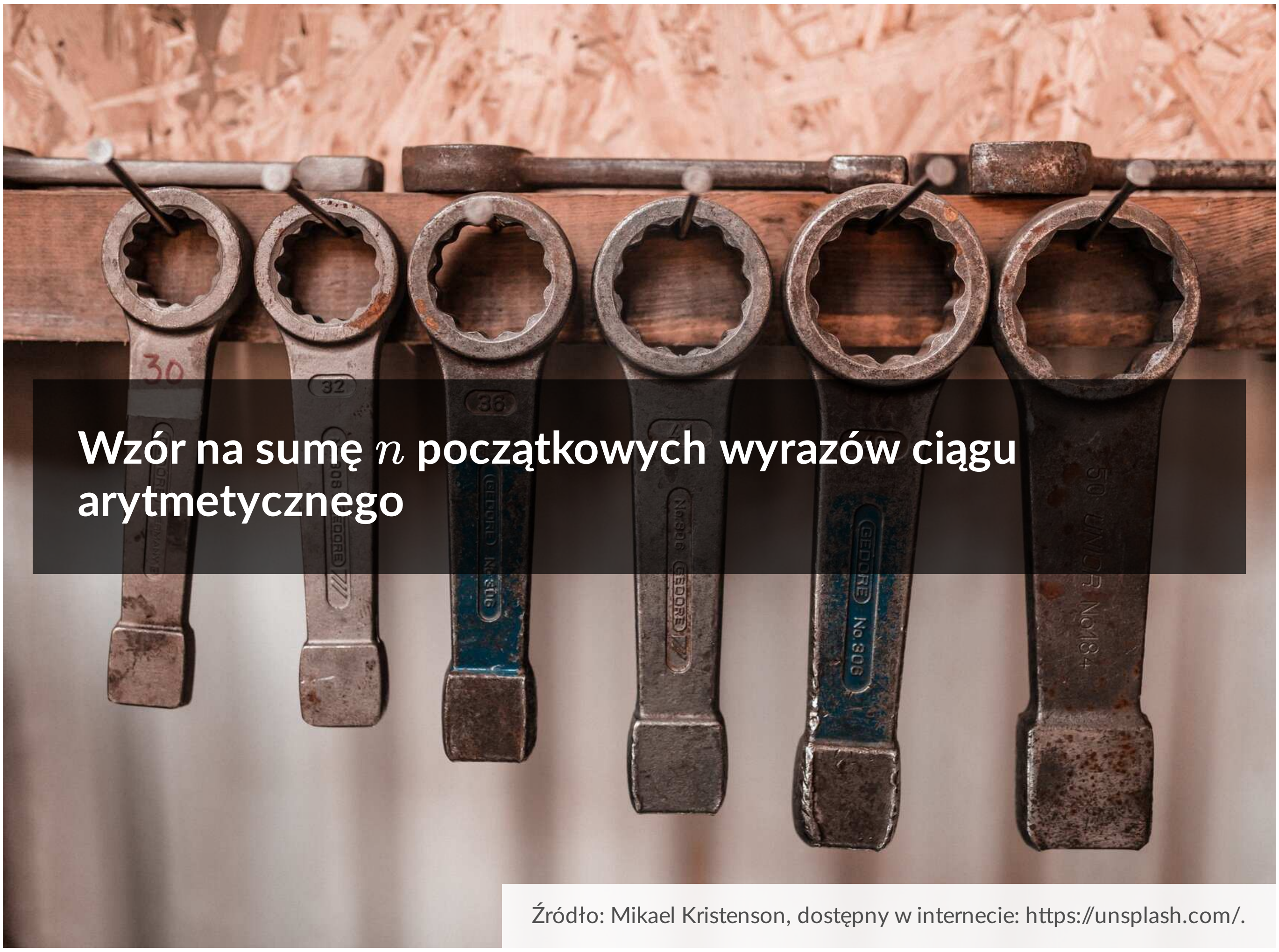
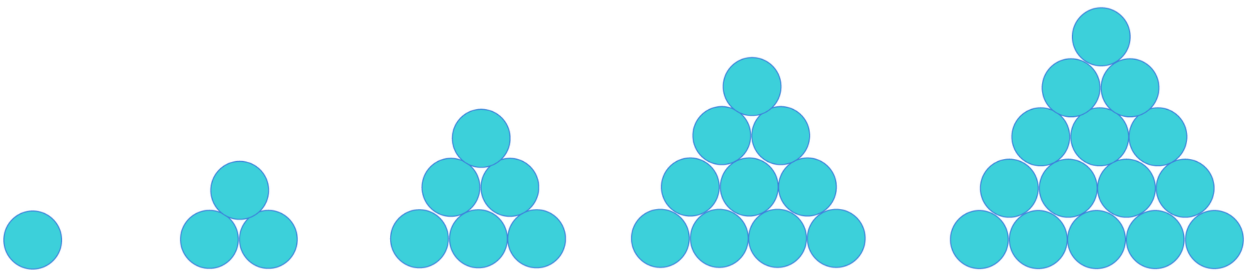
Wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego



Źródło: Mikael Kristenson, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Czy wiesz, że kolejne liczby trójkątne można utworzyć jako sumy kolejnych liczb naturalnych dodatnich?



