



Faktoryzacja

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Każda liczba naturalna większa niż jeden, która nie jest liczbą pierwszą, jest tak zwaną liczbą złożoną. Oznacza to, że można ją przedstawić jako iloczyn liczb pierwszych. Znajdowanie tych właśnie liczb to inaczej faktoryzacja, czyli proces rozkładania liczby na czynniki pierwsze.

Implementacje omawianego zagadnienia w poszczególnych językach programowania znajdziesz w e-materiałach:

- [Faktoryzacja w języku C++](#),
- [Faktoryzacja w języku Java](#),
- [Faktoryzacja w języku Python](#).

Więcej zadań? Sięgnij do [Faktoryzacja – zadania maturalne](#).

Twoje cele

- Przećwiczysz rozkład na czynniki pierwsze.
- Przeanalizujesz algorytm rozkładu liczby na czynniki pierwsze.
- Rozwiążesz zadania związane z liczbami złożonymi.

Przeczytaj

Na czym polega rozkład na czynniki pierwsze?

Każda liczba całkowita większa od 1 jest liczbą pierwszą albo liczbą złożoną.

Liczby pierwsze mają tylko dwa dzielniki: 1 oraz samą siebie. Z kolei liczba złożona jest taką liczbą, którą można przedstawić jako iloczyn innych liczb pierwszych. Dla przykładu: zapiszemy kilka liczb naturalnych jako iloczyn liczb pierwszych. I tak:

2 – jest liczbą pierwszą,

3 – jest liczbą pierwszą,

4 – liczbą złożoną, którą możemy przedstawić jako $2 * 2$,

5 – jest liczbą pierwszą,

6 – liczbą złożoną, którą możemy przedstawić jako $2 * 3$,

7 – jest liczbą pierwszą,

8 – liczbą złożoną, którą możemy przedstawić jako $2 * 2 * 2$,

...

Dla małych liczb taki rozkład jest stosunkowo prosty. Natomiast dla większych znalezienie czynników pierwszych, bez znajomości konkretnej metody, nie jest już takie łatwe.

Metoda rozkładu liczby na czynniki pierwsze

Omówimy metodę, która znacznie ułatwia znajdowanie czynników pierwszych każdej liczby. Rozpoczynamy od zapisania liczby, którą chcemy rozłożyć na czynniki pierwsze w sąsiedztwie długiej, pionowej linii.

Następnie bierzemy najmniejszą liczbę pierwszą, czyli 2, i sprawdzamy, czy 136 jest podzielne przez 2.

$$136 \div 2 = 68$$

Liczba 136 jest podzielna przez 2, więc po prawej stronie linii zapisujemy 2, a po lewej, poniżej naszej liczby, zapisujemy wynik dzielenia.

$$\begin{array}{r|l} 136 & 2 \\ 68 & \end{array}$$

Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Powstałą liczbę dzielimy przez 2 tak długo jak długo 2 jest jej dzielnikiem Czy 68 jest podzielne przez 2?

$$68 \div 2 = 34$$

Tak. Zapisujemy więc liczbę 2 po prawej stronie, a wynik z dzielenia po lewej stronie.

$$\begin{array}{r|l} 136 & 2 \\ 68 & 2 \\ 34 & \end{array}$$

Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Ponownie sprawdzamy, czy liczba po lewej stronie jest podzielna przez 2.

$$34 \div 2 = 17$$

Tak. Powtarzamy więc czynność.

136		2
68		2
34		2
17		

Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Czy liczba 17 jest podzielna przez 2?

$$17 \div 2 = 8.5$$

Nie jest. Przystajemy więc dzielić przez 2 i przechodzimy do kolejnej liczby pierwszej, jaką jest 3. Czy 17 dzieli się przez 3? Sprawdźmy.

$$17 \div 3 = 5.666666666\dots$$

Niestety nie. Kontynuujemy więc przechodzenie do kolejnych liczb pierwszych, aż znajdziemy taką, która będzie dzielnikiem naszej liczby. Ponieważ liczba 17 jest liczbą pierwszą, jedynym takim dzielnikiem będzie liczba 17.

$$17 \div 17 = 1$$

Zapisujemy więc liczbę 17 po prawej stronie linii oraz liczbę 1 po lewej stronie.

