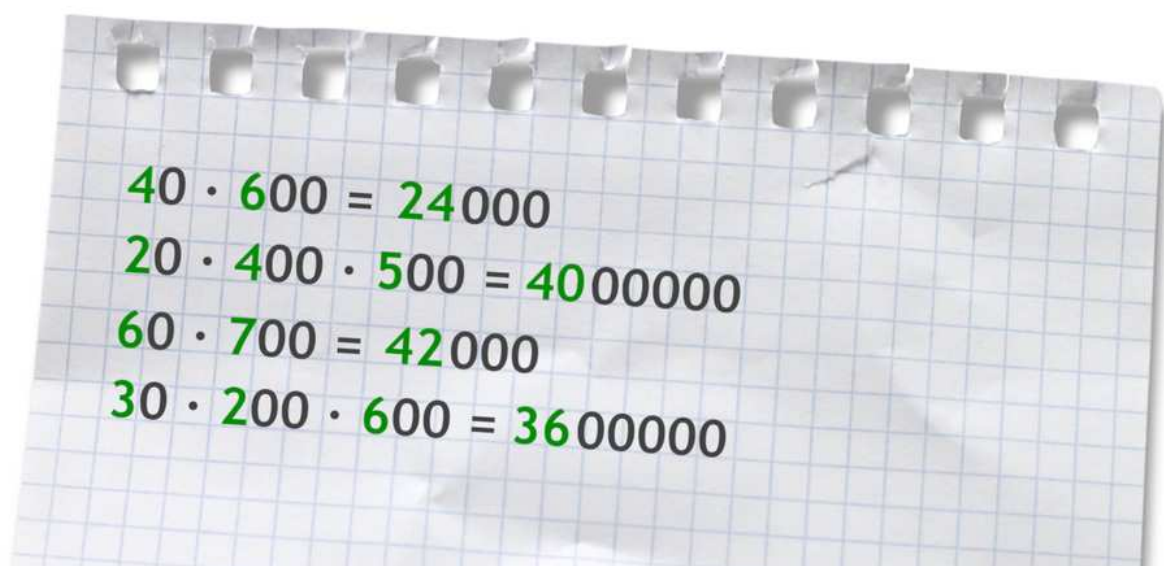
Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1ObVTcbuRSeP>

Rachunki pamięciowe na dużych liczbach_atrapa_animacja_42

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia przykład pamięciowego mnożenia liczb zakończonych zerami.

Przykład 7



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1ZZO1C86Who9>

Rachunki pamięciowe na dużych liczbach_atrapa_animacja_43

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia przykłady pamięciowego mnożenia liczb zakończonych zerami.

Ważne!

Jeśli mnożymy liczby, które są zakończone zerami, to:

- mnożymy liczby, które zostaną po odrzuceniu zer,
- do otrzymanego wyniku dopisujemy tyle zer, ile łącznie odrzuciliśmy.

Ćwiczenie 5



Uzupełnij poniższe luki odpowiednimi cyframi. Kliknij w lukę, aby rozwinąć listę i wybierz brakujące cyfry dla każdej równości.

- $30 \cdot 600 = 18$
- $500 \cdot 700 =$ 0000
- $200 \cdot 8000 =$
- $400 \cdot$ $= 360000$
- $\cdot 2000 = 160000$
- $70 \cdot$ $= 21000$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 8

Dzielenie i mnożenie są działaniami wzajemnie odwrotnymi, stąd:

- $13 \cdot 10 = 130$, zatem $130 : 10 = 13$
- $50 \cdot 10 = 500$, zatem $500 : 10 = 50$
- $2700 \cdot 10 = 27000$, zatem $27000 : 10 = 2700$
- $4000 \cdot 10 = 40000$, zatem $40000 : 10 = 4000$

Porównaj zapis dzielnej i ilorazu. Czym różnią się zapisy tych liczb?

Ważne!

Jeżeli dzielimy przez 10 liczbę zakończoną zerem (lub zerami), to jako wynik zapisujemy dzielną bez jednego zera na końcu.

Przykład 9

Dzielenie przez 100 możemy zastąpić dwukrotnym dzieleniem przez 10.

- $4500 : 100 = (4500 : 10) : 10 = 450 : 10 = 45$, czyli $4500 : 100 = 45$
- $6000 : 100 = (6000 : 10) : 10 = 600 : 10 = 60$, czyli $6000 : 100 = 60$
- $970000 : 100 = (970000 : 10) : 10 = 97000 : 10 = 9700$, czyli $970000 : 100 = 9700$

Porównaj zapis dzielnej i ilorazu. Czym teraz różnią się zapisy tych liczb?

Ważne!

- Jeżeli dzielimy przez 100 liczbę zakończoną zerami, to jako wynik zapisujemy dzielną z opuszczonymi na końcu dwoma zerami.
- Podobnie zapisujemy wynik dzielenia przez 1000, 10000, 100000, ... Wynikiem jest odpowiednio dzielna bez trzech, czterech, pięciu, ... zer na końcu.

Przykład 10

$$8\cancel{0} : 1\cancel{0} = 8 : 1 = 8$$

$$42\cancel{0}\cancel{0} : 7\cancel{0}\cancel{0} = 42 : 7 = 6$$

$$32\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} : 8\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} = 32 : 8 = 4$$

Przykłady.

$$12\cancel{0}\cancel{0} : 6\cancel{0}\cancel{0} = 12 : 6 = 2 \quad \Rightarrow 2 \cdot 600 = 1200$$

$$63\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} : 7\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} = 63 : 7 = 9 \quad \Rightarrow 9 \cdot 7000 = 63000$$

Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1RlNhbxCL5Zq>

Rachunki pamięciowe na dużych liczbach_atrapa_animacja_44

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia przykłady pamięciowego dzielenia liczb zakończonych zerami.

Przykład 11

Przyjrzyj się poniższym przykładom, w których pokazano, jak można ułatwić dzielenie, gdy w dzielnej i dzielniku jest inna liczba zer.

- $2400 : 8 = 300$
- $180\cancel{0} : 2\cancel{0} = 180 : 2 = 90$
- $5600\cancel{0}\cancel{0} : 28\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} = 5600 : 28 = 200$

Ćwiczenie 6



Oblicz, a następnie wpisz w luki odpowiednie liczby.

- $270 : 10 =$
- $1450 : 10 =$
- $2400 : 100 =$
- $7600 : 10 =$
- : 1000 = 23
- $4600 :$ $= 46$
- $590000 :$ $= 590$
- : 10 = 3200

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Uzupełnij luki, wpisując w nie odpowiednie liczby.

- $2800 : 400 =$
- $480 : 60 =$
- $2600 : 200 =$
- $81000 : 9000 =$
- $3000 : 500 =$
- : 300 = 5
- : 70 = 60
- $35000 :$ $= 50$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Oblicz w pamięci, a następnie kliknij w lukę, aby rozwinąć listę i wybierz poprawną liczbę dla każdej równości.

- $24000 : 30 =$
- $2400 : 300 =$
- $20 \cdot 40 =$
- $80000 : 10 =$
- $400 \cdot 2 =$
- $86000 : 4300 =$
- $20 \cdot 2 \cdot 20 =$
- $80000 : 200 =$

1020	400	8000	300	800	800	790	880	20	9200	800	4000
800	80	9000	5300	780	40	8					

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Nie wykonując obliczeń, uzupełnij luki znakiem: $>$, $<$ lub $=$.

- $1100 + 2600$ $990 + 2600$
- $90000 + 20000$ 1000000
- $8400 - 2500$ $8400 - 2400$
- $10000 - 1$ $999 + 999$
- $360 : 40$ $3600 : 400$
- $50 \cdot 600$ 3000

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



Pan Kowalski kilka razy w tygodniu wypłacał pieniądze z banku.

Uzupełnij zdania, wpisując w luki odpowiednie kwoty.

- W poniedziałek otrzymał 10 banknotów po 100 zł, czyli zł.
- We wtorek otrzymał 100 banknotów po 50 zł, czyli zł.
- W czwartek otrzymał 350 banknotów po 10 zł, czyli zł.
- W piątek otrzymał 30 banknotów po 200 zł, czyli zł.
- W sobotę pan Kowalski obliczył, że w ciągu tego tygodnia wypłacił razem zł.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



Pani Jola, mieszkanka Warszawy, postanowiła zwiedzić kilka innych stolic. Najpierw poleciała do Tokio, a stamtąd do Pekinu. Przed powrotem do Warszawy zwiedziła jeszcze Kair. W informacji turystycznej dowiedziała się, że z Warszawy do Tokio jest 8600 km, z Tokio do Pekinu – 2100 km, z Pekinu do Kairu – 7500 km, a z Kairu do Warszawy – 2600 km. Jaką łączną długość miała trasa, którą pokonała pani Jola podczas tej wycieczki? Wpisz w lukę prawidłową odpowiedź.

Odpowiedź: Trasa miała długość km.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ciekawostka

Łatwo możemy pomnożyć w pamięci dwie liczby dwucyfrowe trochę mniejsze od 100, na przykład 96 i 95.

Aby wykonać takie działanie, musimy najpierw znaleźć liczby, które są dopełnieniami czynników do 100, czyli w przypadku 96 jest to 4 (tyle brakuje do 100), a w przypadku 95 jest to 5 (tyle brakuje do 100).

Mamy następującą sytuację:

$$\overbrace{96}^4 \cdot \overbrace{95}^5 = .$$

Zaczynamy zapisywać wynik tego mnożenia.

Na początku odejmujemy od dowolnego czynnika liczbę, która jest dopełnieniem drugiego czynnika. Otrzymujemy liczbę 91 ($96 - 5$ lub $95 - 4$), która jest początkiem wyniku mnożenia.

Następnie do tej liczby dopisujemy iloczyn liczb, które są dopełnieniami, czyli 20 ($4 \cdot 5$). Gdy iloczyn dopełnień jest liczbą jednocyfrową, poprzedzamy go cyfrą 0.

$$\overbrace{96}^4 \cdot \overbrace{95}^5 = 9120.$$

W ten sposób można wprawdzie mnożyć dowolne liczby dwucyfrowe, ale gdy są one znacznie mniejsze niż 100, to rachunki pamięciowe są uciążliwe.

Spróbuj pomnożyć w ten sposób inne liczby.