1 $\quad 1+2=3$ $\quad 1+2+3=6$ $\quad 1+2+3+4=10$ $\quad 1+2+3+4+5=15$

W tym materiale zajmiemy się wyznaczaniem sumy kolejnych liczb naturalnych, jak również innych liczb, będących wyrazami danego ciągu arytmetycznego.

Poznamy wzór na sumę n kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego i niektóre jego zastosowania.

Twoje cele

- Wyprowadzisz wzór na sumę n kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego.
- Obliczysz sumę n kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego.
- Wyznaczysz wielkości związane z ciągiem arytmetycznym o znanej sumie częściowej.

Przeczytaj

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy r. Chcemy znaleźć wzór na sumę S_n kolejnych n początkowych wyrazów tego ciągu.

W tym celu najpierw przypomnimy sobie wzór na wyraz ogólny ciągu arytmetycznego.

Twierdzenie: Wzór ogólny ciągu arytmetycznego

Wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) o wyrazie pierwszym a_1 i różnicy r ma postać

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Przypomnijmy też ważną własność wyrazów ciągu arytmetycznego, z której będziemy korzystać.

Twierdzenie: Suma wyrazów ciągu arytmetycznego jednakowo odległych

W skończonym n–wyrazowym ciągu arytmetycznym (a_n) suma wyrazów jednakowo odległych od początku i końca jest stała i równa sumie wyrazów pierwszego i ostatniego

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$$

Aby znaleźć wzór na sumę n kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), zapisujemy tę sumę dwukrotnie i otrzymane równości dodajemy stronami.

$$+\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 \end{cases}$$
$$2S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$$

Grupujemy wyrazy uzyskanej sumy.

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Prawa strona uzyskanej równości jest sumą n składników, z których każdy jest równy $a_1 + a_n$ (wynika to z twierdzenia o sumie wyrazów ciągu arytmetycznego jednakowo odległych).

Zatem

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \mid : 2$$

Otrzymujemy szukany wzór.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Twierdzenie: Suma wyrazów ciągu arytmetycznego

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa średniej arytmetycznej wyrazu pierwszego i ostatniego pomnożonej przez liczbę wyrazów.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Wzór na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego można też zapisać, korzystając ze wzoru na wyraz ogólny ciągu arytmetycznego.

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1) \cdot r}{2} \cdot n$$

Przykład 1

Obliczymy sumę dziesięciu kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), w którym $a_1 = -9$ i $r = 2$.

Stosujemy wzór na sumę kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego.

$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1) \cdot r}{2} \cdot n$

$S_{10} = \frac{-9 - 9 + (10-1) \cdot 2}{2} \cdot 10$

$S_{10} = \frac{-18 + 18}{2} \cdot 10$

$S_{10} = 0.$

Nie zawsze ciąg arytmetyczny jest bezpośrednio opisany za pomocą pierwszego wyrazu i różnicy. W niektórych przypadkach, trzeba te wielkości najpierw określić, aby następnie obliczyć sumę jego początkowych wyrazów.

Przykład 2

Obliczymy sumę stu kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (b_n) określonego wzorem $b_n = 2n - 3$.

Wyznaczamy pierwszy wyraz ciągu.

$b_1 = 2 \cdot 1 - 3 = -1$

Wyznaczamy setny wyraz ciągu.

$b_{100} = 2 \cdot 100 - 3 = 197$

Obliczamy sumę.

$S_n = \frac{-1+197}{2} \cdot 100 = 9800.$

Przykład 3

Obliczymy sumę 12 początkowych, kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego $1, 9, 17, 25, \ldots$

Tym razem ciąg określony jest za pomocą jego wyrazów.

Ustalamy pierwszy wyraz i różnicę ciągu.

$a_1 = 1$

$r = 8$

Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

$S_{12} = \frac{1+1+(12-1)\cdot 8}{2} \cdot 12$

$S_{12} = 45 \cdot 12 = 540.$

W następnym przykładach pokażemy, jak znając sumę kolejnych wyrazów ciągu wyznaczyć niektóre z wielkości związanych z danym ciągiem.

Przykład 4

Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 5, a różnica ciągu 2. Ustalimy, ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać 320.

Oznaczmy przez n szukaną liczbę wyrazów.