136		2
68		2
34		2
17		17
1		

Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Nasza liczba po lewej stronie osiągnęła wartość 1. W tym momencie nasz algorytm kończy swoje działanie. Liczby, które znajdują się po prawej stronie kreski, są czynnikami pierwszymi liczby 136. Chcąc upewnić się, że nie popełniliśmy błędu, możemy obliczyć ich iloczyn i sprawdzić, czy wynik będzie równy 136.

$$2 \times 2 \times 2 \times 17 = 136$$

Wszystko się zgadza, algorytm dał poprawny wynik. Chcąc napisać program komputerowy, który będzie rozkładał liczby na czynniki pierwsze, zapiszemy algorytm w postaci pseudokodu.

Algorytm rozkładu liczby na czynniki pierwsze

Spróbujmy napisać w pseudokodzie algorytm rozkładający liczbę na czynniki pierwsze, wzorując się na algorytmie opisanym powyżej. Pierwszym krokiem będzie inicjacja zmiennej, która będzie przechowywać liczbę do sprawdzenia.

```
1 liczbaDoSprawdzenia = liczba naturalna podana przez użytkownika
```

Będziemy również potrzebowali zmiennej, która będzie przechowywać liczbę pierwszą, znajdującą się w danym momencie po prawej stronie linii. Nazwiemy ją `pierwsza` i zainicjalizujemy liczbą 2, gdyż jest to najmniejsza liczba pierwsza.

```
1 liczbaDoSprawdzenia = liczba naturalna podana przez użytkownika  
2 pierwsza = 2
```

Następnie będziemy dzielić liczbę po lewej stronie linii, aż do momentu, w którym jej wartość wyniesie 1. Do tego celu użyjemy pętli `while` (w pseudokodzie `dopóki`).

```
1 liczbaDoSprawdzenia = liczba naturalna podana przez użytkownika  
2 pierwsza = 2  
3  
4 dopóki liczbaDoSprawdzenia > 1 wykonuj:
```

Moglibyśmy użyć warunku `liczbaDoSprawdzenia != 1`, ale starajmy się zawsze używać nierówności, jeżeli jest tylko taka możliwość. Jeżeli z jakiegoś powodu `liczbaDoSprawdzenia` ominęłaby wartość 1, pętla nigdy nie zakończyłaby działania (w kolejnych e-materiałach poznasz takie przypadki). W przypadku nierówności, nawet jeżeli nasza zmienna ominie wartość 1, pętla zakończy działanie.

Kolejnym krokiem jest dzielenie liczby po lewej stronie linii przez liczbę pierwszą, zapisaną w zmiennej `pierwsza`, dopóki jest ona jej dzielnikiem. Aby to osiągnąć, użyjemy kolejnej pętli `dopóki`.

```
1 liczbaDoSprawdzenia = liczba naturalna podana przez użytkownika
2 pierwsza = 2
3
4 dopóki liczbaDoSprawdzenia > 1 wykonuj:
5     dopóki liczbaDoSprawdzenia mod pierwsza == 0 wykonuj:
```

Jeżeli liczba `pierwsza` jest dzielnikiem liczby do sprawdzenia, musimy wypisać do konsoli liczbę `pierwsza`, ponieważ jest ona czynnikiem pierwszym naszej liczby, a następnie podzielić `liczbaDoSprawdzenia` przez `pierwsza`.

```
1 liczbaDoSprawdzenia = liczba naturalna podana przez użytkownika
2 pierwsza = 2
3
4 dopóki liczbaDoSprawdzenia > 1 wykonuj:
5     dopóki liczbaDoSprawdzenia mod pierwsza == 0 wykonuj:
6         wypisz pierwsza
7         liczbaDoSprawdzenia = liczbaDoSprawdzenia / pierwsza
```

Ostatnim krokiem jest przejście do kolejnej liczby, jeżeli liczba `pierwsza` nie jest dzielnikiem `liczbaDoSprawdzenia`.

```
1 liczbaDoSprawdzenia = liczba naturalna podana przez użytkownika
2 pierwsza = 2
3
4 dopóki liczbaDoSprawdzenia > 1 wykonuj:
5     dopóki liczbaDoSprawdzenia mod pierwsza == 0 wykonuj:
6         wypisz pierwsza
7         liczbaDoSprawdzenia = liczbaDoSprawdzenia / pierwsza
8
9     pierwsza = kolejna liczba pierwsza
```

Słownik

operator !=

operator, który zwraca wartość `true`, jeżeli dwa elementy nie są sobie równe oraz wartość `false`, jeżeli są sobie równe

pętla while

pętla, która wykonuje instrukcje w niej zawarte tak długo, jak zadane jej wyrażenie logiczne jest prawdziwe

Aplet

Polecenie 1

Uruchom aplet prezentujący kolejne etapy rozkładania liczby na czynniki pierwsze. Przetestuj jego działanie dla własnych przykładów liczbowych.