Liczba 320 to suma n kolejnych wyrazów ciągu, zatem

$\frac{5+5+(n-1)\cdot 2}{2} \cdot n = 320 \,\Big|\, \cdot 2$

$(10 + 2n - 2) \cdot n = 640$

$2n^2 + 8n - 640 = 0 \,\Big|\, : 2$

$n^2 + 4n - 320 = 0$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe.

$\Delta = 16 + 1280 = 1296 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 36$

$n_1 = \frac{-4-36}{2} = -20 < 0$ – nie spełnia warunków zadania (liczba wyrazów musi być liczbą dodatnią)

$n_2 = \frac{-4+36}{2} = 16$

Odpowiedź:

Należy dodać 16 wyrazów tego ciągu.

Przykład 5

Suma sześciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa $22,5$. Znajdziemy wzór ogólny tego ciągu, jeżeli różnica ciągu jest równy $\frac{1}{2}$.

Podstawiamy dane do wzoru na sumę początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

$\frac{a_1+a_1+5\cdot 0,5}{2} \cdot 6 = 22,5$

Wykonujemy wskazane działania i wyznaczamy pierwszy wyraz ciągu.

$(2a_1 + 2,5) \cdot 6 = 45$

$12a_1 = 45 - 15$

$a_1 = 2,5$

Zapisujemy wzór ogólny ciągu.

$a_n = 2,5 + (n - 1) \cdot 0,5.$

Przykład 6

Suma n początkowych wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego (b_n) wyraża się wzorem $S_n = -3n^2 + 7n$. Obliczymy $b_3 - b_1$.

Pierwszy wyraz ciągu jest równy S_1. Zatem:

$b_1 = S_1 = -3 + 7 = 4$

Zauważmy, że

$S_3 = b_1 + b_2 + b_3 = S_2 + b_3$

Wynika z tego, że

$b_3 = S_3 - S_2$

$b_3 = -3 \cdot 9 + 21 - (-3 \cdot 4 + 14) = -6 - 2 = -8$

Wyznaczamy szukaną różnicę.

$b_3 - b_1 = -8 - 4 = -12$

Odpowiedź:

Różnica $b_3 - b_1$ jest równa (-12).

Słownik

suma wyrazów ciągu arytmetycznego

suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa średniej arytmetycznej wyrazu pierwszego i ostatniego pomnożonej przez liczbę wyrazów

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładem wyznaczania sumy ciągu arytmetycznego podanym w infografice. Wypisz kolejne wyrazy ciągu podanego w infografice, dodaj je i sprawdź, czy uzyskany wynik jest taki sam jak podany. Który sposób obliczania sumy wyrazów ciągu arytmetycznego jest łatwiejszy?

Polecenie 2

Puszki ustawiano w piramidkę w ten sposób, że na podłodze stało 40 puszek, a każda następna warstwa zawierała o 2 puszki mniej. Najwyższa warstwa składała się z 4 puszek. Oblicz, ile puszek łącznie ustawiono.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Wykaż, że suma n kolejnych liczb naturalnych nieparzystych jest równa n^2.

Ćwiczenie 8

Oblicz, ile wyrazów ma suma $7 + 12 + 17 + 22 + 27 + \ldots + 117$.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;

5) stosuje wzór na n–ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;

7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyprowadza wzór na sumę n kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego
- oblicza sumę n kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego
- wyznacza wielkości związane z ciągiem arytmetycznym o znanej sumie częściowej

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- mapa skojarzeń
- drzewo pojęć

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kartony, mazaki

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie w grupach sporządzają mapę skojarzeń, na której zaznaczają pojęcia, wzory, itp. związane z ciągiem arytmetycznym.
2. Po prezentacji prac grup i wspólnym przypomnieniu wiadomości na temat ciągu arytmetycznego, nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w parach zapoznają się z materiałem zapisanym w sekcji „Przeczytaj" i z infografiką.
2. Następnie w grupach rozwiązują ćwiczenia interaktywne.
3. Podsumowaniem tej części zajęć jest wspólne omówienie rozwiązanych zadań i sporządzenie częściowego drzewa pojęć związanych z ciągiem arytmetycznym. Te drzewa oraz wykonane wcześniej mapy skojarzeń uczniowie umieszczają na tablicy w klasie i w trakcie następnych lekcji poświęconych ciągowi arytmetycznemu, będą uzupełniali te plansze.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest obliczenie sumy 20 początkowych wyrazów czterech wymyślonych przez siebie ciągów arytmetycznych.

Materiały pomocnicze:

Ciągi – suma wyrazów ciągu arytmetycznego

Wskazówki metodyczne:

Infografikę można wykorzystać na zajęciach poświęconych obliczaniu wartości wyrażeń arytmetycznych.