Liczba:
7260624

7260624 |

7260624 = ...

Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D10SrVmaU>

Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Polecenie 2

Przygotuj notatkę ze swoimi spostrzeżeniami dotyczącymi apletu.

Polecenie 3

Zapisz przykłady problemów z lekcji matematyki lub fizyki, do rozwiązania których możesz wykorzystać faktoryzację.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Przedstawiony pseudokod ma za zadanie rozkładać podaną liczbę na czynniki pierwsze, jednak jego autor popełnił parę błędów. Zapoznaj się z pseudokodem i popraw odnalezione błędy.

```
1 liczbaDoSprawdzenia = x
2 pierwsza = 1
3
4 dopóki liczbaDoSprawdzenia >= 1 wykonuj
5     dopóki liczbaDoSprawdzenia mod pierwsza != 0 wykonuj
6         wypisz pierwsza
7         liczbaDoSprawdzenia = liczbaDoSprawdzenia / pierwsza
8
9     pierwsza = kolejna liczba pierwsza
```

Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Maurycy Gast

Przedmiot: Informatyka

Temat: Faktoryzacja

Grupa docelowa:

Liceum ogólnokształcące i technikum, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Cele kształcenia – wymagania ogólne

I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów na bazie logicznego i abstrakcyjnego myślenia, myślenia algorytmicznego i sposobów reprezentowania informacji.

II. Programowanie i rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem komputera oraz innych urządzeń cyfrowych: układanie i programowanie algorytmów, organizowanie, wyszukiwanie i udostępnianie informacji, posługiwanie się aplikacjami komputerowymi.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

3) objaśnia dobrany algorytm, uzasadnia poprawność rozwiązania na wybranych przykładach danych i ocenia jego efektywność;

I + II. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) wykorzystuje znane sobie algorytmy przy rozwiązywaniu i programowaniu rozwiązań następujących problemów:

a) rozkładania liczby na czynniki pierwsze,

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;

- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne (językiem ucznia):

- Przećwiczysz rozkład na czynniki pierwsze.
- Przeanalizujesz algorytm rozkładu liczby na czynniki pierwsze.
- Rozwiążesz zadania związane z liczbami złożonymi.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem multimediu i ćwiczeń interaktywnych;
- ćwiczenia praktyczne.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z fragmentem sekcji „Przeczytaj” dotyczącym sposobu rozkładu liczby na czynniki pierwsze.

Faza wstępna:

1. Prowadzący wyświetla na tablicy interaktywnej zawartość sekcji „Wprowadzenie” i omawia cele do osiągnięcia w trakcie lekcji.
2. Prowadzący prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią swoje pomysły,

a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. **Praca z tekstem.** Uczniowie analizują treści z sekcji „Przeczytaj” wyświetlone na tablicy. Nauczyciel odpowiada na ew. pytania.
2. **Praca z multimediami.** Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Aplet”, wybrany uczeń czyta treść polecenia nr 1 „Uruchom aplet prezentujący kolejne etapy rozkładania liczby na czynniki pierwsze. Przetestuj jego działanie dla własnych przykładów liczbowych” i omawia przykładowe rozwiązanie postawionego problemu. Chętny lub wybrany uczeń przedstawia wyniki obliczeń wynikających z przetestowania działania apletu dla własnych przykładów liczbowych i wyjaśnia, w jaki sposób rozwiązał zadanie. Pozostali uczniowie weryfikują poprawność rozwiązań lub przedstawiają alternatywne sposoby.
3. **Ćwiczenie umiejętności.** Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-7 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel wyświetla na tablicy temat lekcji i cele zawarte w sekcji „Wprowadzenie”. W kontekście ich realizacji podsumowuje przebieg zajęć, a także wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenie 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Wskazówki metodyczne:

- Multimedia w sekcjach: „Przeczytaj”, „Aplet”, „Sprawdź się” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału.