

Odkryj, zrozum, zastosuj...

Co księżyc ma wspólnego z kwadratem? Jak złapać stożek w siatkę? Jak narysować wielokąt gwiaździsty? Odpowiedzi na te i na inne pytania znajdziesz w e-podręczniku.

- Potęga o wykładniku całkowitym
 - [Potęga o wykładniku całkowitym](#)
 - [Działania na potęgach o wykładniku całkowitym](#)
 - [Działania na potęgach o wykładniku całkowitym. Część I](#)
 - [Działania na potęgach. Część II](#)
 - [Notacja wykładnicza liczb](#)
- Długość okręgu. Pole koła
 - [Długość okręgu](#)
 - [Pole koła](#)
 - [Wycinek koła. Odcinek koła](#)
- Podobieństwo figur
 - [Figury podobne](#)
 - [Wielokąty podobne](#)
 - [Trójkąty prostokątne podobne](#)
 - [Cechy podobieństwa trójkątów](#)
 - [Pola figur podobnych](#)
- Bryły obrotowe
 - [Bryły obrotowe](#)
 - [Walec. Pole powierzchni walca](#)
 - [Objętość walca](#)
 - [Stożek. Pole powierzchni stożka](#)
 - [Objętość stożka](#)
 - [Kula i sfera](#)
- Statystyka
 - [Odczytywanie danych statystycznych](#)
 - [Przedstawianie danych statystycznych](#)
 - [Średnia arytmetyczna i mediana zestawu danych](#)
 - [Prawdopodobieństwo zdarzenia losowego](#)
- [Zabawy i gry komputerowe](#)
- [Testy typu egzaminacyjnego](#)

- Test 1
- Test 2
- Test 3
- Test 4
- Test 5
- Test 6
- Słowniczek

Potęga o wykładniku całkowitym



Przypomnijmy

- Potęgą a^n o wykładniku naturalnym ($n > 1$) nazywamy iloczyn n czynników, z których każdy jest równy a .

$$a^n = \underbrace{a \bullet a \bullet a \bullet \dots \bullet a}_{n \text{ czynników}}$$

- Przyjmujemy, że $a^0 = 1$ dla $a \neq 0$ oraz $a^1 = a$.
- Dla każdej liczby naturalnej n i dla dowolnej liczby $a \neq 0$ przyjmujemy $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Twierdzenie: Działania na potęgach

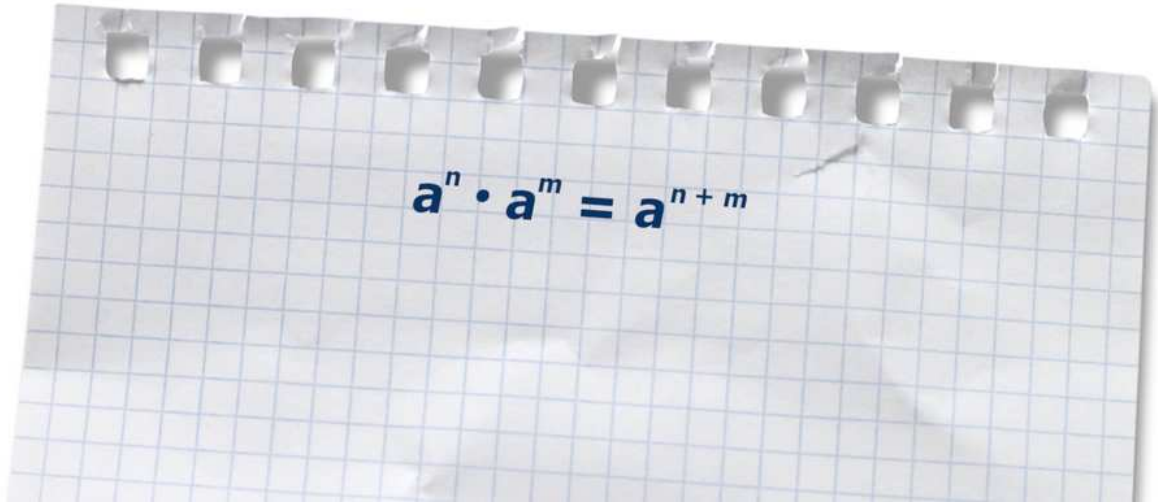
- Iloczyn potęg o tych samych podstawach

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ i dowolnych liczb całkowitych n i m prawdziwa jest równość

$$a^n \bullet a^m = a^{n+m}.$$



Aby pomnożyć dwie potęgi o takich samych podstawach różnych od zera i wykładnikach naturalnych, dodajemy ich wykładniki, a podstawę pozostawiamy bez zmiany.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

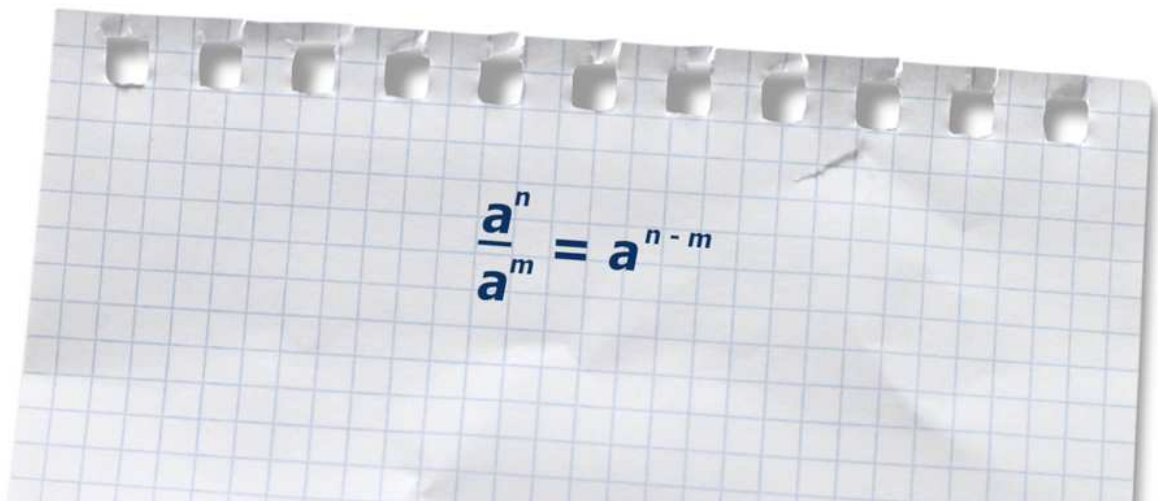
- Iloraz potęg o tych samych podstawach

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ i dowolnych liczb całkowitych n i m prawdziwa jest równość

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$



Aby podzielić dwie potęgi o takich samych podstawach różnych od zera i wykładnikach naturalnych, odejmujemy ich wykładniki, a podstawę pozostawiamy bez zmiany.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

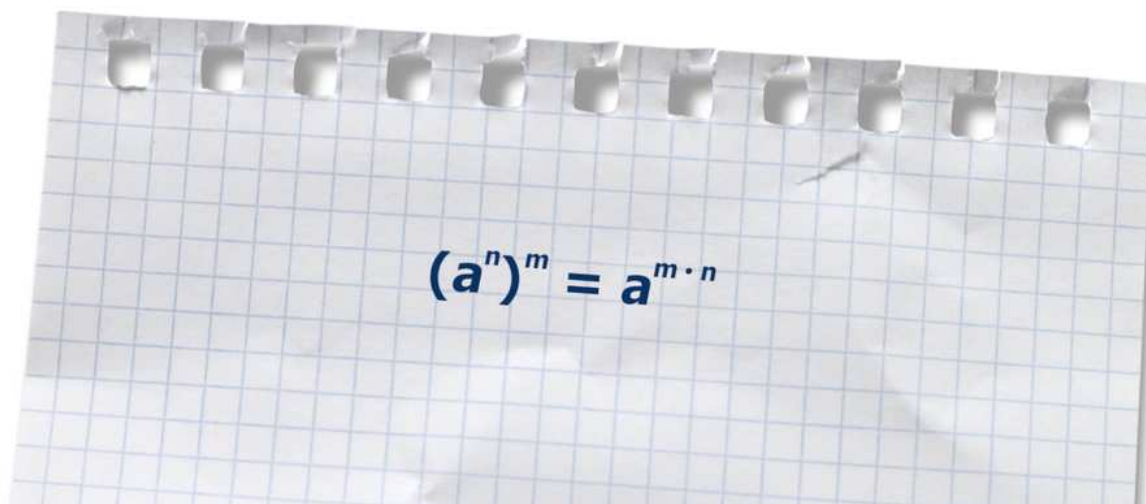
- Potęga potęgi

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ i dowolnych liczb całkowitych n i m prawdziwa jest równość

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$



Potęgując potęgę mnożymy wykładniki, a podstawę pozostawiamy bez zmiany.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

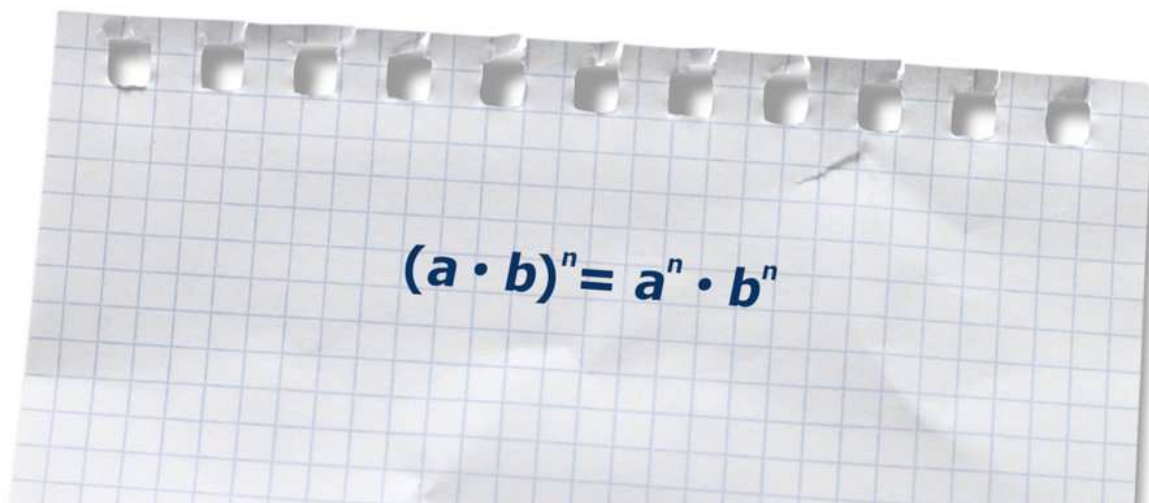
- Iloczyn potęg o tych samych wykładnikach

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a \neq 0$ i $b \neq 0$ i dowolnej liczby całkowitej n prawdziwa jest równość

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n.$$



Dla dowolnych liczb a i b różnych od zera oraz dowolnej liczby naturalnej n , n -ta potęga iloczynu tych liczb jest równa iloczynowi n -tych potęg tych liczb.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

- Iloraz potęg o tych samych wykładnikach

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a \neq 0$ i $b \neq 0$ i dowolnej liczby całkowitej n prawdziwa jest równość

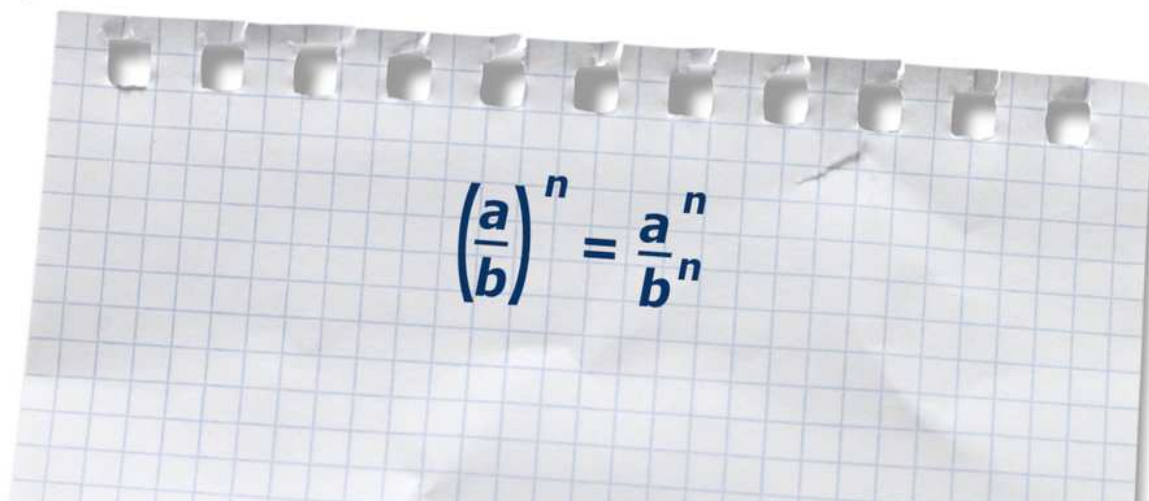
$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$



Dla dowolnych liczb a i b różnych od zera oraz liczby naturalnej n :



Potęga ilorazu dowolnych liczb różnych od zera jest równa ilorazowi potęg tych liczb.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

Działania na potęgach o wykładniku całkowitym

Ćwiczenie 1

Oblicz w pamięci.

a. 3^{-2} , 4^{-3} , 1^{-4} , 10^{-3} , 123^{-1}

b. $(-4)^{-3}$, -2^{-3} , $(-1)^{-12}$, $(-2)^{-2}$, $-(-3)^{-2}$

c. $(\frac{1}{2})^{-3}$, $\frac{2}{3^{-2}}$, $(-\frac{1}{3})^{-1}$, $-(-\frac{1}{2})^{-3}$, $\frac{-1}{-4^{-2}}$

d. $0,2^{-2}$, $(-0,2)^{-2}$, $-(-0,2)^{-2}$, $-(-0,5)^{-1}$, $0,1^{-3}$

Ćwiczenie 2

Połącz w pary potęgę z jej wartością.

8

$-0,2^{-2}$

4

-2^{-2}

25

$(-2)^{-2}$

$\frac{1}{4}$

$(-\frac{1}{2})^{-2}$

$-\frac{1}{4}$

$(-0,2)^{-2}$

-25

$-(-\frac{1}{2})^{-3}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4

W miejsce kropek wstaw odpowiednią liczbę.

a. $\frac{3}{5} = \left(\frac{5}{3}\right)^{\dots}$

b. $9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{\dots}$

c. $5 = \left(\frac{1}{5}\right)^{\dots}$

d. $\frac{64}{27} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\dots}$

e. $\frac{1}{8} = 2^{\dots}$

f. $4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\dots}$

Ćwiczenie 5

Połącz w pary.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$4^2$$

$$2^3$$

$$2^{-4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

$$-2^4$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6

Przeciągnij liczby z dolnej sekcji do górnej.

liczby ujemne

liczby dodatnie

$$(-100)^4$$

$$(-2)^{-14}$$

$$(-1)^{-1000}$$

$$(-1)^{-23}$$

$$-3^{-20}$$

$$-5^0$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-9}$$

$$-\left(-\frac{2}{3}\right)^{13}$$

$$-(-11)^0$$

$$(-10)^{-4}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7

Połącz w pary.

$$-\frac{a^2}{8}$$

$$-\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot (-a)^3$$

$$\frac{-4}{a^3}$$

$$(-2)^{-3} \cdot (-a)^2$$

$$\frac{16}{9}a^3$$

$$\frac{(-4)^3 \cdot (-(-a)^{-3})}{16 \cdot (-8)^0}$$

$$\frac{a^3}{9}$$

$$\frac{-(-3)^{-2}}{-a^{-3}}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8

Uporządkuj liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

$$(-1, 3)^{-2}$$



$$(-15)^{-1}$$



$$-3^{-1}$$



$$15^0$$



$$(-3)^2$$



$$2^{-3}$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9

Wstaw w miejsce kropek taką liczbę, aby otrzymać równość.

a. $2 \cdots = \frac{1}{8}$

b. $\left(-\frac{1}{4}\right) \cdots = -1024$

c. $0,1 \cdots = 1000000$

d. $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdots = \frac{81}{16}$

Ćwiczenie 10

Potęga $\left(\frac{2}{7}\right)^3$ zapisana w postaci potęgi o wykładniku ujemnym to

☐ $\left(\frac{2}{7}\right)^{-3}$

☐ $3,5^{-3}$

☐ $\left(\frac{7}{2}\right)^3$

☐ $\left(\frac{7}{2}\right)^{-1}$

Ćwiczenie 11

Liczba $(-4)^{-2}$ jest równa:

☐ 4^{-2}

☐ -16

☐ -4^{-2}

☐ $-\frac{1}{16}$

Ćwiczenie 12

Wynikiem działania $-2^{-3} + \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$ jest liczba:

☐ $-2\frac{3}{8}$

☐ $2\frac{1}{8}$

☐ $2\frac{3}{8}$

☐ $-2\frac{1}{8}$

Ćwiczenie 13

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Potęga $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-1}$ nie jest równa 2.

☐ Iloczyn liczb 2^2 i 2^{-2} jest równy 1.

☐ Liczba przeciwną do 2^{-3} jest liczba $(-2)^{-3}$.

☐ Suma liczb 2^3 i 2^{-3} jest równa 1.

☐ Liczbą odwrotną do 125 jest liczba $(-5)^{-3}$.

☐ Liczba przeciwną do 3^{-2} jest liczba $(-3)^{-2}$.

☐ Liczbą odwrotną do 25 jest liczba $(-5)^{-2}$.

☐ Potęga $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-1}$ nie jest równa $\frac{3}{5}$.

Ćwiczenie 14

Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla podanych zmiennych.

a. $x^{-3} + 2x$, dla $x = -1$

b. $z^{-2} - 2z^{-1} + 2$, dla $z = \frac{1}{2}$

c. $\frac{-y^{-3}+1}{2y^{-2}}$, dla $y = -\frac{1}{2}$

d. $\frac{2p^2+pq-q^2}{p^{-1}+q^{-1}}$, dla $p = 1$ i $q = -2$

Ćwiczenie 15

Oblicz.

a. $2^{-4} - (-2)^{-4}$

b. $\frac{1}{5} \bullet 5^2 - (-5)^{-1}$

c. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \bullet (-2)^{-2}$

d. $4 \bullet (2)^{-2} + 4 \bullet \left(\frac{1}{4}\right)^0$

e. $10^{-3} \bullet 0,1^{-4}$

f. $2 - 3^{-2} \bullet \frac{1}{3^{-3}}$

Ćwiczenie 16

Oblicz wartość wyrażenia.

a. $-\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \bullet 2^{-1} + (-3)^0 - 5^{-2} \bullet \left(-\frac{1}{25}\right)^{-1}$

b. $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2} : \frac{1}{16} - \left(1\frac{1}{2}\right)^{-2} \bullet \left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}$

c. $-\left(-(-4)^{-3}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right)^{-2} : 4$

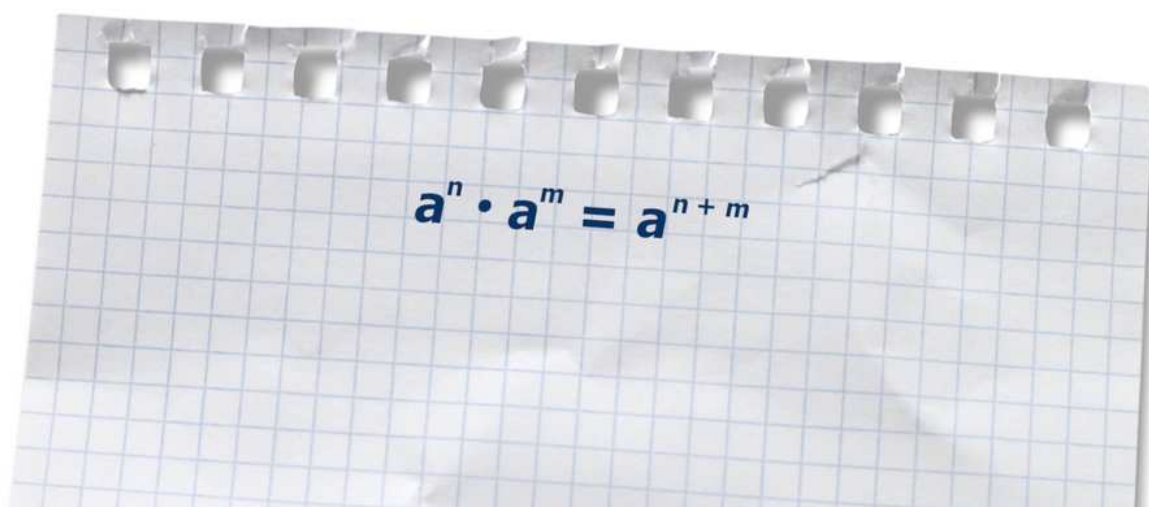
Działania na potęgach o wykładniku całkowitym.

Część I

Ważne!



Aby pomnożyć dwie potęgi o takich samych podstawach różnych od zera i wykładnikach naturalnych, dodajemy ich wykładniki, a podstawę pozostawiamy bez zmiany.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

Ćwiczenie 1

Oblicz w pamięci.

a. $2^{-2} \cdot 2^{-1}$

b. $3^{-3} \cdot 3^0$

c. $(-3)^{-2} \cdot (-3)$

d. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3$

e. $(-0,2)^{-2} \cdot (-0,2)^3$

Ćwiczenie 2

Połącz w pary.

$x^0 \cdot x \cdot x^{-6}$

$\frac{1}{x^5}$

$x^{-4} \cdot x^0 \cdot x^2$

$\frac{1}{x^4}$

$x^{-5} \cdot x^7 \cdot x^{-3}$

$\frac{1}{x^2}$

$x^{-3} \cdot x^{-2} \cdot x^2$

$\frac{1}{x^3}$

$x^{-3} \cdot x^4 \cdot x^{-5}$

$\frac{1}{x}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3

Przeciągnij i upuść.

a) $1^6 \cdot 1^{-8} =$

b) $2^{-1} \cdot 2^{-2} =$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} =$

d) $4^2 \cdot 4^{-1} =$

e) $(0,2)^{-2} \cdot (0,2)^0 =$

f) $10^{-3} \cdot 10^2 =$

10

2

4

1

$\frac{1}{8}$

25

$\frac{1}{10}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4

Połącz w pary.

$$2^2 \cdot 2^{-4}$$

$$2^4$$

$$2^2 \cdot 2^{-2}$$

$$2^{-3}$$

$$2^{-2} \cdot 2$$

$$2^0$$

$$2^6 \cdot 2^{-2}$$

$$2^{-1}$$

$$2^0 \cdot 2^{-5}$$

$$2^{-6}$$

$$2^{-3} \cdot 2^{-3}$$

$$2^{-2}$$

$$2^{-1} \cdot 2^{-2}$$

$$2^{-5}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5

Połącz w pary.

$$x^{-4} \cdot x^{-2}$$

$$x^{-3} \cdot x^{-3}$$

$$x^1 \cdot x^{-3}$$

$$x^4 \cdot x^{-3}$$

$$x^{-2} \cdot x^3$$

$$x^0 \cdot x^3$$

$$x^{-6} \cdot x^{-2}$$

$$x^{-8} \cdot x^6$$

$$x^{-5} \cdot x^0$$

$$x^{-9} \cdot x$$

$$x^5 \cdot x^{-2}$$

$$x^1 \cdot x^{-6}$$

$$x^{-5} \cdot x$$

$$x^{-1} \cdot x^{-3}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6

Uzupełnij wykładnik potęgi.

a. $2^3 \bullet 2^{-5} = 2^{\dots}$

b. $2,3^{-2} \bullet 2,3^{-3} \bullet 2,3^4 = 2,3^{\dots}$

c. $(-3)^{-4} \bullet (-3)^6 \bullet (-3)^{-8} = (-3)^{\dots}$

d. $\left(-\frac{1}{3}\right)^7 \bullet \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} \bullet \left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^{\dots}$

e. $3^{14} \bullet 3 \bullet 3^{-2} = 3^{\dots}$

f. $10^{-4} \bullet 10 = 10^{\dots}$

g. $2^{-a} \bullet 2^{-a} = 2^{\dots}$

h. $(-1)^a \bullet (-1)^{-b} \bullet (-1)^c = (-1)^{\dots}$

Ćwiczenie 7

Uzupełnij wykładnik potęgi.

a. $x^{-3} \cdot x^{-3} = x^{\dots}$

b. $(-y)^{-2} \cdot (-y)^2 \cdot (-y) = (-y)^{\dots}$

c. $(2z)^{-6} \cdot (2z)^4 = (2z)^{\dots}$

d. $(3k)^0 \cdot 3k \cdot (3k)^{-2} = (3k)^{\dots}$

e. $z^{-a} \cdot z^{-a} \cdot z^a = z^{\dots}$

f. $p^{-a} \cdot p^b \cdot p^{-c} \cdot p = p^{\dots}$

g. $x^a \cdot x^{-2a} = x^{\dots}$

h. $a^2 \cdot a^{-x} \cdot a = a^{\dots}$

Ważne!



Aby podzielić dwie potęgi o takich samych podstawach różnych od zera i wykładnikach naturalnych, odejmujemy ich wykładniki, a podstawę pozostawiamy bez zmiany.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Ćwiczenie 8

Oblicz w pamięci.

a. $2^{-3} : 2^{-2}$

b. $(-3)^{-2} : (-3)^2$

c. $5^{-2} : 5^0$

d. $0,2^{-7} : 0,2^{-5}$

e. $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-1} : \left(-\frac{1}{4}\right)$

Ćwiczenie 9

Połącz w pary.

$$x^{15} : x : x^{-2}$$

$$x^6$$

$$x^4 : x^{-2}$$

$$\frac{1}{x^{11}}$$

$$x^{-3} : x^0$$

$$x^{16}$$

$$x^{-12} : x^4 : x^{-5}$$

$$\frac{1}{x^{15}}$$

$$x^{-8} : x^7$$

$$\frac{1}{x^3}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11

Połącz w pary.

$$2^{-4} : 2^{-5}$$

$$2^{-6} : 2$$

$$2^5 : 2^{-1}$$

$$2^{-8} : 2^{-2}$$

$$2^6 : 2^{-2}$$

$$2^{-8} : 2^0$$

$$2^{-4} : 2$$

$$2$$

$$2^8$$

$$2^{-6}$$

$$2^6$$

$$2^{-5}$$

$$2^{-7}$$

$$2^{-8}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12

Połącz w pary.

$$x^3 : x^{-3}$$

$$x^{10} : x$$

$$x^{-2} : x^7$$

$$x^5 : x^{-2}$$

$$x^{-6} : x^{-2}$$

$$x^{-5} : x^0$$

$$x^5 : x^2$$

$$x^{-3} : x$$

$$x^{-4} : x^{-7}$$

$$x^5 : x^{-1}$$

$$x^3 : x^{-6}$$

$$x^{-8} : x^1$$

$$x^1 : x^6$$

$$x^4 : x^{-3}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13

Połącz w pary.

$$a^{-3} \cdot a^5$$

$$a^{-7} \cdot a^4 : a^{20}$$

$$a^8 : a^5 \cdot a^{-2}$$

$$a^{-5} : a^{-2}$$

$$a^{-12} : a^{11}$$

$$a^9 \cdot a^{-7}$$

$$a^3 : a^{-3}$$

$$a^6$$

$$a^{-2} \cdot a^{-1}$$

$$a^{-1} \cdot a \cdot a$$

$$a^{-8} \cdot a \cdot a^{-2}$$

$$a^0 \cdot a^{10} : a^{19}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14

Zapisz w postaci jednej potęgi.

a. $4^{-5} + 4^{-5} + 4^{-5} + 4^{-5}$

b. $6^{-4} + 6^{-4} + 6^{-4} + 6^{-4} + 6^{-4} + 6^{-4}$

c. $3^{-2} + 3^{-2} + 3^{-2} + 3^{-2} + 3^{-2} + 3^{-2} + 3^{-2} + 3^{-2} + 3^{-2}$

d. $2^{-3} + 2^{-3} + 2^{-3} + 2^{-3}$

Ćwiczenie 15

Połącz w pary.

połowa liczby 2^{-6}

2^2

szesnastokrotność liczby 2^{-2}

2^{-4}

jedna ósma liczby 2^{-7}

2^{-2}

czterokrotność liczby 2^{-4}

2^{-10}

dwukrotność liczby 2^{-6}

2^{-7}

czwartą część liczby 2^{-2}

2^{-5}

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16

Połowa liczby 2^{-20} to:

☐ 2^{-21}

☐ 2^{-10}

☐ 1^{-20}

☐ 2^{-19}

Ćwiczenie 17

Iloczyn potęg x^{-8} i x^6 jest równy:

☐ x^{-2}

☐ x^2

☐ x^{-14}

☐ x^{-86}

Ćwiczenie 18

Jeżeli $100 \bullet 10^{-3} : 10^{-2} \bullet 1000 = 10^n$, to:

☐ $n = 4$

☐ $n = 5$

☐ $n = 6$

☐ $n = 9$

Ćwiczenie 19

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Czterokrotność liczby 2^{-3} to 2.

☐ Suma $2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-2}$ zapisana w postaci jednej potęgi wynosi 2^0 .

☐ Wyrażenie $a^{12} \cdot a^{-4} : (a^5 \cdot a^{-3})$ po uproszczeniu wynosi a^6 .

☐ Iloczyn $2^3 \cdot 2 \cdot 2^{-5} \cdot 2^0$ zapisany w postaci potęgi to 2^{-1} .

☐ Iloczyn $2^{-3} \cdot 2^{20} \cdot 2^{-2}$ zapisany w postaci potęgi to 2^{-5} .

☐ $81 : 3^{-3} \cdot 3 = 3^8$

☐ Suma $2^{-2} + 2^{-2}$ zapisana w postaci jednej potęgi wynosi 2^{-4} .

☐ $81 : 3^{-3} \cdot 3 = 3^2$

☐ Czterokrotność liczby 2^{-3} to $\frac{1}{2}$.

☐ Wyrażenie $a^3 \cdot a^{-4} : a^6$ po uproszczeniu wynosi a^5 .

Ćwiczenie 20

Oblicz w pamięci.

a. $(1^4)^{-5}$

b. $\left(\left(-1\right)^{-3}\right)^6$

c. $\left(\left(-1\right)^{-3}\right)^{-3}$

d. $\left(\left(-3\right)^{-2}\right)^2$

e. $(2^2)^{-3}$

f. $\left(\left(\left(-3^{-5}\right)^0\right)^2\right)$

Ćwiczenie 21

Połącz w pary.

$$(2^3)^{-7}$$

$$2^{-28}$$

$$(2^{-5})^4$$

$$2^{-26}$$

$$(2^{-2})^{13}$$

$$2^{-21}$$

$$(2^{-8})^{-3}$$

$$2^{-20}$$

$$(2^{-4})^7$$

$$2^{24}$$

$$(2^{-11})^{-2}$$

$$2^{22}$$

Ćwiczenie 22

Połącz w pary.

$$(x^7)^{-4}$$

$$x^{-28}$$

$$(x^4)^{-6}$$

$$x^{22}$$

$$(x^{-2})^{-11}$$

$$x^{-30}$$

$$(x^3)^{-7}$$

$$x^{-25}$$

$$(x^{-5})^5$$

$$x^{-24}$$

$$(x^2)^{-15}$$

$$x^{-21}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 23

Zapisz w postaci jednej potęgi.

a. $(4^{-3})^4$

b. $(2^2)^{-5}$

c. $((\frac{2}{3})^{-6})^{-6}$

d. $((-7)^4)^{-8}$

e. $((5^{-3})^{-5})^0$

Ćwiczenie 24

Zapisz wyrażenie jako potęgę potęgi.

a. 4^{-8}

b. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-6}$

c. $(-3)^{-15}$

d. $(1,8)^{-11}$

e. $(-3)^{-24}$

f. -2^{-9}

Ćwiczenie 25

Połącz w pary.

$$(2^{-5})^6$$

$$8^{-10}$$

$$\left((2^4)^{-5}\right)^6$$

$$64^0$$

$$(4^{-3})^{-4}$$

$$4^{-36}$$

$$(8^3)^{-8}$$

$$2^{24}$$

$$(2^4)^{-7}$$

$$4^{-14}$$

$$\left((4^3)^0\right)^{-8}$$

$$16^{-30}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 26

Wynikiem potęgowania $\left((-2)^3\right)^{-2}$ jest liczba

☐ $\frac{1}{32}$

☐ -32

☐ $\frac{1}{64}$

☐ -64

Ćwiczenie 27

Wyrażenie $(a + b)^{-12}$ nie jest równe

☐ $\left((a + b)^4\right)^{-3}$

☐ $\left((a + b)^{-6}\right)^2$

☐ $\left((a + b)^3\right)^{-4}$

☐ $\left((a + b)^{10}\right)^{-2}$

Ćwiczenie 28

Jeżeli $c^{-9} = 27^3$, to

☐ $c = \frac{1}{3}$

☐ $c = 18$

☐ $c = 9$

☐ $c = 6$

Działania na potęgach. Część II

Twierdzenie: Działania na potęgach

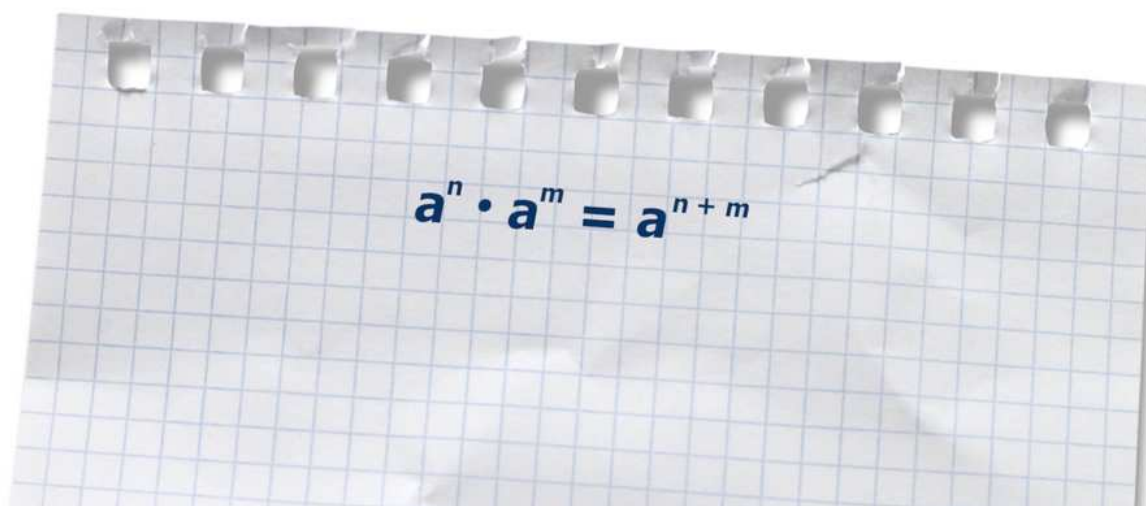
- Iloczyn potęg o tych samych podstawach

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ i dowolnych liczb całkowitych n i m prawdziwa jest równość

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$



Aby pomnożyć dwie potęgi o takich samych podstawach różnych od zera i wykładnikach naturalnych, dodajemy ich wykładniki, a podstawę pozostawiamy bez zmiany.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

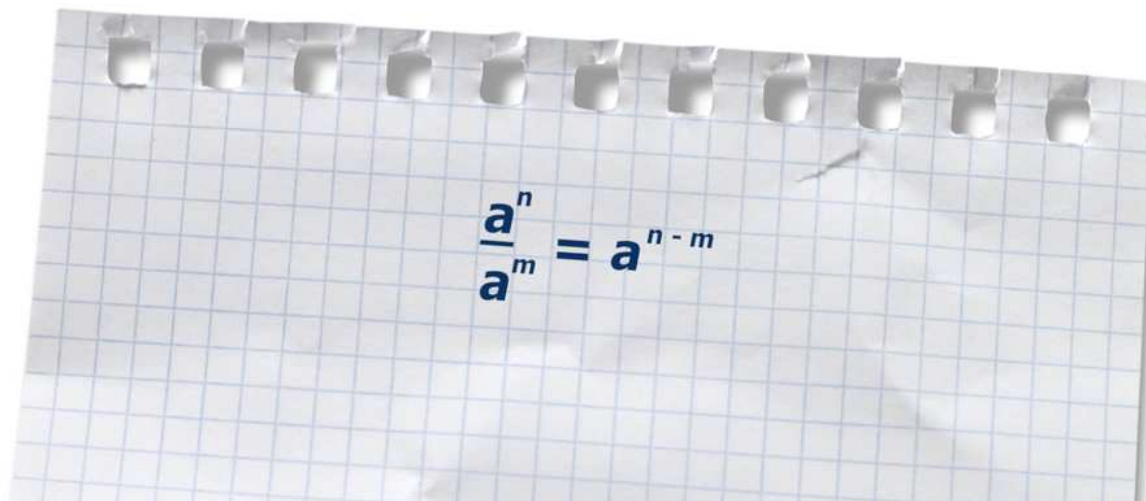
-
- Iloraz potęg o tych samych podstawach

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ i dowolnych liczb całkowitych n i m prawdziwa jest równość

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$



Aby podzielić dwie potęgi o takich samych podstawach różnych od zera i wykładnikach naturalnych, odejmujemy ich wykładniki, a podstawę pozostawiamy bez zmiany.


$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

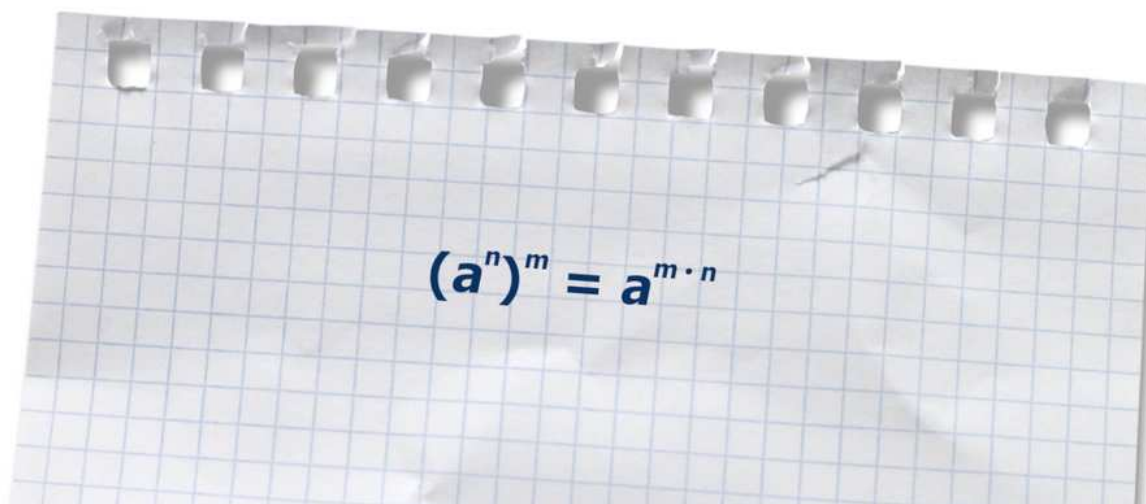
- Potęga potęgi

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ i dowolnych liczb całkowitych n i m prawdziwa jest równość

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$



Potęgując potęgę mnożymy wykładniki, a podstawę pozostawiamy bez zmiany.


$$(a^n)^m = a^{m \cdot n}$$

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

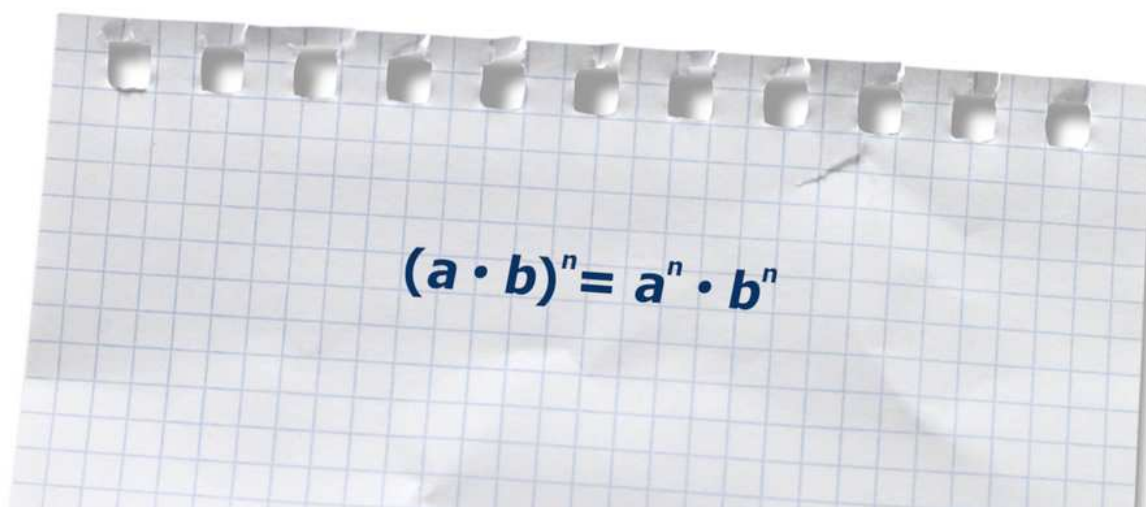
- Iloczyn potęg o tych samych wykładnikach

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a \neq 0$ i $b \neq 0$ i dowolnej liczby całkowitej n prawdziwa jest równość

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n.$$



Dla dowolnych liczb a i b różnych od zera oraz dowolnej liczby naturalnej n , n -ta potęga iloczynu tych liczb jest równa iloczynowi n -tych potęg tych liczb.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

- Iloraz potęg o tych samych wykładnikach

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a \neq 0$ i $b \neq 0$ i dowolnej liczby całkowitej n prawdziwa jest równość

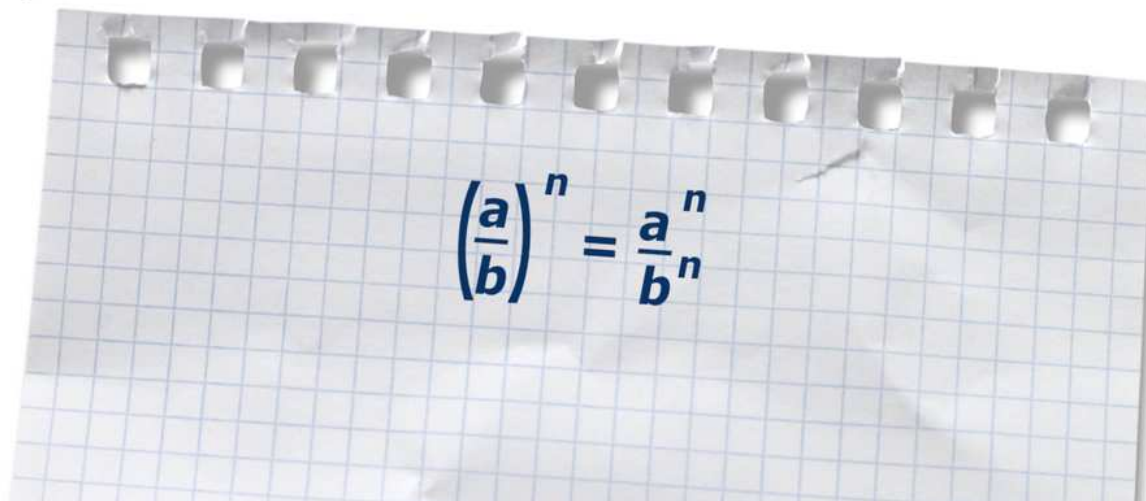
$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$



Dla dowolnych liczby a i b różnych od zera oraz liczby naturalnej n :



Potęga ilorazu dowolnych liczb różnych od zera jest równa ilorazowi potęg tych liczb.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

Ćwiczenie 1

Oblicz w pamięci.

a. $2^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

b. $3^{-3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-3}$

c. $(-4)^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{16}\right)^{-1}$

d. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot (-8)^{-2}$

e. $(-0,01)^{-3} \cdot (10)^{-3}$

Ćwiczenie 2

Oblicz.

a. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \bullet 2^{-4}$

b. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \bullet 9^{-2}$

c. $1,5^{-1} \bullet 2^{-1}$

d. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \bullet 10^{-2}$

e. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-6} \bullet \left(1\frac{1}{3}\right)^{-6}$

f. $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-3} \bullet \left(1\frac{1}{5}\right)^{-3}$

Ćwiczenie 3

Połącz w pary.

$$9^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

$$-\frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \cdot (-2)^{-3}$$

$$-1$$

$$2^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$-\frac{1}{9}$$

$$-9^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

$$\frac{1}{9}$$

$$(-2)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$$-8$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot 4^{-3}$$

$$1$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4

Połącz w pary.

$$-(2x^2)^{-2}$$

$$-\frac{1}{8x^3}$$

$$(2x)^{-3}$$

$$-\frac{1}{4x^4}$$

$$(-2x)^{-3}$$

$$\frac{4}{x^4}$$

$$(-2x)^{-2}$$

$$-\frac{1}{4x^2}$$

$$(-2x^{-2})^2$$

$$\frac{1}{8x^3}$$

$$-(2x)^{-2}$$

$$\frac{1}{4x^2}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5

Uzupełnij podstawę potęgi.

a. $2^{-2} \bullet 3^{-2} = \dots^2$

b. $2^{-3} \bullet (-5)^{-3} = \dots^3$

c. $(\frac{1}{2})^{-4} \bullet 8^{-4} = \dots^4$

d. $(2\frac{1}{2})^{-3} \bullet (-2)^{-3} = \dots^3$

e. $(-\frac{3}{2})^{-5} \bullet (-\frac{2}{3})^{-5} = \dots^5$

f. $(-0,01)^{-2} \bullet 10^{-2} = \dots^2$

g. $(\frac{1}{2})^{-3} \bullet 8^{-3} \bullet (\frac{1}{2})^{-3} = \dots^3$

h. $(0,75)^{-2} \bullet (1\frac{1}{3})^{-2} \bullet 2^{-2} = \dots^2$

Ćwiczenie 6

Oblicz w pamięci.

a. $2^{-3} : (-2)^{-3}$

b. $(-3)^{-2} : (-3)^{-2}$

c. $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} : 5^{-1}$

d. $0,2^{-5} : 0,4^{-5}$

e. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} : \left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}$

Ćwiczenie 7

Oblicz.

a. $2^{-4} : 2^{-4}$

b. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} : \left(\frac{1}{9}\right)^{-3}$

c. $4,5^{-2} : 1,5^{-2}$

d. $\left(\frac{5}{2}\right)^{-2} : 10^{-2}$

e. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} : \left(\frac{5}{6}\right)^{-1}$

f. $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-3} : \left(\frac{5}{6}\right)^{-3}$

Ćwiczenie 8

Połącz w pary.

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} : \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$$

$$-\frac{1}{8}$$

$$-3^{-2} : \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

$$\frac{1}{8}$$

$$(-2)^{-3} : 2^{-3}$$

$$\frac{1}{16}$$

$$2^{-2} : \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$-\frac{1}{81}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} : \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$$

$$-\frac{1}{3}$$

$$9^{-1} : (-3)^{-1}$$

$$-1$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9

Połącz w pary.

$$-\left(\frac{2}{x^2}\right)^{-2}$$

$$-\frac{x^2}{4}$$

$$-\left(\frac{2}{x}\right)^{-2}$$

$$\frac{x^3}{8}$$

$$\left(\frac{2}{x}\right)^{-3}$$

$$\frac{x^2}{4}$$

$$\left(-\frac{2}{x}\right)^{-3}$$

$$\frac{x^4}{4}$$

$$\left(-\frac{2}{x}\right)^{-2}$$

$$-\frac{x^4}{4}$$

$$\left(-\frac{2}{x^2}\right)^{-2}$$

$$-\frac{x^3}{8}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10

Uzupełnij podstawę potęgi.

a. $20^{-3} : 10^{-3} = \dots^3$

b. $25^{-2} : (-5)^{-2} = \dots^2$

c. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} : \left(\frac{1}{4}\right)^{-4} = \dots^4$

d. $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-5} : \left(-\frac{3}{2}\right)^{-5} = \dots^5$

e. $\left(2\frac{1}{2}\right)^{-4} : \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} = \dots^4$

f. $(-0,01)^{-3} : 0,1^{-3} = \dots^3$

g. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \bullet 8^{-3} : (2)^{-3} = \dots^3$

h. $(0,75)^{-4} : \left(\frac{3}{4}\right)^{-4} : 2^{-4} = \dots^4$

Ćwiczenie 11

Uzupełnij brakującą podstawę potęgi.

a. $2^{-3} \bullet 4^{-3} \bullet \dots^{18} = 8^3$

b. $3^{-2} \bullet \dots^2 : 9^{-2} = 3^4$

c. $25^5 : \dots^5 : 5^{-5} = 5^{10}$

d. $8^4 : 2^{-4} : 4^4 : \dots^4 = 2^4$

Ćwiczenie 12

Iloraz $60^{-15} : (-15)^{-15}$ jest równy

☐ $(-4)^0$

☐ 4^{15}

☐ $(-4)^{-15}$

☐ $(-4)^{15}$

Ćwiczenie 13

Wyrażenie $(3x^{-3}y)^{-2}$ jest równe

☐ $\frac{x^6}{9y^2}$

☐ $9x^6y^{-2}$

☐ $3x^6y^{-2}$

☐ $\frac{9y^2}{x^6}$

Ćwiczenie 14

Wyrażenie $\left(\frac{9x^2y}{3xy^2}\right)^{-4}$ zapisane bez użycia nawiasów ma postać

☐ $\frac{y^4}{3^4 x^4}$

☐ $\frac{3^4 x^4}{y^4}$

☐ $\frac{3x^4}{y^4}$

☐ $\frac{3x^4 y^8}{9 x^8 y^4}$

Ćwiczenie 15

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Iloczyn $2^{-3} \cdot 3^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot 2^{-3}$ zapisany w postaci potęgi to 6^{-3}

☐ Iloraz $0,0001^{-5} : 0,001^{-5}$ zapisany w postaci potęgi to 10^{10}

☐ Wyrażenie $(-2x^2y)^{-3}$ po uproszczeniu wynosi $-\frac{1}{8x^6y^3}$

☐ Wyrażenie $(-2x^2y)^{-3}$ po uproszczeniu wynosi $\frac{1}{8x^6y^3}$

☐ Iloczyn $2^{-3} \cdot 3^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot 2^{-3}$ zapisany w postaci potęgi to 6^{-12}

☐ Iloraz $0,0001^{-5} : 0,001^{-5}$ zapisany w postaci potęgi to 10^5

Ćwiczenie 16

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 17

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 18

W miejsce kropek wstaw odpowiedni znak $<$, $>$, $=$.

a. $8^{-3} \dots 4^{-3}$

b. $3^{-6} \dots 12^{-6}$

c. $0,2^{-9} \dots 0,3^{-9}$

d. $1,4^{-5} \dots 1,3^{-5}$

e. $\left(\frac{2}{7}\right)^{-4} \dots \left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$

f. $(0,75)^{-7} \dots \left(\frac{3}{4}\right)^{-7}$

Ćwiczenie 19

W miejsce kropek wstaw odpowiedni znak $<$, $>$, $=$.

a. $(-2,3)^{-5} \dots 2,3^{-5}$

b. $(-3,6)^{-6} \dots 3,6^{-6}$

c. $-(-7,7)^{-7} \dots (-7,7)^{-7}$

d. $-(-(-0,2)^{-9}) \dots -(-0,2)^{-9}$

Ćwiczenie 20

Połącz w pary.

$$a^{-9} : a^{-5} \cdot a^{-2}$$

$$a^0$$

$$a^{-8} \cdot a : a^{-3}$$

$$a^5 : a^8$$

$$a^{-4} \cdot a^1$$

$$a^0 \cdot a^{10} : a^{14}$$

$$a^{-3} : a^{-3}$$

$$a^{-8} \cdot a \cdot a$$

$$a^3 \cdot a^{-5}$$

$$a \cdot a^{-3}$$

$$a^{-16} : a^{-11}$$

$$a^7 \cdot a^{-4} : a^8$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 21

Oblicz.

a. $\frac{2^5 \cdot 2^{-3}}{2^7 : 2^{-3}}$

b. $\frac{5 \cdot 3^7}{3^8 : 3^{-2}}$

c. $\frac{4^{-7} : 4^{-9}}{17 - 4^0}$

d. $\frac{5^3 - 2 \cdot 5^2}{5^{-1}}$

Ćwiczenie 22

Uzupełnij brakujący wykładnik potęgi.

a. $2^3 \bullet 4 : 2^{-2} = 2^{\dots}$

b. $27 : 3^{\dots} \bullet 3^{-5} = 3^6$

c. $4^{-4} : 4^{\dots} \bullet 16 \bullet 64 = 4^{-8}$

d. $625 : 5^2 : 5^{\dots} : 5^{-2} = 1$

Ćwiczenie 23

Połącz w pary.

$$-243 \cdot 3^{-2} \cdot 32 : 2 : (-2)^{-3}$$

$$2^5 \cdot 3^6$$

$$-64 \cdot 3^{-1} \cdot (-2)^{-3} \cdot 27$$

$$2^7 \cdot 3^3$$

$$(-2)^{13} : 64 \cdot 3^{-3} \cdot (-81)$$

$$2^7 \cdot 3$$

$$128 \cdot 9 \cdot 2^{-2} : 3^0 \cdot (-3)^4$$

$$2^3 \cdot 3^2$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 24

Zakładając, że $a \neq 0$, zapisz wyrażenie w postaci jednej potęgi.

a. $(a^9 \bullet a^{-4}) : (a^{-3} \bullet a)$

b. $a^8 : [a^{-9} : (a^{-2} \bullet a^4)]$

c. $\frac{a^{-3} \bullet a^2 : a^{-2}}{a^{-4} : a^6}$

d. $\frac{a^3 \bullet [(a^{-4} \bullet a^5) : (a^{-3} \bullet a^3)]}{a^8 : (a^{-2} \bullet a)}$

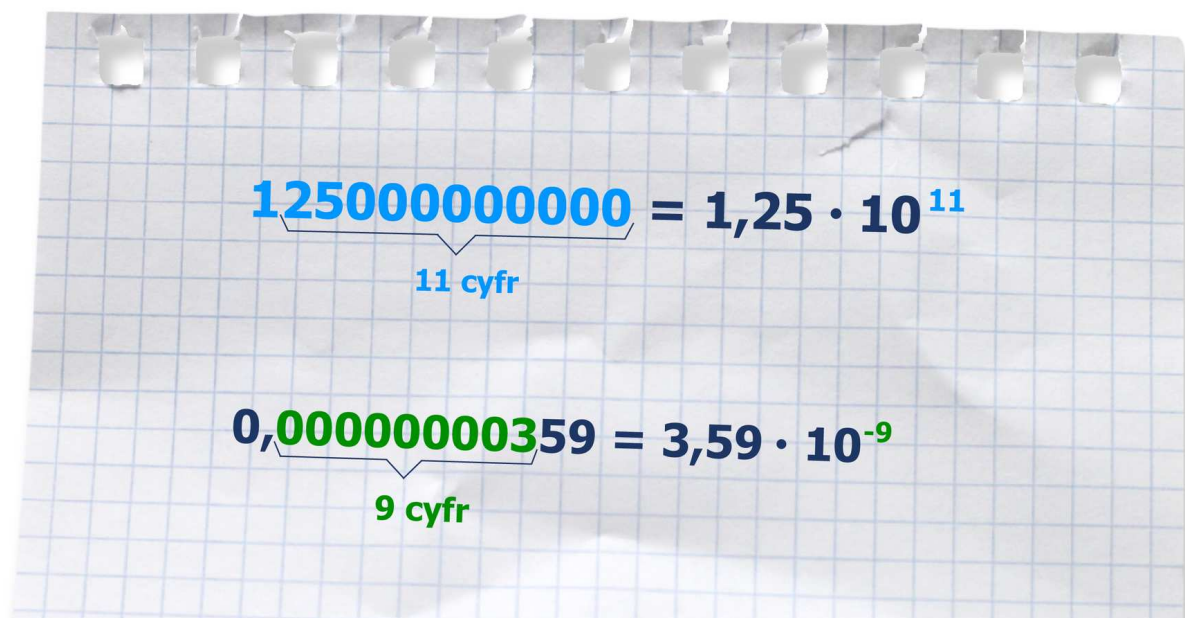
Notacja wykładnicza liczb

Potęę o wykładniku całkowitym używamy do zapisywania liczb bardzo małych lub bardzo dużych. Stosujemy wtedy notację wykładniczą, np.:

- $6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ to liczba Avogadro oznaczająca liczbę cząsteczek materii znajdujących się w jednym molu tej materii,
- $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ to prędkość światła,
- $1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ to masa pojedynczego atomu węgla,
- $3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$ to średnia odległość Księżyca od Ziemi.

Ważne!

Liczba zapisana w notacji wykładniczej ma postać $a \cdot 10^k$, gdzie $1 \leq a < 10$ oraz k jest liczbą całkowitą.



Ćwiczenie 1

Podaj liczbę, używając notacji wykładniczej.

a. $3 \text{ m} = \dots \text{ cm}$

b. $45 \text{ m} = \dots \text{ cm}$

c. $0,32 \text{ m} = \dots \text{ cm}$

d. $5 \text{ kg} = \dots \text{ g}$

e. $76 \text{ kg} = \dots \text{ dag}$

f. $0,02 \text{ kg} = \dots \text{ g}$

Ćwiczenie 2

Połącz w pary.

$0,038 \cdot 10^3$

38 000

$0,38 \cdot 10^3$

38

$38 \cdot 10^2$

380 000

$380 \cdot 10^3$

380

$3,8 \cdot 10^4$

3 800

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4

Oblicz wartość wyrażenia i zapisz ją w notacji wykładniczej.

a. $(9 \bullet 10^3) \bullet (3 \bullet 10^4)$

b. $\frac{0,4 \bullet 1,8 \bullet 10^5}{2 \bullet 10^2}$

c. $\frac{6 \bullet 10^5 \bullet 1,2 \bullet 10^3}{0,002 \bullet 10^4}$

Ćwiczenie 5

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6

$0,027 \bullet 10^5$ to

☐ 270

☐ 2700

☐ 270000

☐ 27000

Ćwiczenie 7

Jeżeli $a = 2,7 \cdot 10^6$, a $b = 0,03 \cdot 10^2$, to $\frac{a}{b}$ wynosi

☐ $90 \cdot 10^5$

☐ $9 \cdot 10^4$

☐ $0,9 \cdot 10^4$

☐ $9 \cdot 10^5$

Ćwiczenie 8

Objętość sześcianu o boku $5 \cdot 10^3$ dm, to

☐ $125 \cdot 10^3 \text{ dm}^3$

☐ $5 \cdot 10^9 \text{ dm}^3$

☐ $25 \cdot 10^6 \text{ dm}^3$

☐ $1,25 \cdot 10^{11} \text{ dm}^3$

Ćwiczenie 9

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ $0,000028 = 2,8 \cdot 10^{-5}$

☐ $0,0037 = 3,7 \cdot 10^{-3}$

☐ $0,37 = 3,7 \cdot 10^{-2}$

☐ $0,00015 = 1,5 \cdot 10^{-5}$

☐ $0,00002 = 2 \cdot 10^{-6}$

Ćwiczenie 10

Połącz w pary.

3400

$3,4 \cdot 10^{-3}$

34

$3,4 \cdot 10^2$

0,0034

$3,4 \cdot 10^{-2}$

0,034

$3,4 \cdot 10^3$

340

$3,4 \cdot 10^{-4}$

0,00034

$3,4 \cdot 10^1$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11

Podaj liczbę, używając notacji wykładniczej.

a. $25 \text{ cm} = \dots m$

b. $4 \text{ mm} = \dots \text{cm}$

c. $0,56 \text{ m} = \dots \text{km}$

d. $5 \text{ g} = \dots \text{kg}$

e. $0,8 \text{ g} = \dots \text{dag}$

f. $0,03 \text{ kg} = \dots t$

Ćwiczenie 12

Przeciągnij i upuść.

a) $25 \cdot 10^{-3} =$

b) $2500 \cdot 10^{-2} =$

c) $0,25 \cdot 10^{-5} =$

d) $0,025 \cdot 10^{-1} =$

e) $0,00025 \cdot 10^{-4} =$

f) $25000 \cdot 10^{-1} =$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14

- a. Wiedząc, że promień Słońca wynosi około $7 \bullet 10^5$, promień Jowisza wynosi około $7 \bullet 10^4$, oblicz, ile razy promień Jowisza jest mniejszy od promienia Słońca.
- b. Wiedząc, że promień Słońca wynosi około $7 \bullet 10^5$, promień Marsa wynosi około $3,5 \bullet 10^3$, oblicz, ile razy promień Słońca jest większy od promienia Marsa.

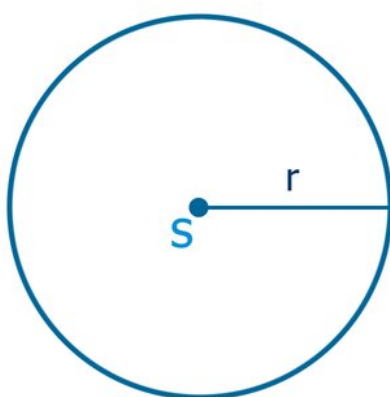
Ćwiczenie 15

Jaka jest różnica objętości buteleczek soku o pojemnościach 500 ml i $3 \bullet 10^{-1} \text{ dm}^3$?

Długość okręgu

Okrąg

Okrąg



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

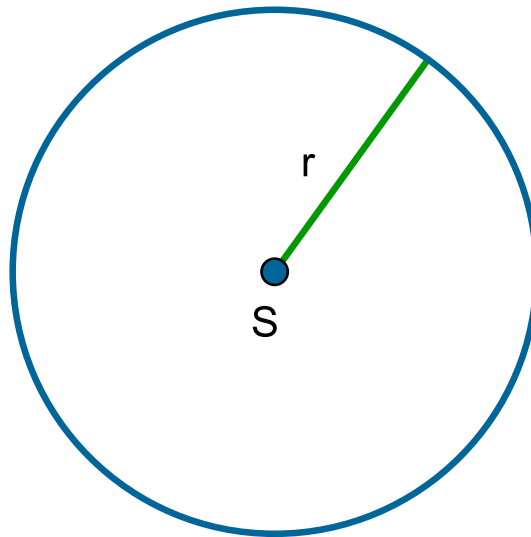
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Zapamiętaj!

Okręgiem o środku w punkcie S i promieniu r nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu S jest równa r .

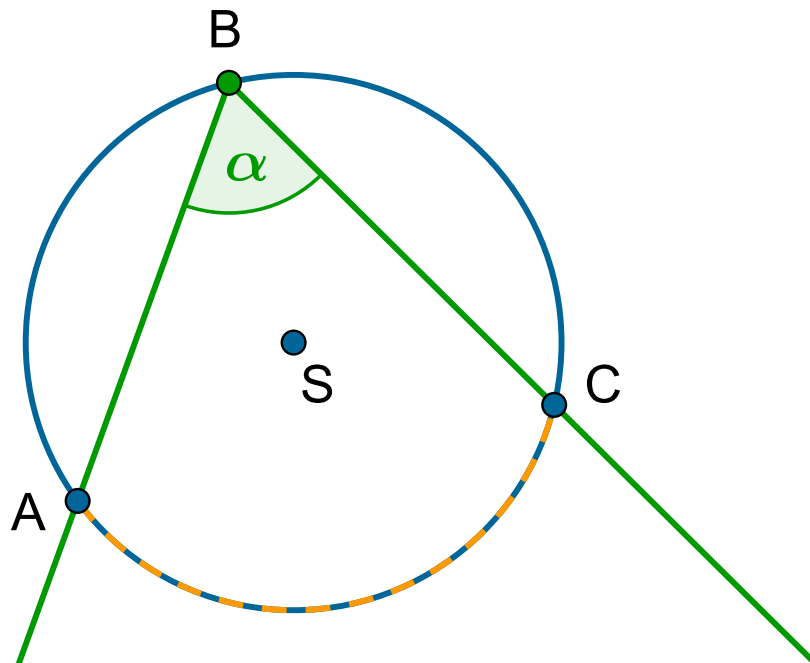
Okrąg o środku w punkcie S i promieniu r oznaczamy $O(S, r)$.

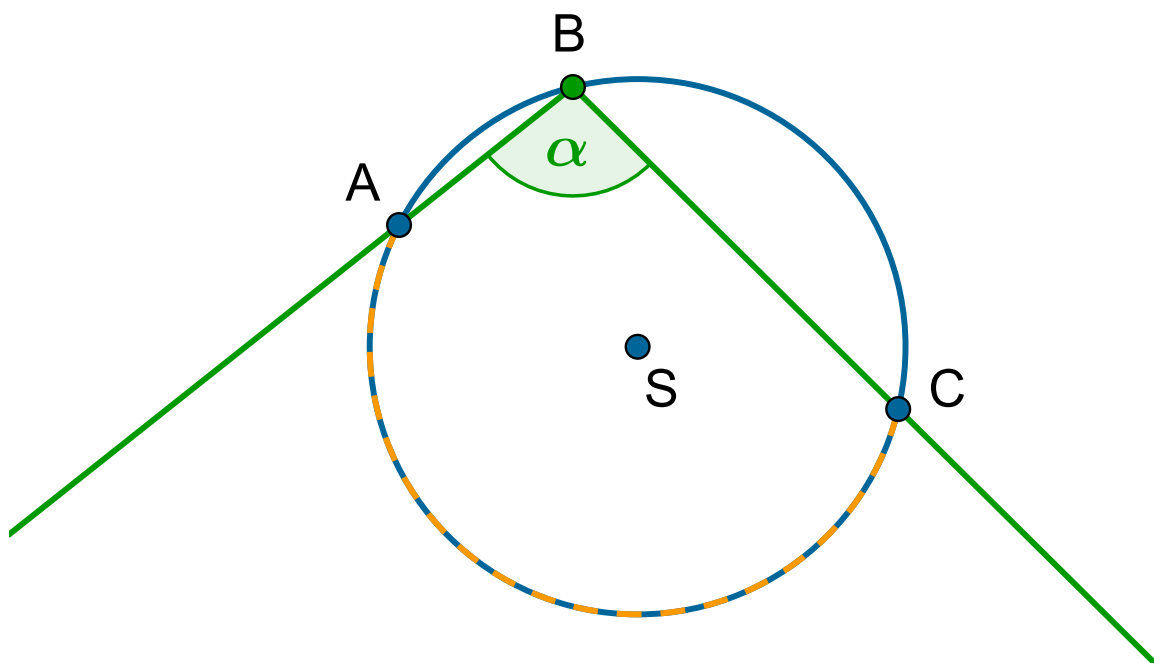


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Definicja: Kąt wpisany w okrąg

Kątem wpisanym w okrąg nazywamy kąt, którego wierzchołek leży na okręgu, a jego ramionami są półproste zawierające dwie cięciwy tego okręgu.

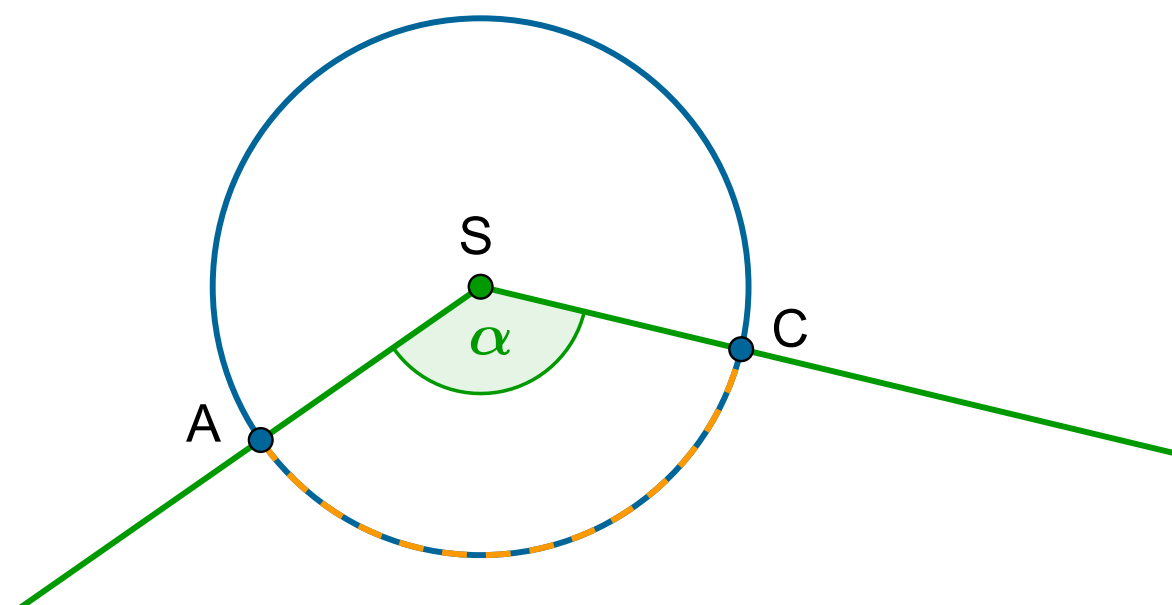


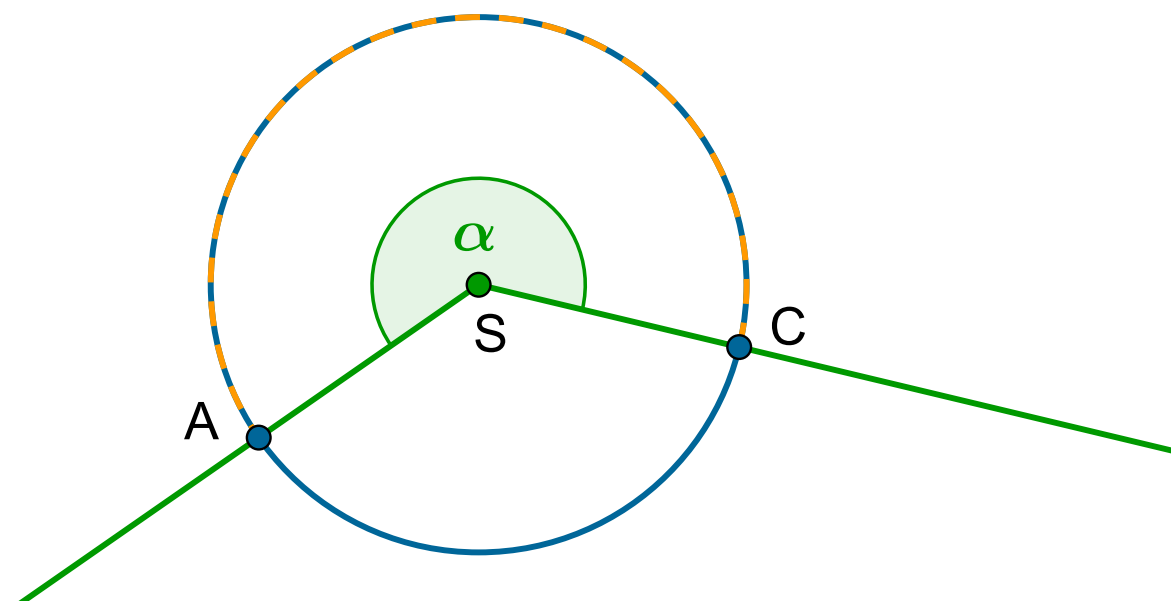


Punkty A i C wyznaczają dwa łuki na okręgu. Mówimy, że kąt wpisany α jest oparty na łuku AC , mając na myśli łuk zaznaczony na rysunku, na którym nie leży wierzchołek B (łuk zawarty w kącie ABC). Czasem mówimy też, że kąt α jest oparty na cięciwie AC .

Definicja: Kąt środkowy okręgu

Kątem środkowym okręgu nazywamy kąt, którego wierzchołek jest środkiem okręgu.





Mówimy, że kąt środkowy α jest oparty na łuku AC, mając na myśli łuk zaznaczony na rysunku.

- W przypadku kątów mniejszych niż 180° kąt środkowy jest oparty na krótszym z łuków AC.
- W przypadku kątów większych niż 180° kąt środkowy oparty jest na dłuższym z łuków AC.
- W przypadku kąta równego 180° kąt środkowy oparty jest na półokręgu.

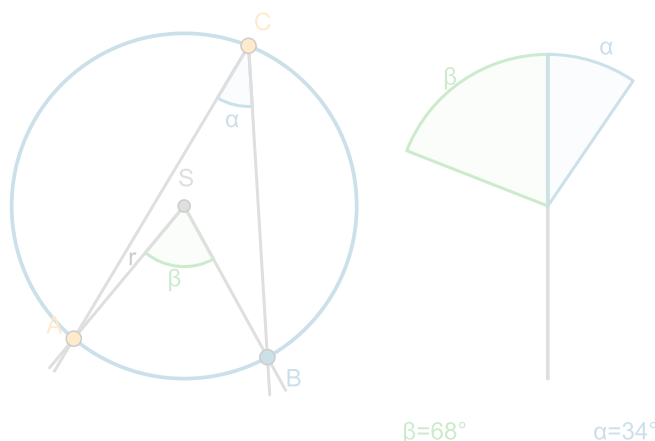
Rozpatrzmy teraz sytuację, w której kąt środkowy i kąt wpisany oparte są na tym samym łuku okręgu.

Związek kąta środkowego z wpisanym

Dane są
okrąg o środku S i promieniu r
oraz kąty
wpisany α i środkowy β

Zmień położenie punktów A i C.

Zaobserwuj, jaki jest związek
kąta środkowego z kątem wpisanym.

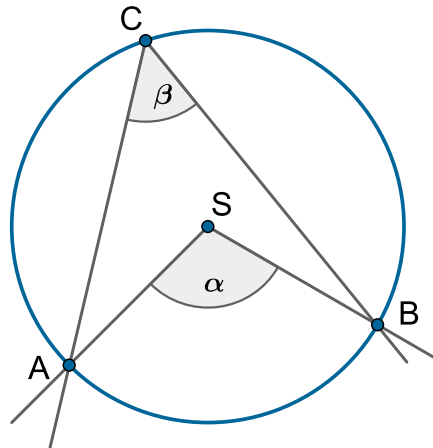


$\beta = 68^\circ$

$\alpha = 34^\circ$

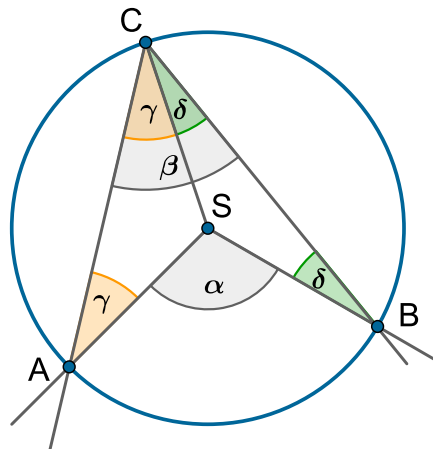
- I przypadek

Środek okręgu leży wewnątrz kąta wpisanego.



Na okręgu o środku w punkcie S i promieniu r zaznaczymy punkty A , B i C . Niech α będzie kątem środkowym opartym na łuku AB , a β niech będzie kątem wpisanym opartym na tym samym łuku AB .

Oznaczmy $\gamma = |\angle CAS|$ oraz $\delta = |\angle SBC|$. Poprowadźmy z punktu C promień okręgu. Utworzone w ten sposób trójkąty ACS oraz BCS są równoramienne. Zatem w każdym z tych trójkątów miary kątów przy podstawie są równe.



Zatem $|\angle ACS| = |\angle CAS| = \gamma$ i $|\angle BCS| = |\angle CBS| = \delta$.

Wtedy

$$|\angle ASC| = 180^\circ - 2\gamma, \quad |\angle BSC| = 180^\circ - 2\delta.$$

Suma miar kątów ASC , BSC , ASB jest równa 360°

$$|\angle ASC| + |\angle BSC| + |\angle ASB| = 360^\circ$$

Czyli

$$180^\circ - 2\gamma + 180^\circ - 2\delta + \alpha = 360^\circ$$

$$\alpha = 2\gamma + 2\delta = 2(\gamma + \delta),$$

ale

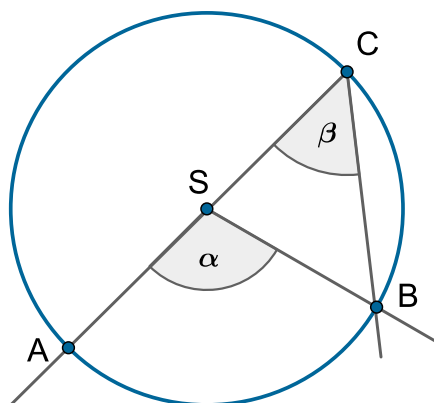
$$\gamma + \delta = \beta,$$

więc

$$\alpha = 2\beta.$$

- II przypadek

Środek okręgu leży na ramieniu kąta wpisanego.



Trójkąt BCS jest równoramienny, stąd $|\angle SBC| = \beta$. Zatem

$$|\angle BSC| = 180^\circ - 2\beta.$$

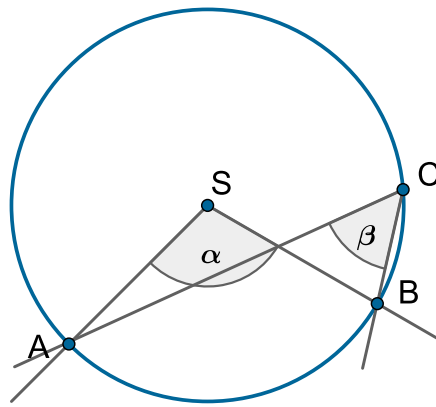
Z drugiej strony $|\angle BSC| + \alpha = 180^\circ$.

Zatem $180^\circ - 2\beta + \alpha = 180^\circ$, więc w tym przypadku także

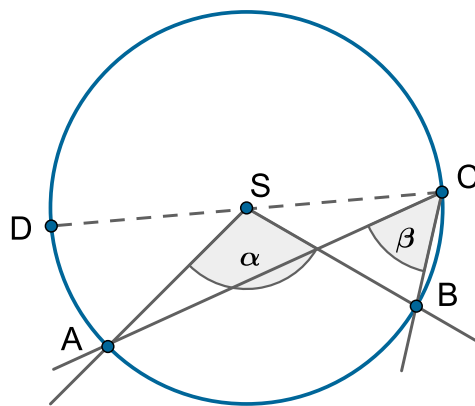
$$\alpha = 2\beta.$$

- III przypadek

Środek okręgu leży na zewnątrz kąta wpisanego.



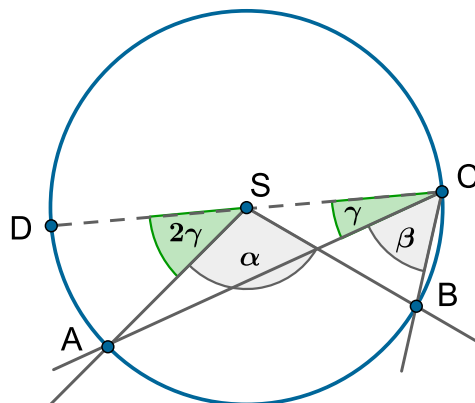
Narysujmy średnicę okręgu przechodzącą przez punkt C .



Oznaczmy przez γ kąt pomiędzy narysowaną średnicą a ramieniem AC kąta wpisanego, jak na rysunku.

Zauważmy, że kąt ASD jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku co kąt γ i jest to sytuacja opisana w przypadku II. Zatem

$$|\sphericalangle ASD| = 2\gamma.$$



Kąt $\gamma + \beta$ jest kątem wpisanym opartym na tym samym łuku co kąt środkowy $2\gamma + \alpha$ i jest to sytuacja opisana w przypadku II. Zatem

$$2(\gamma + \beta) = 2\gamma + \alpha.$$

Stąd ponownie otrzymujemy

$$\alpha = 2\beta.$$

Udowodniliśmy w ten sposób twierdzenie o kącie środkowym i wpisanym.

Twierdzenie: o kącie środkowym i wpisanym

Kąt środkowy ma miarę dwa razy większą niż kąt wpisany oparty na tym samym łuku.

Rektyfikacja okręgu

Ważne!

Rektyfikacja lub wyprostowanie okręgu polega na skonstruowaniu odcinka, którego długość jest równa obwodowi danego okręgu.

Jedną z przybliżonych konstrukcji wyprostowania okręgu podał w 1685 r. Adam Kochański, nadworny matematyk króla Jana III Sobieskiego.

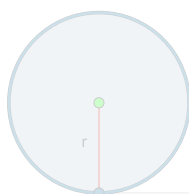
Reset

Rektyfikacja koła

Rektyfikacja (lub wyprostowanie) okręgu polega na skonstruowaniu odcinka, którego długość jest równa długości tego okręgu.

Przesuwaj punkt po odcinku by zrozumieć na czym polega rektyfikacja.

Wyprostowanie okręgu



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DUuWJzZFj>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Rektyfikacja Adama Kochańskiego

etap 1 z 11



Rektyfikacja okręgu polega na skonstruowaniu odcinka, którego długość jest równa długości danego okręgu.

Nie da się wykonać dokładnej rektyfikacji okręgu za pomocą cyrkla i linijki.

Przybliżoną konstrukcję rektyfikacji okręgu wykonał Polak Adam Kochański w 1685 r.



Fragment dzieła Kochańskiego "Acta Eruditorum"

Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DUuWJzZFj>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Długość okręgu

Przez wiele stuleci uczeni poszukiwali wzoru, pozwalającego określić długość okręgu, którego promień jest znany. Dokonując przybliżonych pomiarów, zauważyli, że stosunek długości okręgu do jego średnicy jest w każdym przypadku w przybliżeniu równy 3.

Długość okręgu

Dany jest okrąg o środku w punkcie S i promieniu r.

Zmieniaj promień okręgu, zmieniając położenie punktu  odcinka r.

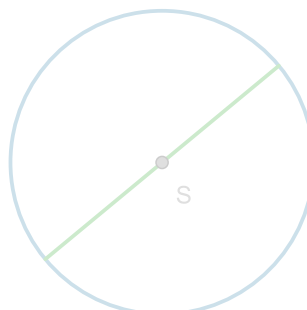
Obserwuj, jak zmienia się iloraz obwodu przez średnicę tego okręgu.

Co zauważasz?

$$\text{długość}_{\text{obwodu}} = 12.5663706144$$

$$\text{długość}_{\text{średnicy}} = 4$$

$$\text{iloraz} = \pi$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DUuWJzZFj>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przeprowadzony eksperyment pozwolił na znalezienie dokładniejszej liczby określającej stosunek długości okręgu do jego średnicy.

Liczbę tę w XVIII w. oznaczono grecką literą π (pi) od pierwszej litery greckiego słowa perimetron, czyli obwód.

$$\pi = \frac{\text{długość okręgu}}{\text{średnica okręgu}}$$

Oznaczmy

L – długość okręgu

r – promień okręgu

Wtedy średnica okręgu jest równa $2r$ oraz

$$\pi = \frac{L}{2r}$$

$$2\pi r = L$$

Długość L okręgu o promieniu r wyraża się wzorem $L = 2\pi r$.

Obwód koła



Dane jest koło o środku w punkcie S i promieniu r .

Długość promienia r można zmieniać zmieniając położenie punktu .

Zmierzmy obwód tego koła (czyli długość jego okręgu) oraz długość średnicy tego koła. Podzielmy długość obwodu przez długość średnicy koła.

Czy iloraz ten zmienia swoją wartość przy zmianie długości promienia koła?

Zapisz wartość tego ilorazu w zeszycie.

długość_{obwodu} = 16.841555723

długość_{średnicy} = 5.3608336853

iloraz = 3.1415926536



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DUuWJzZFj>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Liczba π

Ciekawostka

Starożytni Egipcjanie przyjmowali, że stosunek obwodu koła do jego średnicy jest równy

$$\left(\frac{4}{3}\right)^4 \approx 3,1604 \dots$$

Średniowieczni Chińczycy uważali, że jest on równy $\frac{22}{7} \approx 3,1428 \dots$

Przez wieki podawano coraz lepsze przybliżenie liczby π .

W XVI w. matematyk holenderski Ludolph van Ceulen podał jej wartość z dokładnością do 35 miejsc po przecinku:

3,14159265358979323846264338327950288 ...

Na cześć tego matematyka liczba pi zwana jest też ludolfiną.

W XVIII w. udowodniono, że liczba π nie jest liczbą wymierną. Nie da się więc jej zapisać w postaci ułamka dziesiętnego skończonego ani w postaci ułamka dziesiętnego nieskończonego okresowego.

Obecnie znamy przybliżenie liczby π z dokładnością do kilku bilionów miejsc po przecinku.

Przykład 1

W I w. p.n.e. rzymski architekt Witruwiusz zaproponował sposób pomiaru odległości drogowych, wykorzystujący poruszający się rydwan. Koło takiego rydwanu miało promień 0,6 m. Na pokonanie jednej mili rzymskiej (1400 m) musiało wykonać 400 obrotów.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oblicz wartość liczby π , przyjmowaną przez Witruwiusza.

Odpowiedź.

$$400 \cdot 2\pi r = 1400$$

$$400 \cdot 2\pi \cdot 0,6 = 1400$$

$$\pi = \frac{1400}{480} \approx 2,92$$

Obliczanie długości okręgu

Ważne!

W obliczeniach praktycznych najczęściej przyjmuje się, że $\pi \approx 3,14$.

Przykład 2

Średnica kółka do deskorolki jest równa 50 mm. Obliczmy, ile razy obróci się to kółko na drodze długości 1 m.

Obliczamy długość drogi, jaką pokona kółko podczas jednego obrotu, czyli obwód kółka.

$$L = 2r \cdot \pi$$

$$L \approx 50 \cdot 3,14$$

$$L \approx 157 \text{ mm}$$

Zamieniamy metr na milimetry.

$$1 \text{ m} = 1000 \text{ mm}$$

Obliczamy, ile razy obróci się kółko.

$$1000 : 157 = 6,369 \dots$$

Kółko obróci się około 6 razy.

Przykład 3

Koniec dużej wskazówki zegara w ciągu godziny pokonał drogę długości 94,2 cm.

Obliczmy przybliżoną długość tej wskazówki.

Oznaczmy przez x długość (w cm) dłuższej wskazówki zegara i skorzystajmy ze wzoru na obwód koła.

$$L = 2\pi x$$

$$x = \frac{L}{2\pi}$$

$$x \approx \frac{94,2}{2 \cdot 3,14}$$

$$x \approx 15 \text{ cm}$$

Wskazówka ma około 15 cm długości.

Wynik obliczeń związanych z długością okręgu często musi być dokładny.

Przykład 4

Obliczymy długość okręgu o promieniu 9 cm.

Korzystamy ze wzoru na długość okręgu, tym razem nie zastępując liczby π jej wartością przybliżoną.

$$L = 2\pi r$$

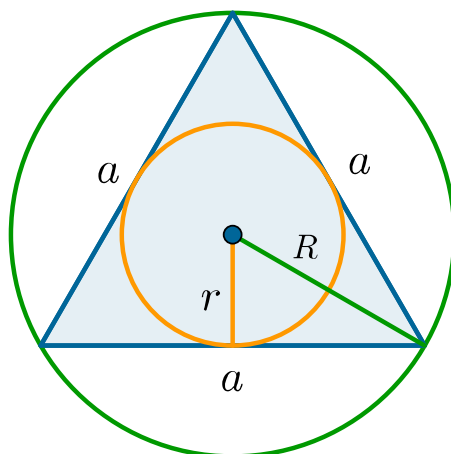
$$L = 2\pi \cdot 9 = 18\pi$$

$$L = 18\pi \text{ cm}$$

Długość okręgu jest równa 18π cm.

Wiemy już, że w każdy trójkąt można wpisać okrąg i na każdym trójkącie można opisać okrąg.

Jeśli trójkąt jest równoboczny, to promień okręgu wpisanego w ten trójkąt stanowi $\frac{1}{3}$ wysokości trójkąta. Natomiast promień okręgu opisanego jest równy $\frac{2}{3}$ wysokości trójkąta.

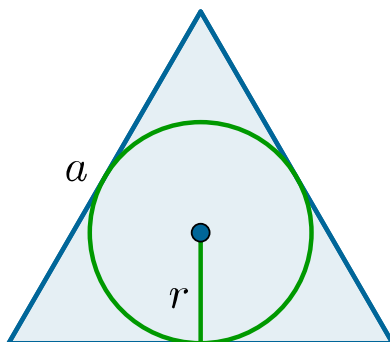


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

$$r = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$
$$R = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Przykład 5

Długość okręgu jest równa $4\pi\sqrt{3}$. Na okręgu tym opisano trójkąt równoboczny. Oblicz obwód tego trójkąta.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oznaczmy

r - promień okręgu

a - długość boku trójkąta

h - wysokość trójkąta

Obliczamy promień okręgu, korzystając z tego, że długość okręgu jest równa $4\pi\sqrt{3}$.

$$2\pi r = 4\pi\sqrt{3}$$

$$r = 2\sqrt{3}$$

Korzystając ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego, można zapisać $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Natomiast promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny jest równy $\frac{1}{3}h$. Zatem

$$r = \frac{1}{3}h$$

$$r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Porównujemy uzyskane liczby i wyznaczamy długość boku trójkąta.

$$\frac{a\sqrt{3}}{6} = 2\sqrt{3}$$

$$a = 12$$

W trójkącie równobocznym wszystkie boki są równe. Możemy już obliczyć obwód trójkąta.

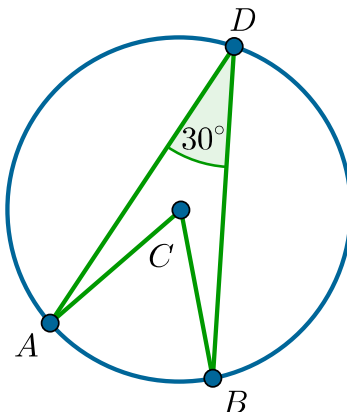
$$L = 3a = 3 \cdot 12 = 36$$

Obwód trójkąta jest równy 36.

Przykład 6

Punkty A , B , D leżą na okręgu o środku w punkcie C . Kąt wpisany w okrąg, oparty na cięciwie AB , tak jak na rysunku, ma miarę 30° . Obwód trójkąta ABC jest równy 6.

Wykaż, że długość tego okręgu jest większa od 12,5.



Kąt ACB jest kątem środkowym, opartym na tym samym łuku co kąt ADB. Zatem jego miara jest dwa razy większa od miary kąta ADB.

$$|\sphericalangle ACB| = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$$

Trójkąt ACB jest trójkątem równoramiennym, w którym kąt między ramionami ma miarę 60° . Zatem każdy z pozostałych kątów też jest równy 60° . Trójkąt jest więc równoboczny i długość jego boku jest równa promieniowi okręgu.

Zatem promień okręgu jest równy $6 : 3 = 2$, a długość okręgu wynosi

$$2 \cdot \pi \cdot 2 = 4\pi > 4 \cdot 3,14 = 12,56$$

Ponieważ $12,56 > 12,5$, zatem długość okręgu jest większa od 12,5, co należało wykazać.

Ćwiczenie 1

Uzupełnij tabelkę.

Tabela. Dane

Promień okręgu	Średnica okręgu	Obwód okręgu
8		
	20	
		24π
11		

Ćwiczenie 2

Łańcuch wykonany jest z 45 ogniów. Każde z nich jest w kształcie okręgu o średnicy 5 cm. Czy ten łańcuch jest dłuższy od 1 m?

Ćwiczenie 3

Obwód obręczy kosza do gry w koszykówkę wynosi około 141, 3 cm. Oblicz długość średnicy tego kosza.

Ćwiczenie 4

Koło oraz romb o przekątnych długości 8 cm i 6 cm mają taki sam obwód. Promień koła wynosi

☐ $\frac{10}{\pi}$ cm

☐ $\frac{\pi}{10}$ cm

☐ $\frac{20}{\pi}$ cm

☐ $\frac{\pi}{20}$ cm

Ćwiczenie 5

Punkt $P = (-1, 3)$ leży na okręgu o środku w punkcie $S = (0, 5)$. Promień tego okręgu

☐ jest równy $\sqrt{5}$

☐ większy od $\sqrt{5}$

☐ jest mniejszy od $\sqrt{5}$

Ćwiczenie 6

Trzy dyplomy zwinięte w rulony, każdy o średnicy 6 cm każdy, należy obwiązać wstążką. Jaka długa powinna być wstążka, jeśli na jeden węzeł i jedną kokardkę potrzeba 20 cm? Wynik zaokrąglij do drugiego miejsca po przecinku.

Ćwiczenie 7

Koło o środku w punkcie $S = (2, -9)$ jest styczne do pewnej prostej w punkcie $A = (-1, -1)$. Oblicz promień koła.

Ćwiczenie 8

Odległość środków dwóch kół stycznych zewnętrznie jest równa 6. Promienie tych kół są w stosunku 1 : 2. Suma obwodów tych kół jest równa

☐ 8π

☐ 12π

☐ 3π

☐ 18π

Ćwiczenie 9

Rozstrzygnij, czy podane zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Dla każdego okręgu stosunek jego obwodu do średnicy jest stały.

☐ Jeśli dwa okręgi mają równe promienie, to są przystające.

☐ Jeśli dwa okręgi mają równe obwody, to są współśrodkowe.

☐ Długość okręgu wyraża się zawsze liczbą wymierną.

Ćwiczenie 10

Oblicz, ile razy obwód koła o promieniu 8 jest większy od

a. długości okręgu o średnicy 4

b. długości okręgu o promieniu 1

Ćwiczenie 11

Dokończ zdania tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

- a. Promień koła o obwodzie 16π wynosi ...
- b. Średnica koła o obwodzie π wynosi ...

Ćwiczenie 12

Ile razy zwiększy się długość okręgu, jeśli jego promień zwiększymy 2 razy?

Ćwiczenie 13

Jak zmieni się długość okręgu, jeśli jego średnicę zmniejszymy o 2?

Ćwiczenie 14

Znajdź długość okręgu

- a. wpisanego w trójkąt równoboczny o boku długości 48 cm
- b. opisanego na trójkącie równobocznym o boku długości 48 cm

Ćwiczenie 15

Oblicz długość boku trójkąta równobocznego, wiedząc, że długość okręgu opisanego na tym trójkącie jest równa $6\pi\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 16

Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 0,6 cm i 0,8 cm. Na tym trójkącie opisano okrąg. Oblicz obwód tego okręgu.

Ćwiczenie 17

Wysokość trójkąta równobocznego jest równa h . Znajdź stosunek obwodu koła opisanego na tym trójkącie do obwodu koła wpisanego w ten trójkąt.

Ćwiczenie 18

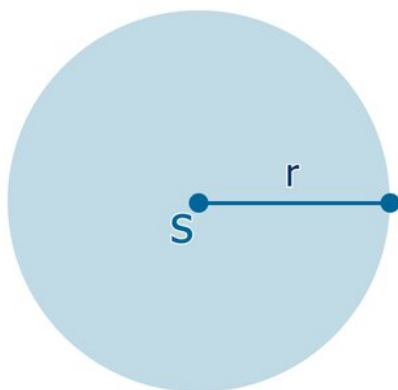
Z koła wycięto kwadrat o polu 392 cm^2 . Wykaż, że obwód tego koła jest nie mniejszy niż 88 cm .

Przyjmij $\pi = \frac{22}{7}$.

Pole koła

Koło

Koło



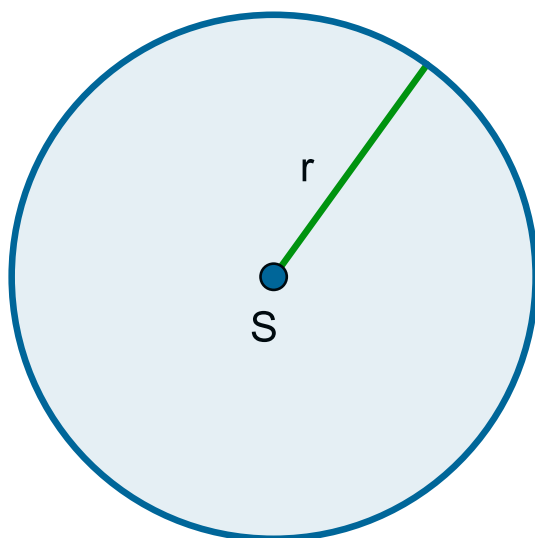
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Definicja: Koło

Kołem o środku w punkcie S i promieniu r nazywamy zbiór tych punktów płaszczyzny, których odległość od punktu S jest mniejsza bądź równa r .

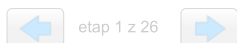


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

$K(S, r)$ – koło o środku w punkcie S i promieniu r

Pole koła

Pole koła



Zadaniem naszym jest wyznaczenie pola koła o promieniu r .

Najpierw podzielmy koło na pewną ilość równych wycinków tego koła.



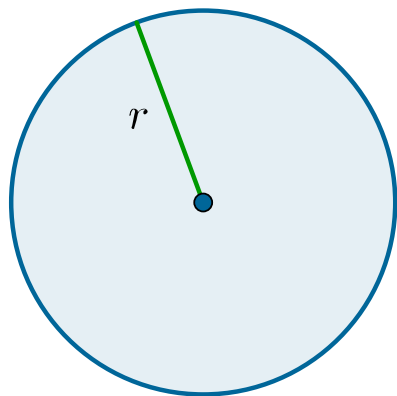
Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DRHLS88kb>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Ważne!

Pole koła o promieniu r jest równe iloczynowi liczby π i kwadratu promienia .

$$P = \pi r^2$$



$$P = \pi r^2$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Obliczanie pola koła

Przykład 1

Oblicz pole koła o promieniu 4 dm.

Do wzoru na pole koła wstawiamy $r = 4$.

$$P = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$$

Pole koła jest równe $16\pi \text{ dm}^2$.

Przykład 2

Obwód małego znaku zakazu wynosi $60\pi \text{ cm}$. Oblicz, ile cm^2 blachy potrzeba na jego wykonanie.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Obliczymy najpierw promień koła, w kształcie którego jest znak – korzystamy ze wzoru na obwód koła.

$$L = 2\pi r$$

$$60\pi = 2\pi r / : 2\pi$$

$$r = 30 \text{ cm}$$

Korzystamy ze wzoru na pole koła.

$$P = \pi r^2$$

$$P = \pi \cdot 30^2$$

$$P = 900\pi \text{ cm}^2$$

Przyjmijmy $\pi \approx 3,14$, wtedy

$$P \approx 900 \cdot 3,14 = 2826$$

Na wykonanie małego znaku zakazu potrzeba około 2826 cm^2 blachy.

Przykład 3

Pole powierzchni jednego okrągłego konfetti jest równe $4\pi \text{ mm}^2$. Ile takich konfetti można wyciąć z kwadratowej kartki papieru o boku długości $1,2 \text{ cm}$?

Obliczamy najpierw średnicę d koła, w kształcie którego jest konfetti.

$$4\pi = \pi r^2$$

$$r^2 = 4$$

$$r = 2$$

bo $r > 0$

$$d = 2r$$

$$d = 4 \text{ mm}$$

Ponieważ $1,2 \text{ cm} = 12 \text{ mm}$, zatem w kwadracie o boku 12 mm zmieści się 9 kół o średnicy 4 mm każde.

Z kwadratowej kartki można wyciąć 9 konfetti.

Przykład 4

Hipokrates z Chios badał własności figur, zwanych obecnie księżycami Hipokratesa. Księżyce Hipokratesa to figury w kształcie księżyców, związane z wielokątami i okręgami.

Rozważmy trójkąt prostokątny ABC. Budujemy okręgi, których średnicami są boki trójkąta ABC.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DRHLS88kb>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Figury ograniczone łukami okręgu opartego na przeciwprostokątnej oraz półokręgami opartymi na przyprostokątnych to księżyce Hipokratesa.

Ćwiczenie 1

Oznacz a , b przyprostokątne trójkąta ABC , c – przeciwprostokątną. Oblicz pole trójkąta. Oblicz sumę pól księżyców Hipokratesa. Co zauważasz?

Przykład 5

Salinon (po grecku solniczka) to figura ograniczona 4 półkami swoim kształtem przypominająca solniczkę. Opisywał ją już Archimedes.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DRHLS88kb>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Rozważ salinon oparty na średnicy AB . Niech FG będzie odcinkiem prostopadłym do tej średnicy i przechodzącym przez jej środek. Punkty F i G niech leżą na półkolech ograniczających salinon.

Wykaż, że pole salinonu jest równe polu koła, którego średnicą jest odcinek FG .

Odpowiedź

Niech

$$|GF| = 2R$$

$$|CE| = r$$

Wtedy

$$|AE| = 2R - r$$

$$|AC| = 2R - 2r$$

Suma pól półkoli opartych na średnicach AD i EB jest równa

$$\pi(R - r)^2$$

Pole salinonu jest równe

$$\begin{aligned} & \frac{\pi(2R-r)^2}{2} + \frac{\pi r^2}{2} - \pi(R-r)^2 = \\ & \frac{\pi(4R^2-4Rr+r^2)}{2} + \frac{\pi r^2}{2} - \pi(R^2-2Rr+r^2) \\ & = \pi\left(2R^2-2Rr+\frac{r^2}{2}+\frac{r^2}{2}-R^2+2Rr-r^2\right) = \pi R^2 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 2

Niech AB będzie średnicą koła o środku w punkcie S . Punkt C niech leży na odcinku AB , natomiast punkt P niech leży na okręgu o średnicy AB .

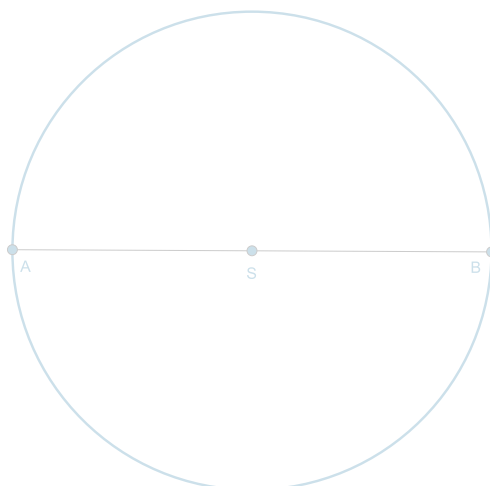
Arbelos

← etap 1 z 9 →

Jeżeli w salinonie punkty C i D pokrywają się, wówczas figura, którą otrzymamy to arbelos.

Oto jego konstrukcja:

Dany jest okrąg o środku S i średnicy AB .



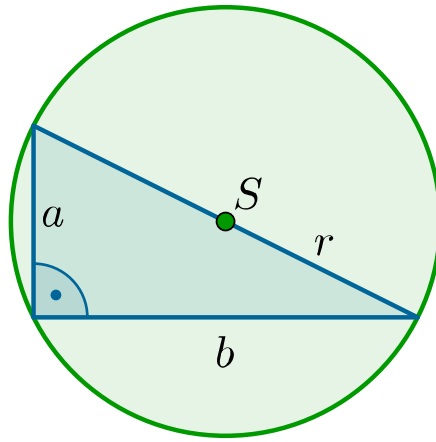
Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DRHLS88kb>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Wykaż, że pole arbelosa jest równe polu koła $K(S, |SB|)$.

Przykład 6

Na trójkącie prostokątnym opisano koło o polu $2,25\pi$. Oblicz sumę kwadratów długości przyprostokątnych tego trójkąta.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wiemy już, że środek koła opisanego na trójkącie prostokątnym jest zarazem środkiem przeciwprostokątnej tego trójkąta.

Oznaczmy przez r promień tego koła, natomiast przez a , b – przyprostokątne trójkąta wpisanego w to koło.

Pole koła jest równe $2,25\pi$. Stąd

$$\pi r^2 = 2,25\pi / : \pi$$

$$r^2 = 2,25$$

$$r = \sqrt{2,25} = 1,5$$

bo $r > 0$

Długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego wpisanego w koło jest równa $2r$, czyli 3.

Rozważany trójkąt jest prostokątny, możemy więc skorzystać z twierdzenia Pitagorasa, zapisując związek między długościami jego boków.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a^2 + b^2 = 3^2$$

$$a^2 + b^2 = 9$$

Wynika z tego, że suma kwadratów długości przyprostokątnych trójkąta jest równa 9.

Ćwiczenie 3

Pole koła o obwodzie $2,6\pi$ jest równe

☐ $1,69\pi$

☐ $6,76\pi$

☐ $3,38\pi$

☐ $1,3\pi$

Ćwiczenie 4

Obwód koła o polu $\frac{49}{81}\pi$ jest równy

☐ $1\frac{17}{81}\pi$

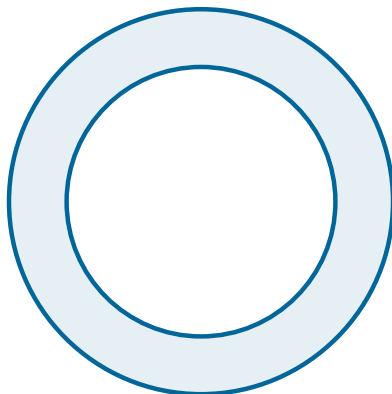
☐ $1\frac{5}{9}\pi$

☐ $\frac{7}{9}\pi^2$

☐ $\frac{7}{9}\pi$

Ćwiczenie 5

Promień mniejszego z kół na rysunku jest równy 11 cm, a większego 17 cm.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Pole pierścienia kołowego wyznaczonego przez te koła jest równe

☐ 168π

☐ 121π

☐ 410π

☐ 289

Ćwiczenie 6

Średnica pokrywki od garnka jest równa 30 cm. Ile blachy użyto na jej wykonanie?

☐ około $706,5 \text{ cm}^2$

☐ około 900 cm^2

☐ około 225 cm^2

☐ około 2826 cm^2

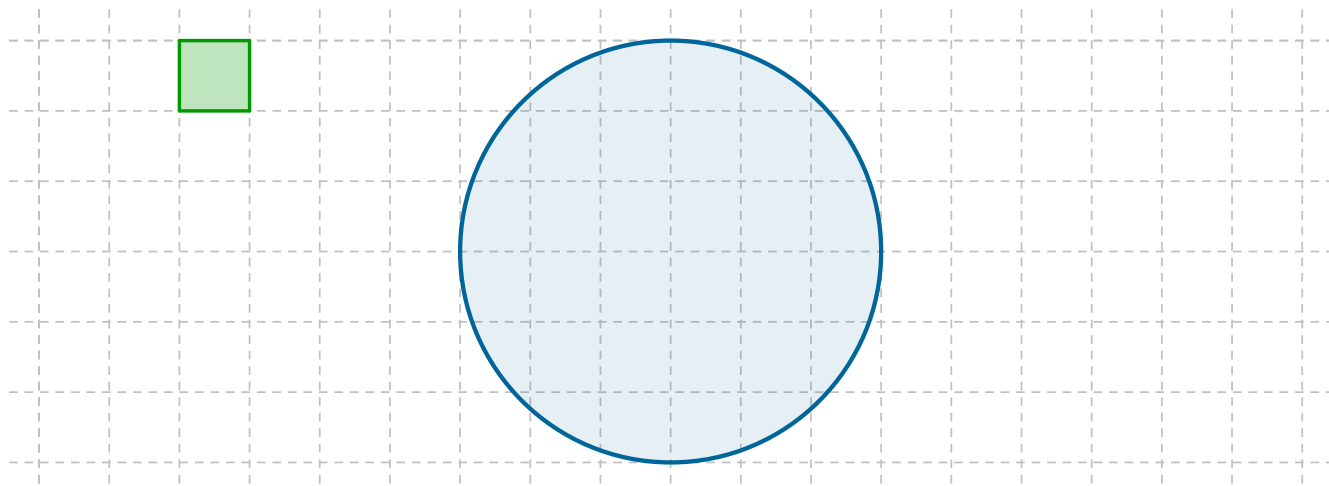
Ćwiczenie 7

Zapisz, jak zmieni się pole koła, gdy jego średnicę

- a. zwiększymy dwukrotnie
- b. zmniejszymy sześciokrotnie
- c. zwiększymy o 40 %
- d. zmniejszymy o 20 %

Ćwiczenie 8

Przyjmij, że pole zielonego kwadratu jest równe 1.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Rozstrzygnij, czy podane zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Obwód koła jest większy od 20.

☐ Pole koła jest większe od 29.

☐ Obwód koła jest mniejszy od 18.

☐ Pole koła jest mniejsze od 28.

Ćwiczenie 9

W kwadrat o boku długości 10 cm wpisano koło K . Na tym kwadracie opisano też koło K_1 . Stosunek pola koła K_1 do pola koła K jest równy

☐ 2 : 1

☐ 16 : 1

☐ 4 : 1

☐ π : 2

Ćwiczenie 10

Pole powierzchni okrągłego klombu jest równe 1 a. Przybliżona długość promienia koła, w kształcie którego jest klomb, jest równa

☐ 10 m

☐ 6m

☐ 3m

☐ 32 m

Ćwiczenie 11

Punkt B jest środkiem koła. Punkt A nie należy do tego koła. Prosta przechodząca przez punkt A jest styczna do koła w punkcie C . Wiadomo, że $|AB| = 10$ cm i $|AC| = 8$ cm. Oblicz pole koła.

Ćwiczenie 12

Odległość środków dwóch kół stycznych zewnętrznie jest równa 10 cm. Gdyby koła te były styczne wewnętrznie, to odległość ich środków wynosiłaby 8 cm. Oblicz pola tych kół.

Ćwiczenie 13

Odległość środków dwóch kół stycznych zewnętrznie jest równa 10 cm. Promienie kół pozostają w stosunku 4 : 1. Oblicz pola tych kół.

Ćwiczenie 14

Oblicz obwód kwadratu, którego pole jest równe polu koła o średnicy 18.

Ćwiczenie 15

Oblicz stosunek obwodu koła o polu 16π do obwodu koła o polu 169π .

Ćwiczenie 16

Promień koła o polu 30 cm^2 jest równy r . Promień koła o obwodzie 30 cm jest równy R . Wskaż nierówność prawdziwą.

☐ $R < r$

☐ $\frac{r}{R} > 2$

☐ $R > r$

Ćwiczenie 17

Koło i kwadrat mają równe pola. Oblicz stosunek obwodu koła do obwodu kwadratu.

Ćwiczenie 18

Punkt $P(-1,3)$ leży na okręgu o środku $S = (0,5)$. Oblicz pole koła ograniczonego tym okręgiem.

Ćwiczenie 19

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- ☐ Pole koła wyraża się zawsze liczbą niewymierną.
- ☐ Jeśli dwa koła mają równe pola, to są przystające.
- ☐ Liczba wyrażająca pole koła może być równa liczbie wyrażającej obwód tego koła.
- ☐ Jeśli dwa koła są współśrodkowe, to mają równe pola.

Ćwiczenie 20

Dokończ zdanie.

- a. Pole koła jest równe 16π . Średnica tego koła wynosi ...
- b. Obwód koła jest równy π . Pole tego koła jest równe ...

Ćwiczenie 21

Uzupełnij tabelkę.

Tabela. Dane

Średnica koła	Pole koła	Obwód koła
8		
	π	
		24π

Ćwiczenie 22

Koło oraz romb o przekątnych długości 8 cm i 6 cm mają takie same obwody. Pole koła wynosi

☐ $\frac{10}{\pi} \text{ cm}^2$

☐ $\frac{\pi}{20} \text{ cm}^2$

☐ $10\pi \text{ cm}^2$

☐ $\frac{100}{\pi} \text{ cm}^2$

Ćwiczenie 23

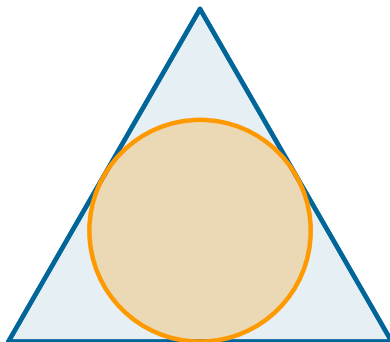
Uzupełnij tabelkę.

Tabela. Dane

Długość boku trójkąta równobocznego	Promień koła opisanego na tym trójkącie	Pole koła opisanego na tym trójkącie
	$6\sqrt{3}$	
12		
		3π
π		

Ćwiczenie 24

Witraż ma kształt trójkąta równobocznego o boku długości 24 cm. Pomarańczowa część witraża jest w kształcie koła wpisanego w ten trójkąt. Pozostała część witraża jest niebieska.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oblicz pole niebieskiej figury.

Ćwiczenie 25

W okrąg wpisano kwadrat i na tym samym okręgu opisano kwadrat. Stosunek pola kwadratu opisanego na okręgu do pola kwadratu wpisanego w ten okrąg

☐ jest większy od 4

☐ jest równy 4

☐ wyraża się liczbą niewymierną

☐ jest mniejszy od 4

Ćwiczenie 26

Pole koła o środku w punkcie O jest równe $1,69\pi$. W odległości $0,5$ od punktu O poprowadzono cięciwę.

Zaznacz każde zdanie prawdziwe.

☐ Obwód koła jest w przybliżeniu równy $8,16$.

☐ Pole kwadratu, którego jednym z boków jest cięciwa, jest większe od $5,5$.

☐ Długość cięciwy jest równa $1,2\pi$.

Ćwiczenie 27

Na trójkącie równobocznym o boku długości $\sqrt{3}$ opisano okrąg i w ten trójkąt wpisano okrąg. Wykaż, że pole pierścienia kołowego wyznaczonego przez te okręgi jest równe $\frac{3}{4}\pi$.

Ćwiczenie 28

Pole koła opisanego na trójkącie prostokątnym równoramiennym jest równe $\frac{72}{\pi}$. Oblicz obwód tego trójkąta.

Wycinek koła. Odcinek koła

Wycinek koła

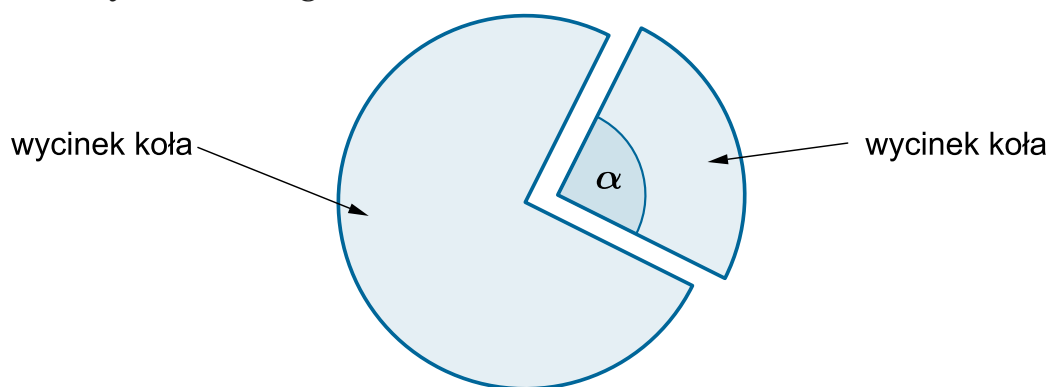
Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DaCAcOnS>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

E-podręczniki z matematyki

Definicja: Wycinek koła

Wycinkiem koła (wycinkiem kołowym) nazywamy część tego koła ograniczoną łukiem i ramionami kąta środkowego.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ważne!

Kąt środkowy α wyznacza w kole dwa wycinki kołowe.

Przykład 1

W kole o promieniu 10 wyznaczony jest wycinek koła przez kąt środkowy o mierze 60° . Obliczymy pole tego wycinka.

Kąt o mierze 60° stanowi $\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$ kąta pełnego. Pole wycinka koła wyznaczonego przez ten kąt jest taką samą częścią pola całego koła. Stanowi więc $\frac{1}{6}$ pola całego koła.

$$P = \frac{1}{6} \pi r^2$$

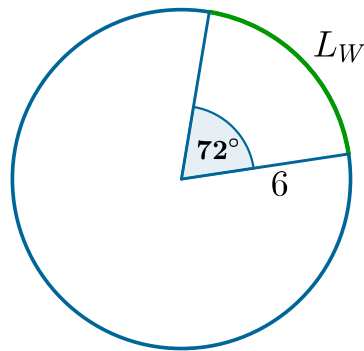
$$P = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 10^2$$

$$P = 16\frac{2}{3}\pi$$

Pole wycinka koła jest równe $16\frac{2}{3}\pi$.

Przykład 2

Kąt środkowy w okręgu o promieniu 6 ma miarę 72° . Oblicz długość łuku wyznaczonego przez ten kąt.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Obliczamy, że kąt 72° stanowi $\frac{72^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{5}$ część kąta pełnego. Szukana długość łuku L_W jest więc równa $\frac{1}{5}$ długości okręgu.

$$L_W = \frac{1}{5} \cdot 2\pi r$$

$$L_W = 2,4\pi$$

Długość łuku wyznaczonego przez wycinek koła jest równa $2,4\pi$.

Zauważmy, że wycinek koła stanowi taką samą część koła, jaką częścią kąta pełnego jest kąt środkowy wyznaczający ten wycinek. Podobnie – długość łuku wyznaczonego przez ten wycinek jest taką samą częścią długości okręgu, jaką częścią kąta pełnego jest kąt środkowy wyznaczający ten wycinek.

Ważne!

Pole P_W wycinka koła wyznaczonego w kole o promieniu r przez kąt środkowy o mierze α jest równe

$$P_W = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

Ważne!

Długość łuku L_W wyznaczonego na okręgu o promieniu r przez kąt środkowy o mierze α jest równa

$$L_W = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

Przykład 3

Kąt środkowy w kole o promieniu 18 cm ma miarę 240° . Oblicz długość łuku wyznaczonego przez ten kąt. Wynik zaokrąglaj do części dziesiątych.

Korzystamy ze wzoru na długość łuku wyznaczonego przez wycinek koła. Do wzoru podstawiamy

$$\alpha = 240^\circ$$

$$r = 18 \text{ cm}$$

$$L_W = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

$$L_W = \frac{240^0}{360^0} \cdot 2\pi \cdot 18$$

$$L_W = 24\pi$$

$$L_W \approx 75,4 \text{ cm}$$

Długość łuku wyznaczonego przez ten wycinek wynosi około 75,4 cm.

Przykład 4

W kole o promieniu 27 dm kąt środkowy ma miarę 160° . Oblicz pole wycinka koła wyznaczonego przez ten kąt.

Korzystamy ze wzoru na pole wycinka koła. Do wzoru podstawiamy $\alpha = 160^\circ$ i $r = 27 \text{ dm}$.

$$P_W = \frac{\alpha}{360^0} \cdot \pi r^2$$

$$P_W = \frac{160^0}{360^0} \cdot \pi \cdot 27^2$$

$$P_W = 324 \cdot \pi$$

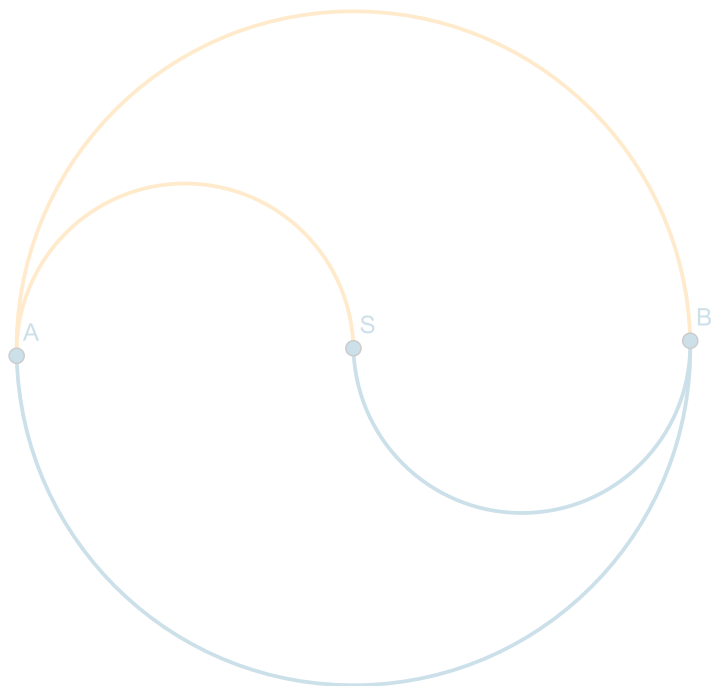
$$P_W \approx 1017,36 \text{ dm}^2$$

Pole wycinka koła jest równe około 1017,36 dm².

Yin - Yang
etap 1 z 3



W antycznej filozofii chińskiej, yin i yang to dwie uzupełniające się siły, dwie przeciwności. Yang oznacza światło słoneczne, biel, lato; Yin to zachmurzenie, czerni, zima. Siły yang i yin, będące w ciągłym ruchu, powodują powstawanie wszystkiego, co nas otacza. Korea przyjęła yin - yang za symbol flagowy swoich linii lotniczych Korean Airlines.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DaCAcOnS>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Ćwiczenie 1

Podziel koło na równe części, przypominające Yin – Yang. Korzystając z suwaka, zmieniaj liczbę tych części.

Wykaż, że w każdym przypadku otrzymane części mają równe pola.

Odcinek koła

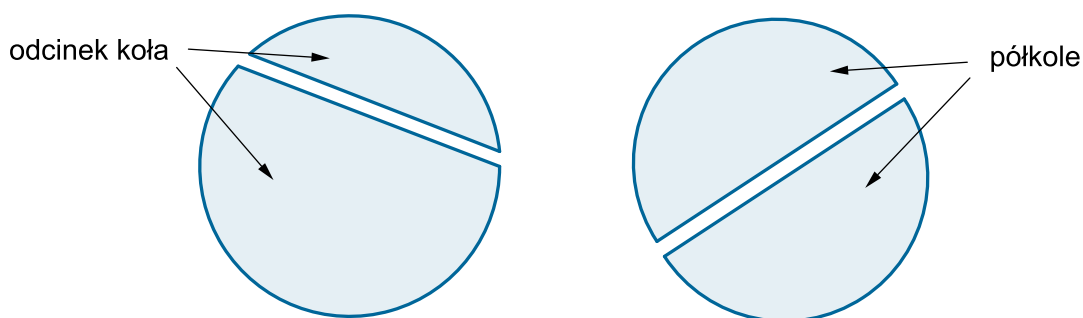
Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DaCAcOnS>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

E-podręczniki z matematyki

Definicja: Odcinek koła

Odcinkiem koła (odcinkiem kołowym) nazywamy część koła odciętą przez cięciwę wraz z tą cięciwą.

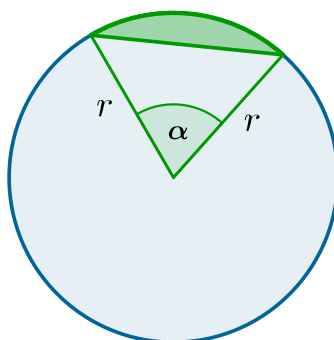


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Każda cięciwa wyznacza dwa odcinki koła. Średnica dzieli koło na dwa półkola.

Ważne!

Cięciwa ograniczająca odcinek koła wyznacza kąt środkowy α . Ramiona tego kąta ograniczają łuk okręgu.

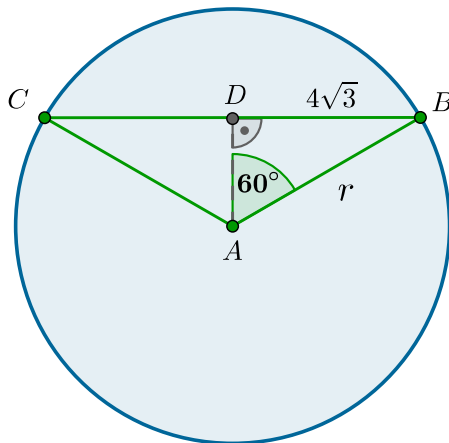


Ważne!

Pole odcinka koła jest różnicą pola wycinka koła wyznaczonego przez kąt α i pola trójkąta, którego bokami są promienie okręgu i cięciwa.

Przykład 5

Odcinek koła wyznaczony jest przez kąt środkowy o mierze 120° i cięciwę długości $8\sqrt{3}$. Oblicz pole odcinka.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przyjmijmy oznaczenia takie, jak na rysunku. Wtedy trójkąt ABD jest trójkątem prostokątnym, w którym kąt DAB ma miarę 60° (jako połowa kąta 120°). Naprzeciw kąta o mierze 60° leży przyprostokątna długości $4\sqrt{3}$ (jako połowa cięciwy). Korzystając z własności trójkąta prostokątnego o kątach 90° , 60° , 30° , stwierdzamy, że $|AD| = 4$ i $|AB| = 8$.

Obliczamy pole wycinka koła o promieniu $r = |AB| = 8$ wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze 120° .

$$P_W = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 8^2$$

$$P_W = \frac{64}{3}\pi$$

Obliczamy pole trójkąta ABC.

$$P_\Delta = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AD|$$

$$P_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 4$$

$$P_\Delta = 16\sqrt{3}$$

Pole odcinka koła jest równe różnicy pola wycinka i pola trójkąta ABC.

$$P = P_W - P_\Delta$$

$$P = \frac{64}{3}\pi - 16\sqrt{3}$$

Pole odcinka koła jest równe $21\frac{1}{3}\pi - 16\sqrt{3}$.

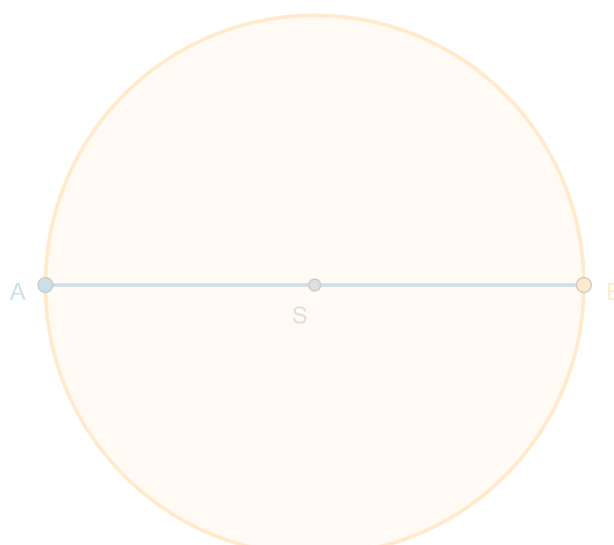
Ćwiczenie 2

Figura Sercowa

etap 1 z 8



Dany jest okrąg o środku w punkcie S
i średnicy AB.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DaCAcOnS>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Nazwijmy niebieską figurę na rysunku „figurą sercową”.

Zastanów się, w jaki sposób powstała ta figura.

Sprawdź, że pole figury sercowej jest równe πr^2 .

Ćwiczenie 3

Długość boku kwadratu jest równa a .

Na bokach kwadratu rysujemy księżyce Hipokratesa.

Lunula kwadratowa

Na bokach kwadratu zbudowano cztery półokręgi oraz okrąg opisany na kwadracie.

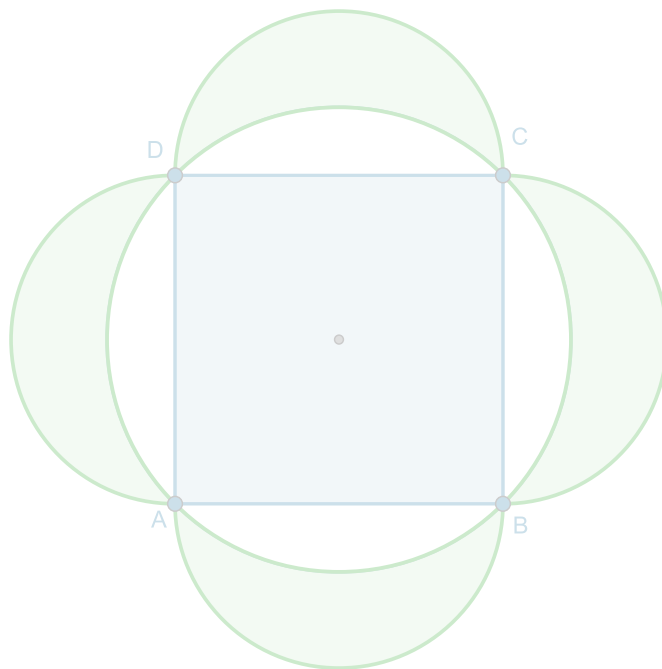
Obszar ograniczony łukami tych okręgów tworzy cztery księżyce, zwane lunulą kwadratową.

Odczytaj pole jednej z jej księżyców i pole kwadratu.

Co dostrzegasz?

Postaw odpowiednią hipotezę.

☐ pokaż miary pól figur



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DaCAcOnS>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Figurę utworzoną z tych księżyców nazwiemy lunulą (Luna po łacinie to Księżyc).

Oblicz pole kwadratu.

Oblicz pole jednej z części lunuli. Oblicz pole lunuli.

Porównaj to pole z polem kwadratu. Co zauważasz?

Ćwiczenie 4

Lunula trójkątna powstaje na bazie trójkąta prostokątnego równoramiennego.

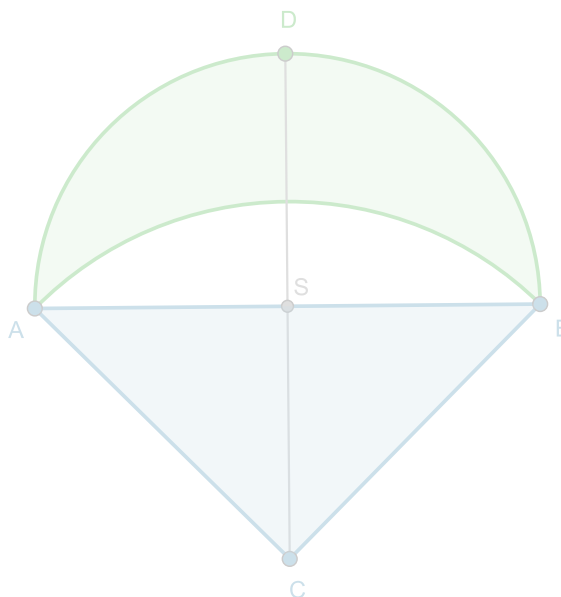
Lunula trójkątna

Jeśli na bazie trójkąta prostokątnego równoramiennego ABC wykreślimy łuki:
o środku C i promieniu $CA=CB$
oraz o środku S i promieniu $SA=SB$,
wówczas pomiędzy tymi łukami
utworzy się obszar w kształcie księżycy,
zwany lunulą trójkątną.

Porównaj ze sobą pole księżycy i pole trójkąta.

Jaką hipotezę możesz postawić?
Spróbuj ją udowodnić.

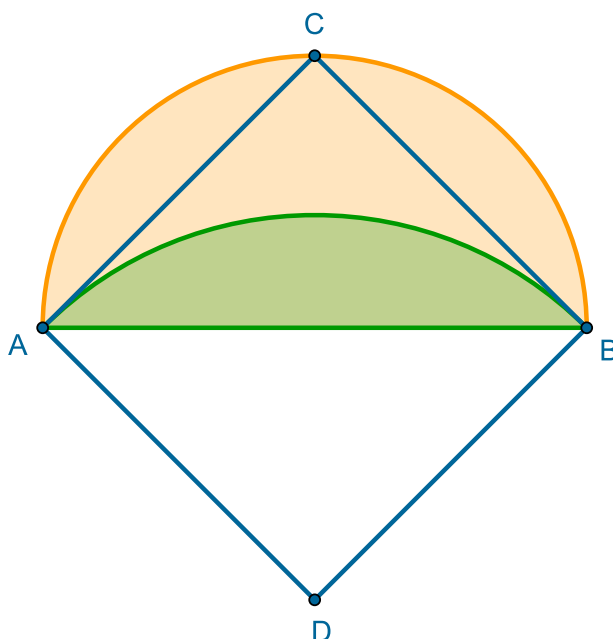
☐ pokaż miary pól figur



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DaCAcOnS>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przyjrzyj się, jak powstaje lunula trójkątna i wykonaj podobną konstrukcję.



- Oblicz pole połowy kwadratu (czyli pole trójkąta prostokątnego równoramiennego).
- Oblicz pole lunuli.
- Porównaj te pola. Co zauważasz?

Lunula trójkątna - dowód

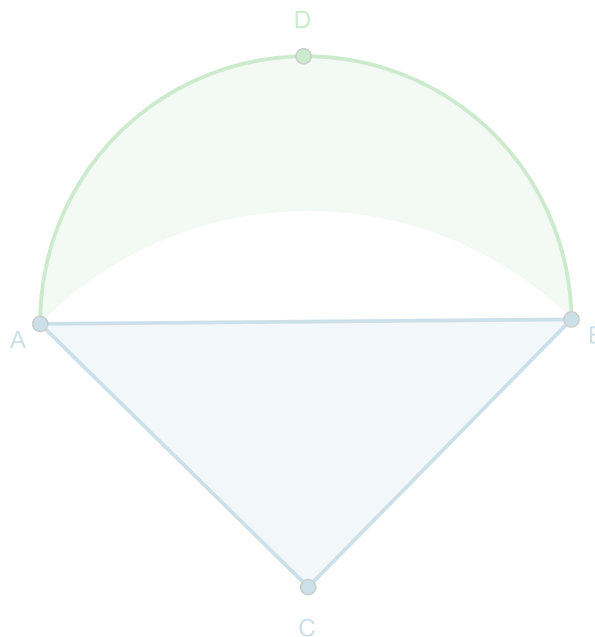
etap 1 z 4



Udowodnimy, że obszar w kształcie księżycy, zwany lunulą trójkątną, ma pole równe polu trójkąta prostokątnego, na którym ta lunula została skonstruowana.



pokaż miary pól figur



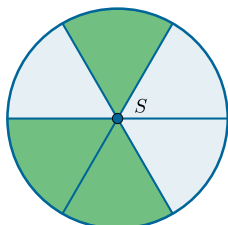
Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DaCAcOnS>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

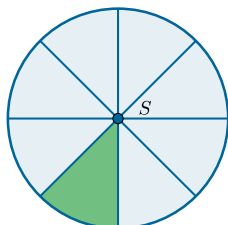
Ćwiczenie 5

Koło o środku w punkcie S i promieniu równym 6 podzielono na jednakowe części. Następnie zamalowano na zielono niektóre z części – jak na rysunku. Oblicz pole zaznaczonych na zielono części tego koła.

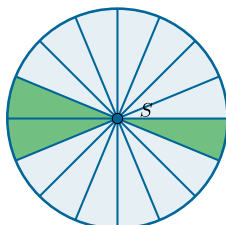
a)



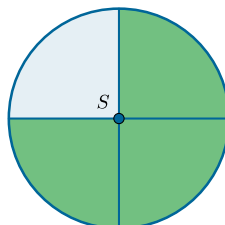
b)



c)



d)

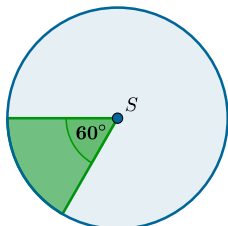


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

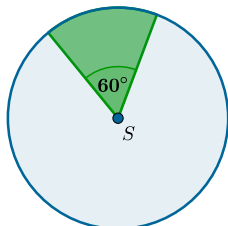
Ćwiczenie 6

Koło o środku w punkcie S ma promień równy 4. Oblicz pole pomalowanego na zielono wycinka tego koła.

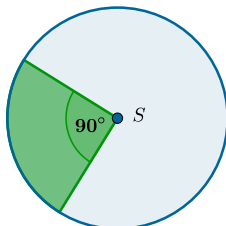
a)



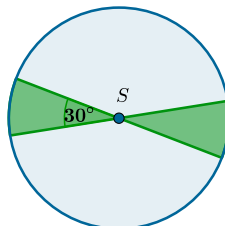
b)



c)



d)



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7

Oblicz pole koła, wiedząc, że

- wycinek tego koła wyznaczony przez kąt środkowy o mierze 120° ma pole równe 3π
- wycinek tego koła wyznaczony przez kąt środkowy o mierze 72° ma pole równe π

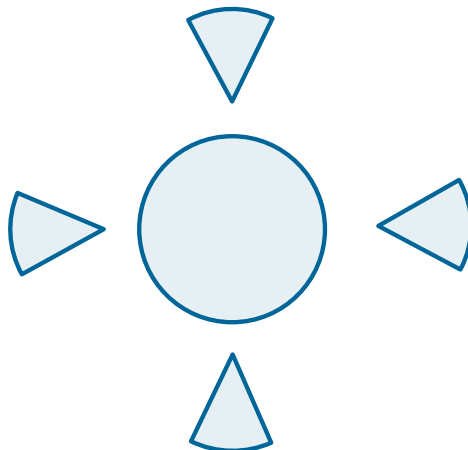
Ćwiczenie 8

W okręgu o promieniu 12 cm zaznaczono łuk wyznaczony przez kąt środkowy o mierze α . Wyznacz długość tego łuku, jeżeli

- a. $\alpha = 40^\circ$
- b. $\alpha = 20^\circ$
- c. $\alpha = 240^\circ$
- d. $\alpha = 100^\circ$

Ćwiczenie 9

Kwiatek składa się z czterech jednakowych płatków i środka w kształcie koła. Płatek ma kształt wycinka koła wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze 45° w kole o promieniu 9. Środkowe koło ma promień równy 9. Oblicz pole powierzchni kwiatka. Wynik podaj z dokładnością do 0,1.

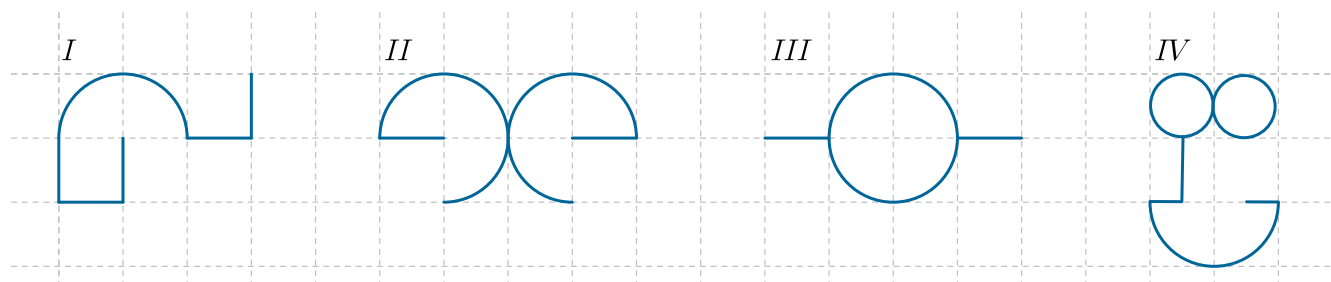


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wycinki jednakowe o kącie między ramionami 45° .

Ćwiczenie 10

Które z linii mają tę samą długość?



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

☐ II i IV

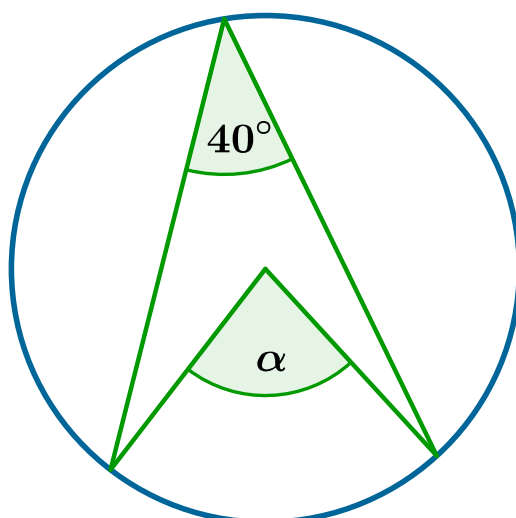
☐ II i III

☐ I i IV

☐ I i III

Ćwiczenie 11

Oblicz długość łuku w okręgu o promieniu 4 cm, wyznaczonego przez kąt środkowy α .

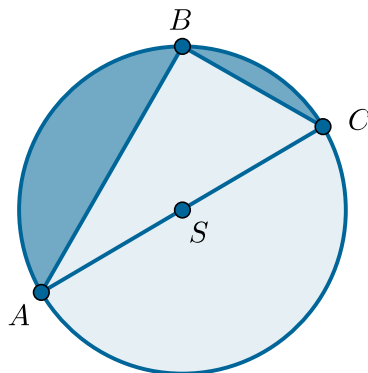


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12

W kole o środku w punkcie S i promieniu $7,25$ poprowadzono cięciwy AB i CB . Cięciwa AB ma długość $10,5$.

Oblicz sumę pól odcinków koła wyznaczonych przez te cięciwy. Wynik podaj z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13

Kąt środkowy w kole ma miarę 144° . Długość łuku wyznaczonego przez ten kąt jest równa $1,2\pi$. Zaznacz każde zdanie prawdziwe.

☐ Pole tego wycinka jest równe $0,9\pi$

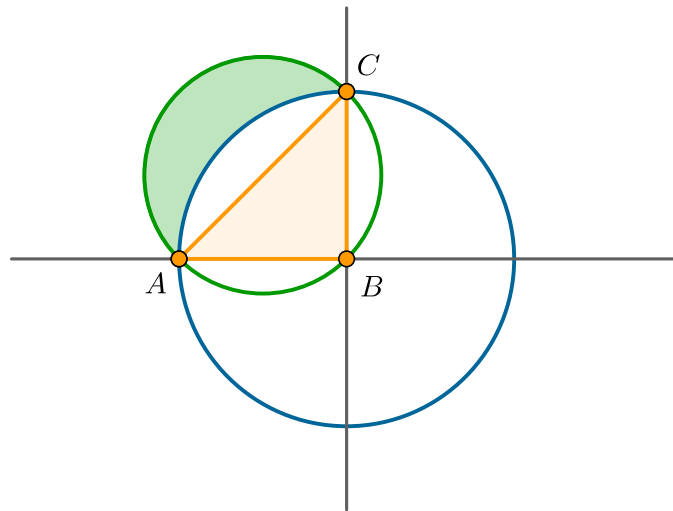
☐ Średnica tego koła jest równa 3.

☐ Długość okręgu ograniczającego to koło jest równa 3.

☐ Pole koła jest równe 9π .

Ćwiczenie 14

Wykaż, że pole zaznaczonej na zielono lunuli jest równe polu trójkąta ABC .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15

Jaki promień ma koło, w którym wycinkowi o polu 6π odpowiada kąt o mierze 60° ?

Ćwiczenie 16

Jaki promień ma okrąg, w którym kąt środkowy o mierze 12° jest oparty na łuku o długości 2π ?

Ćwiczenie 17

Narysuj koło o promieniu 6. Zamaluj część tego koła o polu 30π .

Ćwiczenie 18

Oblicz pole odcinka kołowego wyznaczonego w kole o promieniu 5 przez cięciwę łączącą końce dwóch prostopadłych do siebie promieni.

Ćwiczenie 19

Narysuj dowolny okrąg. Na okręgu zamaluj łuk stanowiący:

- a. $\frac{3}{4}$ długości okręgu
- b. $\frac{1}{6}$ długości okręgu
- c. $\frac{11}{12}$ długości okręgu

Ćwiczenie 20

Uzupełnij zdania.

- a. Średnica koła wyznacza dwa ... odcinki kołowe.
- b. Kąt środkowy α wyznacza w kole ... wycinki kołowe.

Ćwiczenie 21

Udowodnij, że średnica dzieli koło na dwa przystające odcinki kołowe.

Ćwiczenie 22

Kąt środkowy oparty na łuku stanowiącym $\frac{1}{8}$ długości okręgu ma miarę

☐ 120°

☐ 90°

☐ 60°

☐ 45°

Ćwiczenie 23

W kole zaznaczono dwa wycinki kołowe o równych polach. Wykaż, że wycinki te wyznaczone są przez kąty środkowe o jednakowych miarach.

Figury podobne

Figury podobne

Podobieństwo

etap 1 z 5



Podobieństwo można zilustrować w prosty sposób, powiększając lub pomniejszając jakiś obiekt.

W konstrukcji obok, obiektem tym jest płaska fotografia drzewa, której wymiary możemy zmniejszać lub powiększać, zmieniając położenie punktu .

Otrzymujemy w ten sposób całą rodzinę fotografii, z których każda ma inne wymiary, ale wszystkie są do siebie podobne.

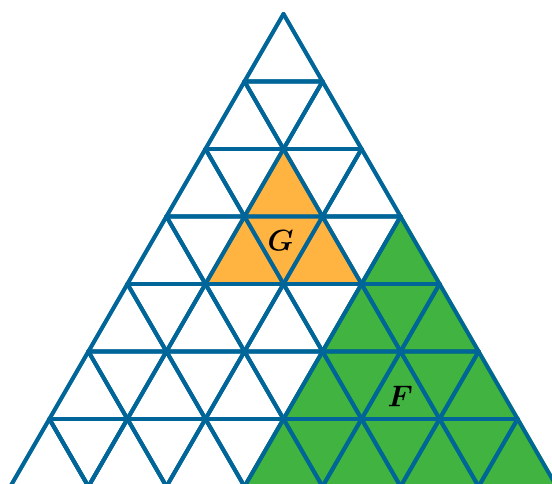


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D3vRJo8Bt>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Ważne!

Figury, które mają ten sam kształt, ale które mogą mieć inną wielkość, nazywamy **podobnymi**.

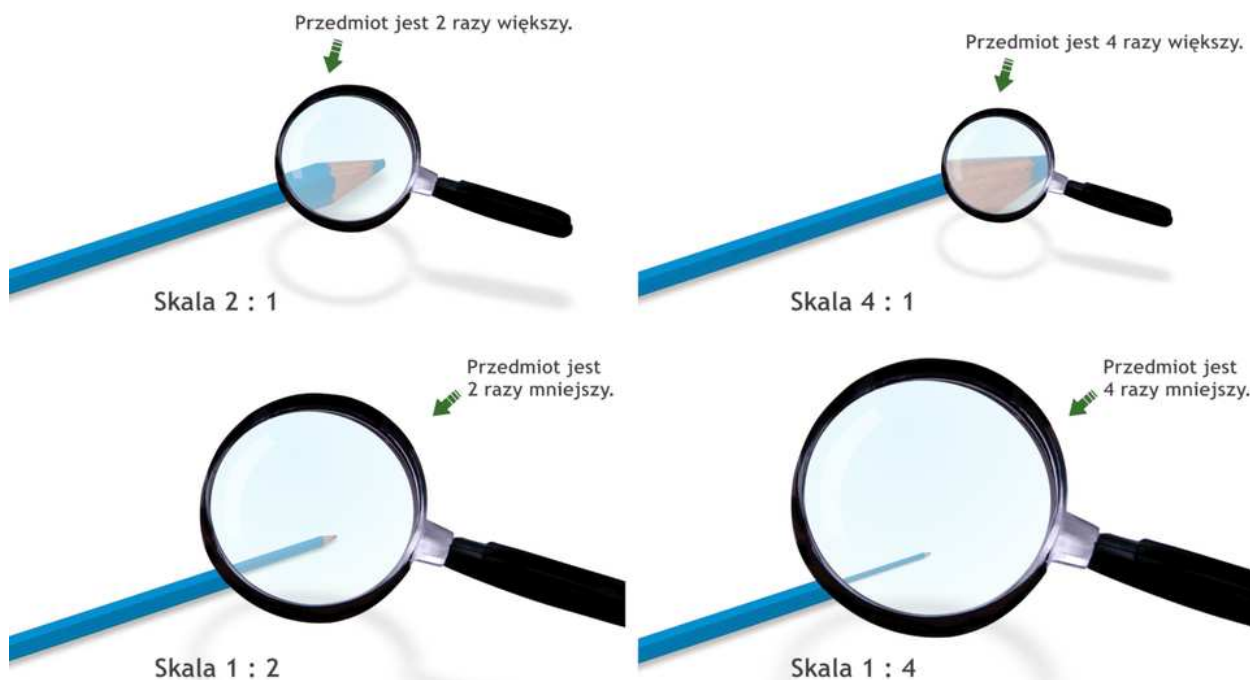


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Figura F jest podobna do figury G . Symbolicznie zapisujemy

$$F \sim G$$

Skala podobieństwa



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

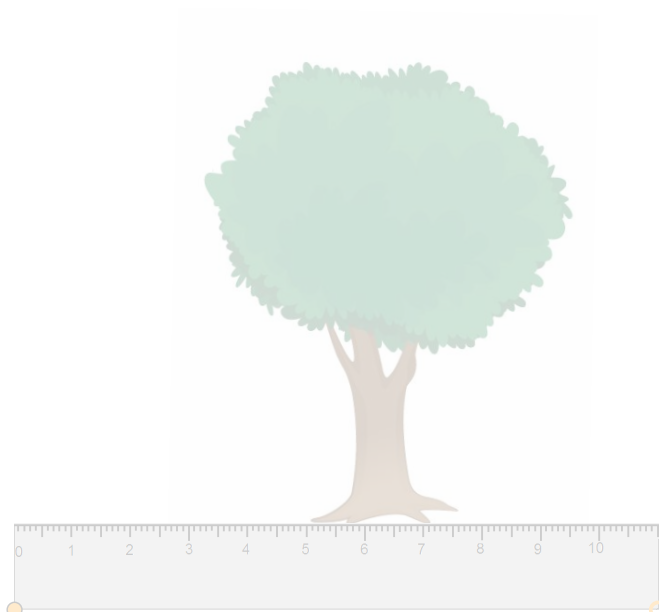
Ćwiczenie 1

Skala

Drzewo narysowano w pewnej skali.
Wysokość drzewa wynosi
w rzeczywistości 6 metrów.
W jakiej skali zostało narysowane drzewo?

Posłuż się linijką o centymetrowej skali.

skala 1:



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D3vRJo8Bt>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

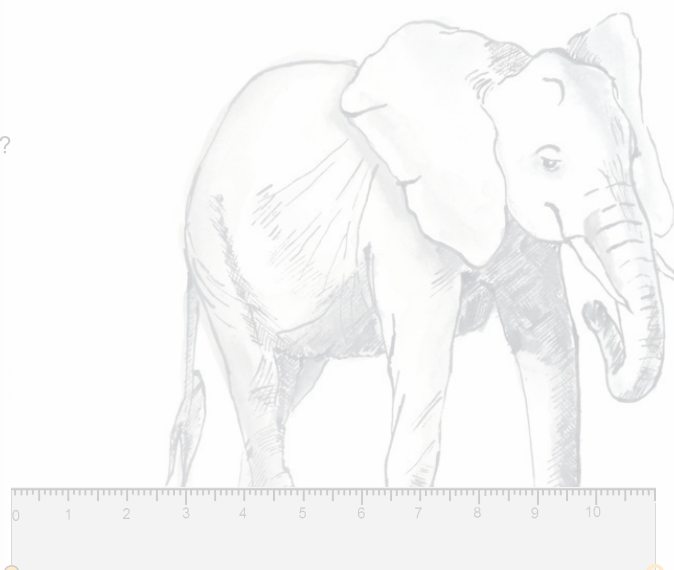
Ćwiczenie 2

Skala

Dorosłego słonia narysowano w pewnej skali.
Wysokość słonia jest równa 3,6 m.
W jakiej skali został narysowany ten słon?

Posłuż się linijką o centymetrowej skali.

skala 1:



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D3vRJo8Bt>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

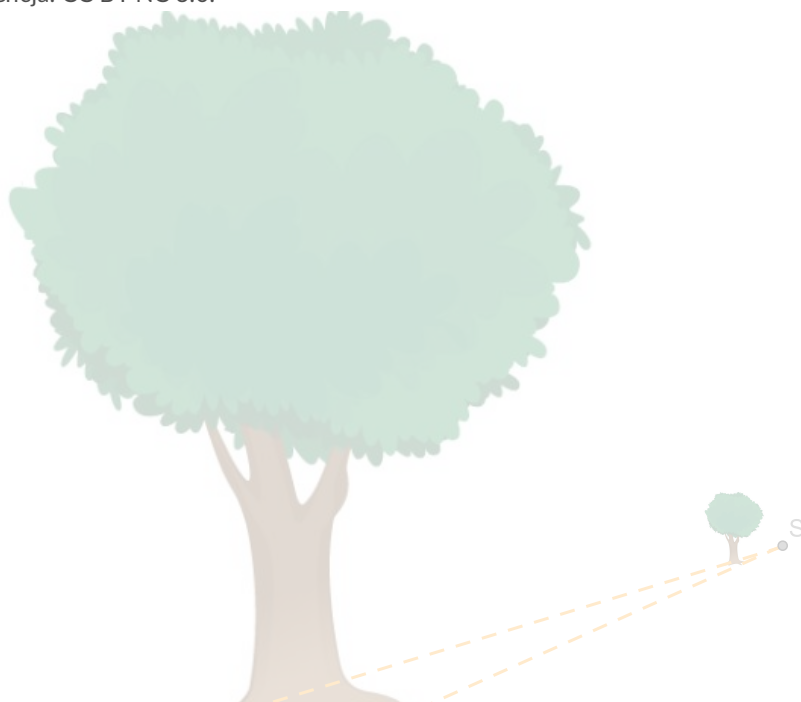
Skala podobieństwa

etap 1 z 4



Podobieństwo figur dostrzegamy na co dzień. Oglądając to samo drzewo z różnych odległości, widzimy ten sam kształt drzewa. Zmienia się tylko jego wielkość. Na dynamicznym rysunku obok widzimy drzewa o takim samym kształcie, przy czym jedno z nich zmniejsza się lub zwiększa w miarę przybliżania lub oddalania od punktu S.

Mówimy, że oba drzewa są podobne.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D3vRJo8Bt>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

100%**75%****54%**

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Pierwszą z fotografii zmniejszono. Wymiary drugiej fotografii stanowią 75% odpowiednich wymiarów pierwszej fotografii.

Wymiary trzeciej fotografii stanowią 54% odpowiednich wymiarów pierwszej fotografii. Zatem druga z fotografii jest obrazem pierwszej w skali 75 : 100, a trzecia jest obrazem pierwszej w skali 54 : 100.

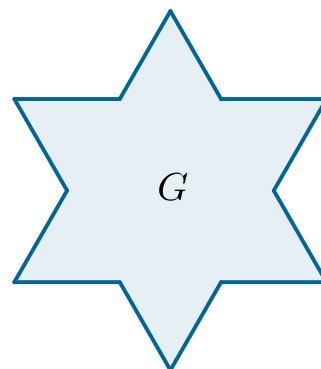
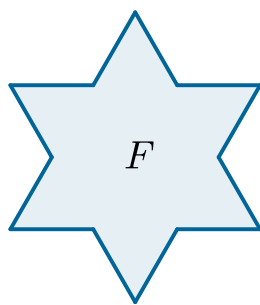
Prostokąty, w kształcie których są fotografie, to figury podobne. Powiemy, że drugi jest podobny do pierwszego w skali $\frac{75}{100}$, a trzeci do pierwszego w skali $\frac{54}{100}$.

Ważne!

Skalą podobieństwa nazywamy liczbę k ($k > 0$), wyrażającą stosunek odpowiadających sobie odcinków w figurach podobnych.

Przykład 1

Figurę F przedstawiono w skali 1,2 : 1, otrzymując figurę G .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Figury F i G to figury podobne. Figura F jest podobna do figury G w skali $k = \frac{10}{12}$. Figura G jest podobna do figury F w skali $s = \frac{12}{10}$.

Ważne!

Niech figury F i G będą podobne w skali k .

Jeśli A , B są punktami figury F , a punkty A_1 , B_1 są odpowiadającymi im punktami figury G , to $|A_1B_1| = k \cdot |AB|$.

Ćwiczenie 3

Określ skalę podobieństwa figur.

Ćwiczenie 3

Na rysunku obok podano miarę wielkości boku każdej z sześciu figur. Twoim zadaniem jest umieścić w okrągłych polach pod figurami prawidłową skalę podobieństwa. Zmień położenie punktów $\blacklozenge$ z wartościami liczbowymi skal podobieństwa do odpowiednich kół pod rysunkami.

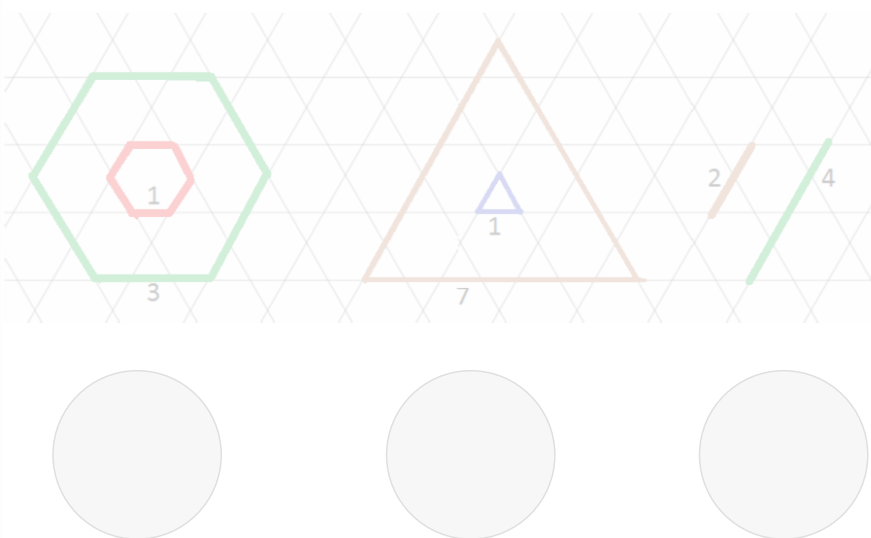
$$\frac{1}{3}$$



$$\frac{1}{7}$$



$$\frac{1}{2}$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D3vRJo8Bt>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 2

Okrąg O_1 jest podobny do okręgu O_2 w skali $k = \frac{3}{4}$. Średnica okręgu O_1 jest równa 15. Oblicz pole koła, którego promień jest równy promieniowi okręgu O_2 .

Oznaczmy

d_1 – średnica okręgu O_1

d_2 – średnica okręgu O_2

Okrąg O_1 jest podobny do okręgu O_2 w skali $k = \frac{3}{4}$. Zapisujemy wynikającą stąd proporcję i wyznaczamy średnicę drugiego z okręgów.

$$\frac{d_1}{d_2} = k$$

$$\frac{15}{d_2} = \frac{3}{4}$$

$$3d_2 = 60$$

$$d_2 = 20$$

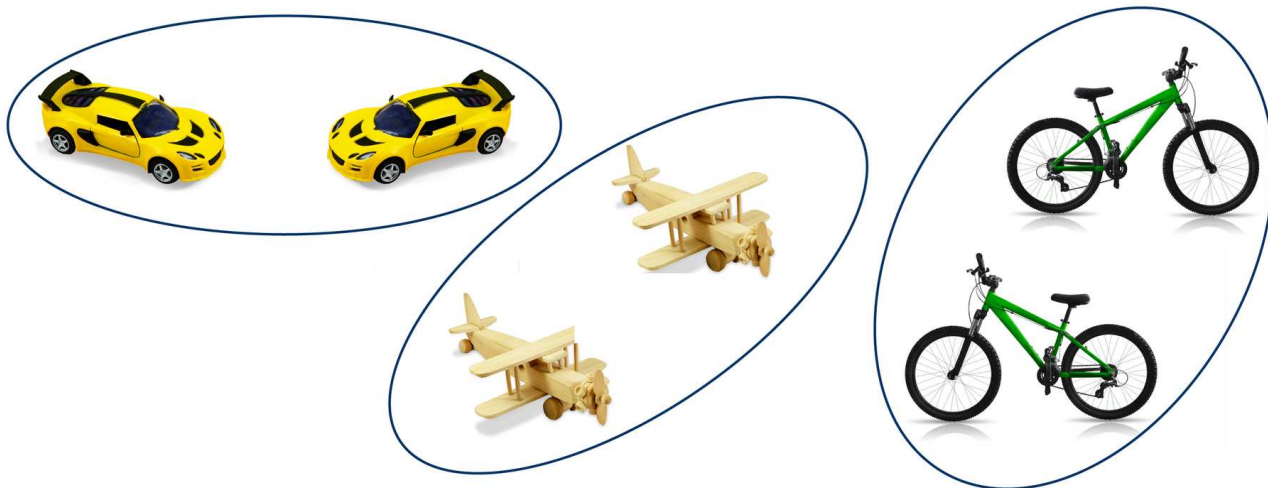
Średnica okręgu O_2 jest równa 20, zatem promień tego okręgu wynosi 10.
Obliczamy pole koła o promieniu 10.

$$P = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$$

Pole koła jest równe 100π .

Ważne!

Każde dwie figury przystające są podobne. Ich skala podobieństwa wynosi 1.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 3

Ogrodzenie zbudowane jest z elementów, z których każdy podobny jest do sąsiedniego w skali 1.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

W skład porcelanowego serwisu do kawy wchodzi 6 filiżanek, podobnych jedna do drugiej w skali 1.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 4

Przykłady figur podobnych

W życiu codziennym często spotykamy się z obiektami, które przypominają figury podobne.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

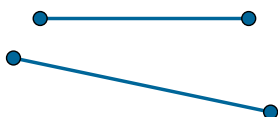
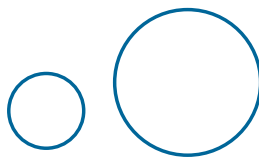
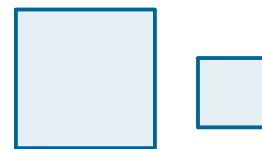
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

E-podręczniki z matematyki

Ważne!

Figury geometryczne podobne to na przykład:

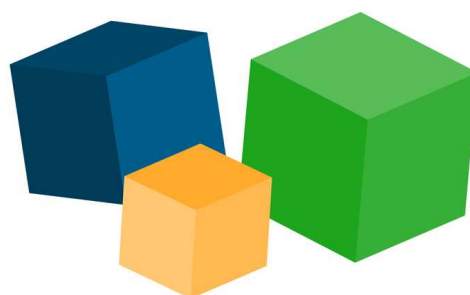
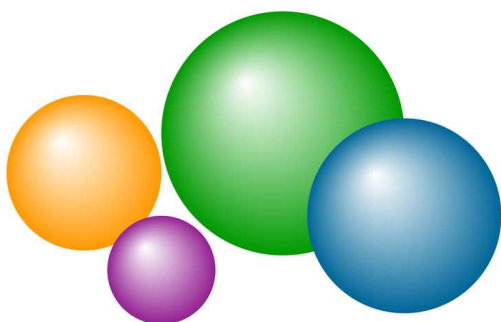
- dwa dowolne odcinki,
- dwa dowolne okręgi,
- dwa dowolne kwadraty.

a)**b)****c)**

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ważne!

Każde dwa odcinki są podobne. Każde dwa okręgi są podobne. Każde dwa kwadraty są podobne.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Każde dwie kule są podobne.

Każde dwa sześciany są podobne.

Przykład 5

Na planie wykonanym w skali 1 : 50 dywan leżący w pokoju Wieśka jest przedstawiony jako kwadrat o przekątnej długości 8 cm. W rzeczywistości dywan leży pośrodku pokoju i jest oddalony od każdej ze ścian o 0,75 m. Oblicz pole powierzchni podłogi pokoju Wieśka.

Kwadrat, w kształcie którego jest dywan leżący w pokoju Wieśka, jest podobny w skali $k = 50$ do kwadratu przedstawiającego go na planie.

Obliczmy rzeczywistą długość d przekątnej dywanu.

$$\frac{d}{8} = 50$$

$$d = 400 \text{ cm} = 4 \text{ m}$$

Korzystamy ze wzoru na długość przekątnej kwadratu i obliczamy długość a boku kwadratu.

$$d = a\sqrt{2}$$

$$4 = a\sqrt{2}$$

$$a = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

Teraz możemy obliczyć długość x boku kwadratu, w kształcie którego jest podłoga.

$$x = 1,5 + 2\sqrt{2}$$

$$x = (1,5 + 2\sqrt{2}) \text{ m}$$

Obliczamy pole P powierzchni podłogi – jako pole kwadratu.

$$P = (1,5 + 2\sqrt{2})(1,5 + 2\sqrt{2})$$

$$P = 2,25 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 8$$

$$P = 10,25 + 6\sqrt{2}$$

$$P \approx 18,74m^2$$

Pole powierzchni podłogi pokoju Wieśka jest równe około $18,74m^2$.

Otrzymywanie figur podobnych

Pokażemy na przykładach, jak można skonstruować figurę podobną do danej.

Przykład 6

Skonstruujemy odcinek CD podobny do danego odcinka AB w skali $k = 3$.

Konstrukcja odcinka w podobieństwie

etap 1 z 5

Dane są punkty A i B.

Kreślimy odcinek AB.



Wybieramy punkt S nie leżący na tym odcinku.

☐ punkt S

A

B

Ćwiczenie 4

Narysuj dowolny czworokąt.

Zaproponuj sposób konstrukcji figury podobnej w skali $k = 0,5$ do tego czworokąta.

Ćwiczenie 5

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- ☐ Każde dwa prostopadłe odcinki są podobne.
- ☐ Prosta jest podobna do odcinka, który jest do niej równoległy.
- ☐ Każde dwa okręgi o równych obwodach są podobne.
- ☐ Każde dwa kąty są podobne.
- ☐ Okrąg o promieniu r jest podobny do koła o promieniu $2r$.

Ćwiczenie 6

Dwa odcinki podobne są w skali $4 : 5$. Krótszy odcinek ma długość 7 cm. Suma długości tych dwóch odcinków jest równa

- ☐ 39 cm
- ☐ 14,75 cm
- ☐ 15,75 cm
- ☐ 9 cm

Ćwiczenie 7

W skali 1 : 2 podobny jest odcinek AB do odcinka CD, gdy

☐ $|AB| = 1, |CD| = \sqrt{2}$

☐ $|AB| = \sqrt{2}, |CD| = \sqrt{32}$

☐ $|AB| = \sqrt{3}, |CD| = \sqrt{6}$

☐ $|AB| = \sqrt{2}, |CD| = \sqrt{8}$

Ćwiczenie 8

Obwód okręgu O_1 jest równy 6π . Promień okręgu O_2 jest równy 4. Okrąg O_1 jest podobny do okręgu O_2 w skali

☐ 3 : 4

☐ 6 : 4

☐ $3\pi : 4$

☐ 3 : 2

Ćwiczenie 9

Koło K o promieniu r jest podobne do koła W o promieniu w .

Uzupełnij tabelkę.

Tabela. Dane

Skala podobieństwa	Długość promienia r	Długość promienia w	Obwód koła K	Obwód koła W	Pole koła K	Pole koła W
5		9				
0,2	10					
			16π	2π		
					π	25π

Podobieństwo - ćwiczenie

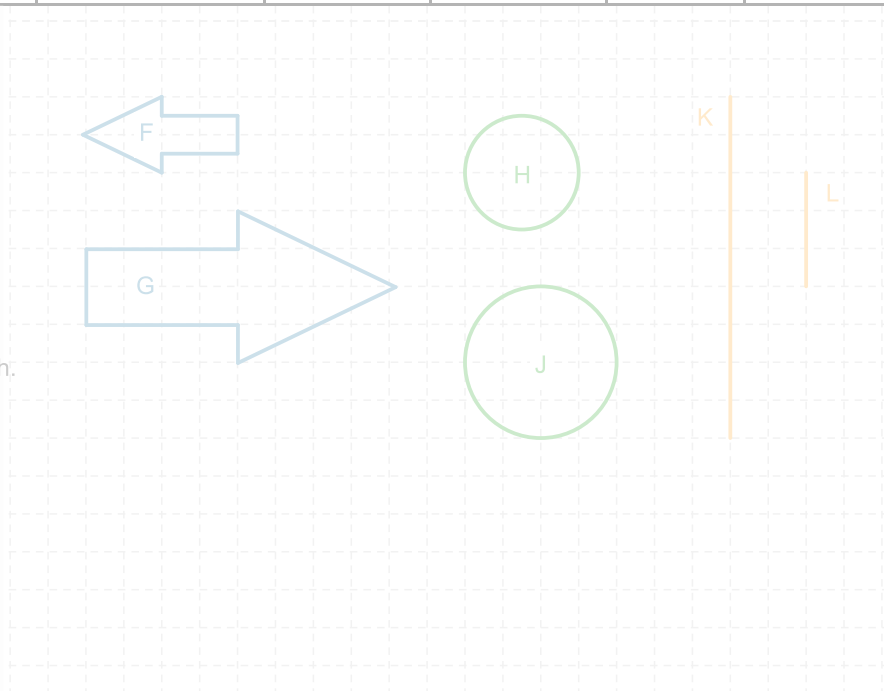
Wykorzystując siatkę, wyznacz skale podobieństwa:

figury F do figury G, $s = ?$

figury H do figury J, $s = ?$

figury K do figury L, $s = ?$

i wpisz je do odpowiednich pól tekstowych.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D3vRJo8Bt>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Ćwiczenie 10

Narysuj dowolny odcinek.

Znajdź konstrukcyjnie odcinek

a. dwa razy dłuższy

b. cztery razy krótszy

c. trzy razy dłuższy

Ćwiczenie 11

Narysuj trzy różne odcinki i oznacz ich długości literami a , b i c . Skonstruuj odcinek takiej długości y , aby spełniona była równość

a. $\frac{a}{b} = \frac{c}{y}$

b. $\frac{y}{a} = \frac{c}{b}$

c. $y = \frac{ab}{c}$

Ćwiczenie 12

Udowodnij, że każda figura osiowosymetryczna składa się z dwóch figur podobnych.

Ćwiczenie 13

Udowodnij, że dwusieczna kąta dzieli ten kąt na dwa kąty podobne.

Ćwiczenie 14

Figura F_1 jest podobna do figury F_2 w skali k . Figura F_2 jest podobna do figury F_3 w skali m . Czy figury F_1 i F_3 są podobne? Jeśli tak to, w jakiej skali? Jeśli nie, podaj przykład.

Ćwiczenie 15

Figura F_1 jest podobna do figury F_2 w skali k . Figura F_2 jest przystająca do figury F_3 . Czy figury F_1 i F_3 są podobne? Jeśli tak, to w jakiej skali? Jeśli nie, podaj przykład.

Ćwiczenie 16

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- ☐ Każde dwa wycinki danego koła są podobne.
- ☐ Figura F' będąca obrazem figury F w symetrii środkowej jest podobna do figury F .
- ☐ Każde dwie figury podobne są przystające.
- ☐ Figura F' będąca obrazem figury F w symetrii osiowej jest podobna do figury F .

Ćwiczenie 17

Zaznacz każde zdanie prawdziwe.

Koło K_2 jest podobne do koła K_1 w skali $k = 3$. Wycinkowi koła K_1 o polu 6π odpowiada kąt środkowy o mierze 60° .

- ☐ Obwód koła K_2 jest równy 36.
- ☐ Pole koła K_2 jest o 288π większe od pola koła K_1 .
- ☐ Promień koła K_1 jest równy 6.

Ćwiczenie 18

Uzupełnij zdania.

Okrąg O_2 jest podobny do okręgu O_1 w skali $\frac{2}{5}$. W okręgu O_1 kąt środkowy o mierze 12° jest oparty na łuku długości 2π .

Długość okręgu O_1 jest równa ..., zatem promień tego okręgu jest równy ...

Ponieważ promień okręgu O_2 jest równy ..., to kąt środkowy w tym okręgu oparty na łuku długości ... ma miarę 45° .

Ćwiczenie 19

Koło K_2 jest podobne do koła K_1 w skali $k = 4$. Promień koła K_1 jest równy 5.

Oblicz pole odcinka kołowego wyznaczonego przez cięciwę łączącą końce dwóch prostopadłych do siebie promieni koła K_2 .

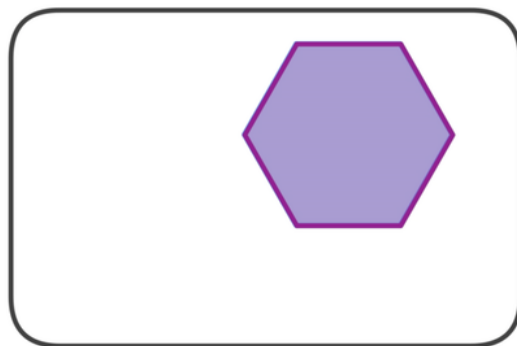
Ćwiczenie 20

Uzupełnij zdania.

- Jeśli figura F_1 jest podobna do figury F_2 w skali k , to F_2 jest podobna do F_1 w skali ...
- Jeśli koło K jest podobne do koła M w skali ..., to promienie tych kół są równe.
- Przekątna dzieli kwadrat na dwa trójkąty podobne w skali ...

Wielokąty podobne

Podobieństwo wielokątów



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

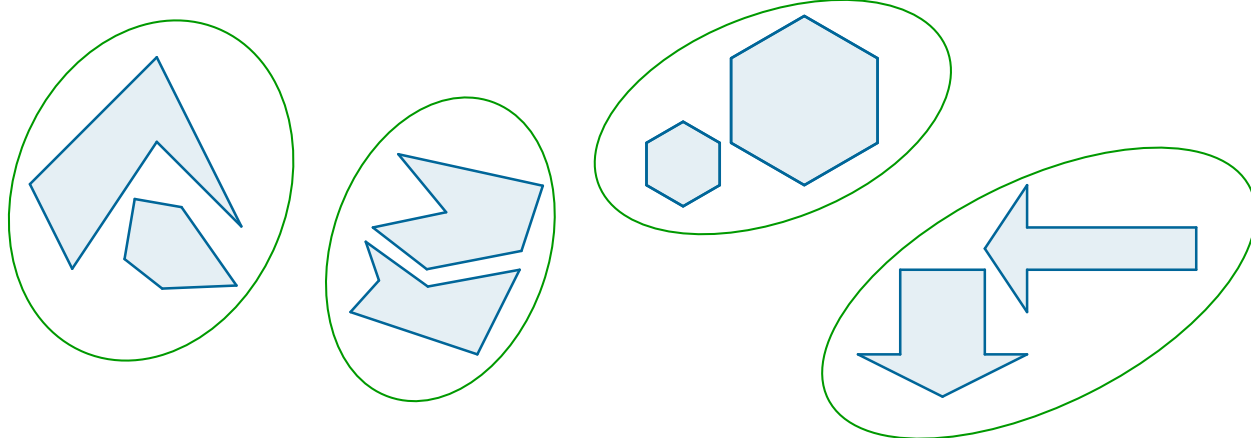
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Przykład 1

Rysunki przedstawiają wielokąty. W każdej parze oba wielokąty mają tę samą liczbę boków.

Określ, które z rysunków nie przedstawiają wielokątów podobnych i dlaczego.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Jeśli dwa wielokąty o tej samej liczbie boków wyraźnie różnią się kształtem, od razu możemy powiedzieć, że nie są podobne. W przeciwnym wypadku, trudno od razu stwierdzić lub wykluczyć ich podobieństwo.

Przykład 2

Zaobserwuj, jakie cechy wspólne mają wielokąty podobne.



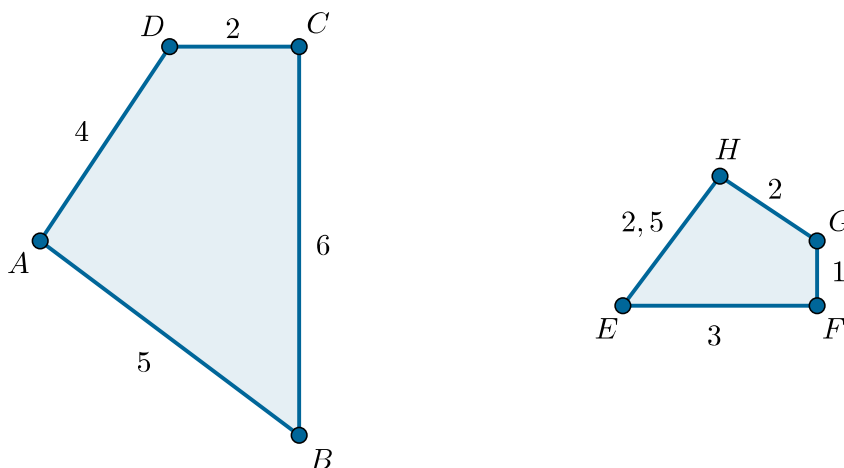
Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DbZE5AxGE>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Odpowiedź: Wielokąty podobne mają odpowiednie kąty równe.

Przykład 3

Czworokąty na rysunku są podobne.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Najdłuższy bok czworokąta ABCD to BC, a najkrótszy to DC. Najdłuższy bok wielokąta AFGH to EF, a najkrótszy to FG.

Obliczmy w obu wielokątach stosunek boku najdłuższego do najkrótszego.

$$\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\frac{|EF|}{|FG|} = \frac{3}{1} = 3$$

Zauważmy, że stosunki te są równe. Obliczmy jeszcze odpowiadające sobie stosunki pozostałych boków.

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{5}{4} = 1,25$$

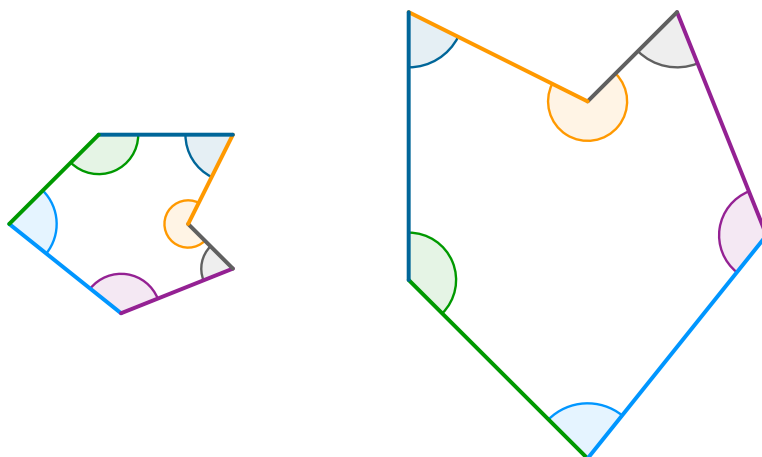
$$\frac{|EH|}{|HG|} = \frac{2,5}{2} = 1,25$$

W każdym przypadku stosunek dwóch boków w jednym wielokącie jest równy stosunkowi odpowiednich boków w drugim wielokącie.

Zauważmy, że wielokąt EFGH jest obrazem wielokąta ABCD w skali 1 : 2, zatem miary odpowiednich kątów tych wielokątów są równe.

Ważne!

W wielokątach podobnych odpowiednie boki są proporcjonalne. Odpowiednie kąty w tych wielokątach są równe.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 4

Trzy kąty czworokąta F są równe: 20° , 80° , 120° . Trzy kąty czworokąta W są równe: 120° , 80° , 130° .

Wykaż, że czworokąty te nie są podobne.

Korzystając z tego, że suma kątów czworokąta jest równa 360° , obliczymy miarę czwartego z kątów w czworokącie F i miarę czwartego kąta w czworokącie W .

$$360^\circ - (20^\circ + 80^\circ + 120^\circ) = 140^\circ$$

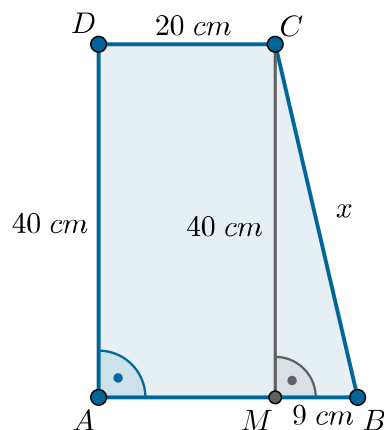
$$360^\circ - (120^\circ + 80^\circ + 130^\circ) = 30^\circ$$

Kąty czworokąta F są więc równe: 20° , 80° , 120° , 140° , a kąty czworokąta W : 120° , 80° , 130° , 30° .

Czworokąty mają dwa kąty o różnych miarach, nie są więc wielokątami podobnymi.

Przykład 5

Trapez prostokątny ABCD jest podobny do trapezu EFGH. Podstawy trapezu ABCD mają długości 20 cm i 29 cm. Wysokość tego trapezu jest równa 40 cm. Wysokość trapezu EFGH jest równa 25 cm. Oblicz obwód trapezu EFGH.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Aby obliczyć obwód trapezu EFGH, trzeba znać długości jego wszystkich boków. Obliczmy najpierw długość x ramienia CB trapezu ABCD. Niech CM będzie wysokością trapezu ABCD poprowadzoną z wierzchołka M . Trójkąt CMB jest prostokątny, możemy więc skorzystać z twierdzenia Pitagorasa.

$$x^2 = 40^2 + 9^2$$

$$x^2 = 1681$$

$$x = \sqrt{1681} = 41$$

bo

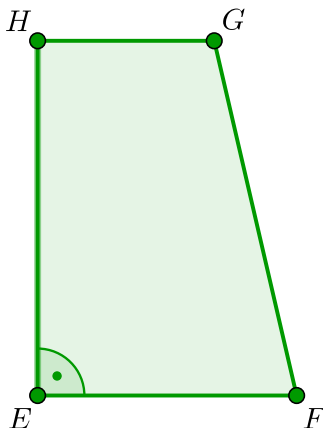
$$x > 0$$

Wysokość trapezu ABCD jest równa 40 cm, a trapezu EFGH jest równa 25 cm. Zatem trapez EFGH jest podobny do trapezu ABCD w skali

$$k = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$$

Niech EF, FG, GH, HE będą bokami trapezu EFGH odpowiadającymi odpowiednio bokom AB, BC, CD, DA trapezu ABCD.

Obliczamy długości boków trapezu EFGH.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

$$|EF| = k \cdot 29$$

$$|EF| = \frac{5}{8} \cdot 29 = 18,125$$

$$|FG| = k \cdot 41$$

$$|FG| = \frac{5}{8} \cdot 41 = 25,625$$

$$|GH| = k \cdot 20$$

$$|GH| = \frac{5}{8} \cdot 20 = 12,5$$

$$|HE| = k \cdot 40$$

$$|HE| = \frac{5}{8} \cdot 40 = 25$$

Obliczamy obwód trapezu.

$$L = 18,125 + 25,625 + 12,5 + 25 = 81,25$$

Obwód trapezu jest równy 81,25 cm.

Przykład 6

Miary kątów czworokąta W są równe miarom kątów wielokąta K . Boki wielokąta W mają długości

5 cm, 15 cm, 6 cm i 10 cm. Boki wielokąta K mają długości 19 cm, 14 cm, 6 cm, 5 cm.

Podobieństwo czworokątów sprawdzimy dwoma sposobami.

- sposób *I*

Sprawdzimy, czy stosunki długości boków w czworokącie W są równe stosunkom odpowiadających im długości boków w wielokącie K .

Zapiszmy długości boków obu wielokątów w kolejności rosnącej, uzyskamy w ten sposób w kolumnach pary odpowiadających sobie boków.

Tabela. Dane

Wielokąt W	5 cm	6 cm	10cm	15 cm
Wielokąt K	5 cm	6 cm	14 cm	19cm

Badamy równość odpowiednich stosunków.

$$\frac{6}{5} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{15}{10} \neq \frac{19}{14}$$

$$\frac{10}{6} \neq \frac{14}{6}$$

Nie wszystkie z zapisanych stosunków są równe, zatem choć miary ich kątów są równe, wielokąty nie są podobne.

- sposób II

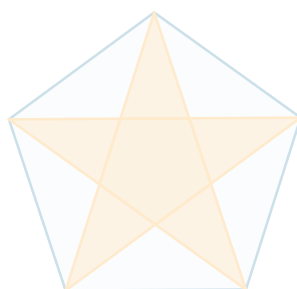
Sprawdzamy, czy boki obu czworokątów są proporcjonalne.

$$\frac{5}{5} = \frac{6}{6} \neq \frac{10}{14} \neq \frac{15}{19}$$

Boki nie są proporcjonalne – czworokąty nie są podobne.

Podobieństwo wielokątów foremnych

Rysując przekątne pięciokąta foremnego, otrzymujemy wielokąt gwiaździsty, zwany pentagramem. Pentagram uważany był przez pitagorejczyków za symbol doskonałości.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DbZE5AxGE>

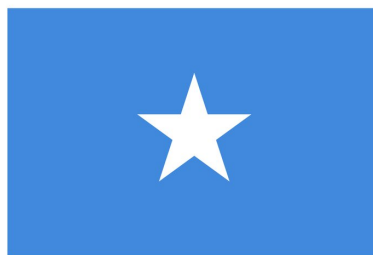
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Ciekawostka

Z pentagramu można otrzymać gwiazdę pięcioramienną, która występuje na flagach wielu państw.



➡ **Flaga Maroka**



➡ **Flaga Somalii**



➡ **Flaga Chińskiej
Republiki Ludowej**



➡ **Flaga Wietnamu**

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zastanówmy się, czy pięciokąt, w który jest wpisany pentagram, i pięciokąt, na którym zbudowane są ramiona pentagramu, to wielokąty podobne.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DbZE5AxGE>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

W każdym z tych pięciokątów miara kąta wewnętrznego wynosi 108° .

Pięciokąty te mają więc równe kąty.

Ponieważ wszystkie boki pięciokąta foremnego są równe, zatem boki większego z pięciokątów i mniejszego są proporcjonalne.

Stwierdzamy zatem, że wielokąty te są podobne.

Zauważmy, że w podobny sposób można uzasadnić podobieństwo wielokątów foremnych o tej samej liczbie boków.

Ważne!

Każde dwa wielokąty foremne o tej samej liczbie boków są podobne.

Przykład 7

Obwód sześciokąta foremnego G jest równy 120 mm. Sześciokąt K jest podobny do sześciokąta G w skali 1 : 5. Oblicz długość dłuższej przekątnej sześciokąta K .

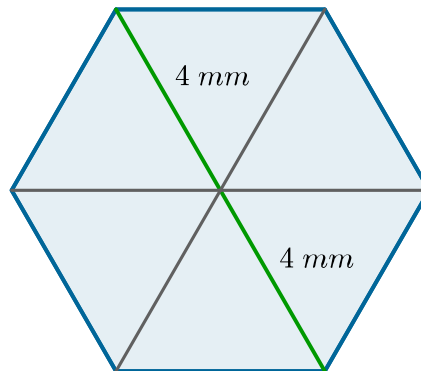
W sześciokącie G wszystkie boki są równe. Zatem długość jednego boku wynosi

$$120 \text{ mm} : 6 = 20 \text{ mm}$$

Sześciokąt K jest podobny do sześciokąta foremnego, jest więc również sześciokątem foremnym.

Długość jego boku wynosi

$$20 \text{ mm} : 5 = 4 \text{ mm}$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Dłuższe przekątne sześciokąta foremnego przecinając się, tworzą trójkąty równoboczne. Przekątna zatem jest dwa razy dłuższa od boku sześciokąta.

$$2 \cdot 4 \text{ mm} = 8 \text{ mm}$$

Dłuższa przekątna sześciokąta K ma długość 8 mm.

Podobieństwo prostokątów

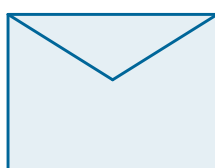
Wiemy już, że dwa wielokąty są podobne, gdy mają równe kąty i odpowiednie ich boki są proporcjonalne.

W prostokącie każdy kąt ma miarę 90° , więc dla każdych dwóch prostokątów zawsze jest spełniony pierwszy z warunków podobieństwa.

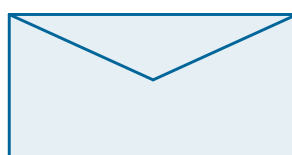
Zatem do stwierdzenia podobieństwa prostokątów wystarczy zbadać proporcjonalności ich odpowiednich boków.

Przykład 8

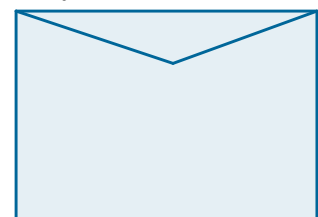
Sprawdźmy, czy koperty o standardowych rozmiarach 114 mm na 152 mm, 110 mm na 220 mm i 162 mm na 229 mm są w kształcie prostokątów podobnych.



C6 114x152



DL 110x220



C5 162x229

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- sposób I

Badamy, czy boki odpowiednich prostokątów są proporcjonalne.

C6 i DL: $\frac{114}{110} = 1,03636\dots$, $\frac{152}{220} = 0,69090\dots$, $\frac{114}{110} \neq \frac{152}{220}$ - prostokąty nie są podobne

C6 i C5: $\frac{114}{162} = 0,7037\dots \approx 0,7$, $\frac{162}{229} = 0,7074\dots \approx 0,7$, $\frac{114}{162} \approx \frac{162}{229}$ - można przyjąć, że prostokąty są podobne

DL i C5: $\frac{110}{162} = 0,6790\dots$, $\frac{220}{229} = 0,9606\dots$, $\frac{110}{162} \neq \frac{220}{229}$ - prostokąty nie są podobne

- sposób II

Obliczymy w każdym z prostokątów, odpowiadających kopertom, stosunek szerokości do długości.

$$C6 : \frac{114}{162} = 0,7037\dots \approx 0,7$$

$$DL : \frac{110}{220} = 0,5$$

$$C5 : \frac{162}{229} = 0,7074\dots \approx 0,7$$

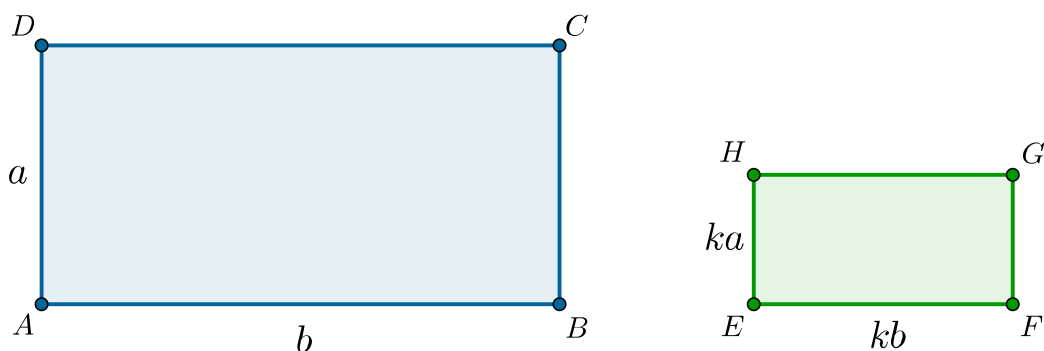
Na podstawie przeprowadzonych obliczeń możemy przyjąć, że jedynie koperty o symbolach C6 i C5 są w kształcie prostokątów podobnych.

Przykład 9

Wykaż, że jeżeli dwa prostokąty są podobne w skali k , to stosunek ich obwodów jest równy k .

Rozważmy prostokąt ABCD o bokach długości a i b oraz prostokąt EFGH podobny do niego w skali k .

Wówczas prostokąt EFGH ma boki długości ka i kb .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Obliczamy obwody prostokątów.

$$L_{ABCD} = 2(a + b)$$

$$L_{EFGH} = 2(ka + kb) = 2k(a + b)$$

Obliczamy stosunek obwodów prostokątów EFGH i ABCD.

$$\frac{L_{EFGH}}{L_{ABCD}} = \frac{2k(a+b)}{2(a+b)} = k$$

Stosunek obwodów prostokątów jest równy skali podobieństwa k , co należało wykazać.

Ciekawostka

Narysujmy prostokąt o bokach a , b . Do dłuższego boku dobudujmy kwadrat.

 Rysunek prostokąta o bokach a i b . Obok prostokąta o bokach a i b z dobudowanym do dłuższego boku kwadratem o boku b . Powstał prostokąt o bokach $a + b$, b .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Powstał w ten sposób prostokąt o bokach $a + b$, b .

Jeżeli dla boków tego prostokąta spełniony jest warunek

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}$$

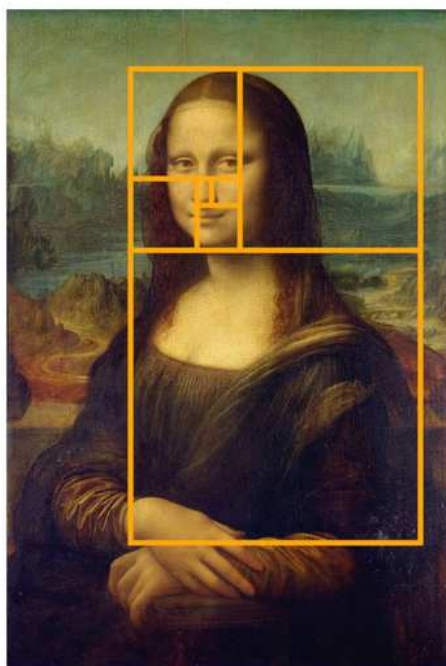
to taki prostokąt nazywamy **złotym prostokątem**.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DbZE5AxGE>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Złoty prostokąt wykorzystywany był często w architekturze antycznej, romańskiej oraz sztuce renesansu i klasycyzmu.



Ćwiczenie 1

Pięciokąt W o bokach długości 2, 6, 10, 16, 20 jest podobny do wielokąta F w skali $k = \frac{2}{3}$. Uzupełnij zdania.

- a. Najdłuższy bok wielokąta F jest dłuższy od boku najkrótszego o ... cm.
- b. Wielokąt F ma ... boków.
- c. Wielokąt ... ma obwód większy od obwodu wielokąta ...
- d. Obwód wielokąta F jest równy ... cm.

Ćwiczenie 2

Czworokąty Z i W są podobne. Trzy kąty czworokąta Z są równe 50° , 110° , 160° . Kąty czworokąta W są zatem równe

☐ $40^\circ, 50^\circ, 110^\circ, 160^\circ$

☐ $30^\circ, 50^\circ, 110^\circ, 160^\circ$

☐ $50^\circ, 80^\circ, 110^\circ, 160^\circ$

☐ $40^\circ, 50^\circ, 110^\circ, 120^\circ$

Ćwiczenie 3

W trapezie równoramiennym $ABCD$ podstawy mają długości 10 dm i 20 dm. Obwód trapezu jest równy 56 dm. Trapez $ABCD$ zmniejszono, otrzymując trapez $EFGH$ o wysokości 10 dm. Jaka jest skala podobieństwa trapezu $EFGH$ do trapezu $ABCD$?

Ćwiczenie 4

Określ współrzędne wierzchołków wielokąta podobnego w skali 1 do wielokąta ABCD, gdy

$$A = (0,0)$$

$$B = (-3,2)$$

$$C = (5,6)$$

$$D = (8,0)$$

Ćwiczenie 5

Przekątne rombu E są równe 30 i 16. Romb M jest podobny do rombu E w skali 1 : 34.

Obwód rombu M jest równy

☐ 2

☐ 8

☐ 4

☐ 68

Ćwiczenie 6

Kąt wielokąta foremnego Z ma miarę 135° . Obwód wielokąta jest równy 20. Długość boku wielokąta podobnego w skali 3 do wielokąta Z jest równa

☐ 15

☐ 12

☐ 7,5

☐ 5,5

Ćwiczenie 7

Do stwierdzenia podobieństwa prostokątów wystarcza równość ich

- ☐ obwodów
- ☐ stosunków prostopadłych boków
- ☐ kątów
- ☐ przekątnych

Ćwiczenie 8

Prostokąty podobne to prostokąty o wymiarach

- ☐ 10 cm na 6 cm i 12 cm na 22 cm
- ☐ 5 cm na 10 cm i 6 cm na 8 cm
- ☐ 4 cm na 10 cm i 6 cm na 4 cm
- ☐ 5 cm na 20 cm i 6 cm i 1,5 cm

Ćwiczenie 9

Prostokąt A jest podobny do prostokąta B w skali 1 : 4. Długość dłuższego boku A jest równa 7. Oblicz długość dłuższego boku prostokąta B .

Ćwiczenie 10

Prostokąty M i G są podobne. Obwód prostokąta M jest równy 27 cm. Długość prostokąta G jest równa 5 cm, a szerokość 4 cm. Oblicz skalę podobieństwa prostokąta M do prostokąta G .

Ćwiczenie 11

Prostokątną fotografię o wymiarach 12 cm na 18 cm powiększono tak, że jej szerokość jest równa 21 cm. W jakiej skali powiększono fotografię?

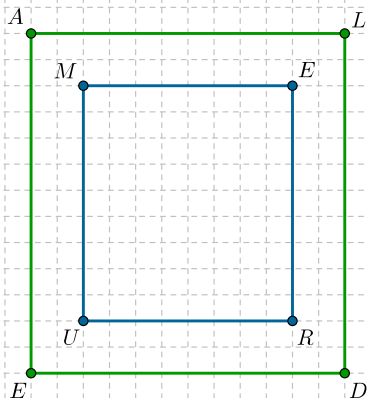
Ćwiczenie 12

W prostokącie F przekątne przecinają się pod kątem ostrym o mierze 40° . Prostokąt E jest podobny do prostokąta F . Jaki kąt tworzy przekątna prostokąta E z dłuższym bokiem?

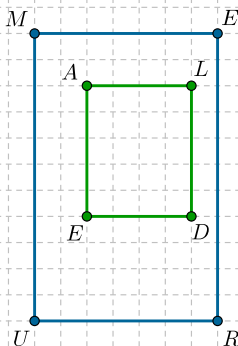
Ćwiczenie 13

Wskaż pary prostokątów podobnych.

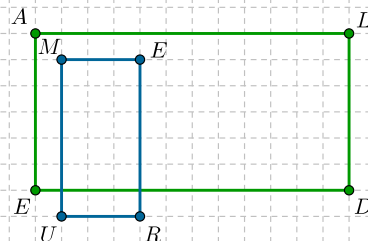
a)



b)



c)



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

☐ C

☐ B

☐ A

Ćwiczenie 14

Wykaż, że podobne są prostokąty, w których

- a. Kąty, pod jakimi przecinają się ich przekątne, mają równe miary
- b. odpowiadające sobie kąty pomiędzy przekątnymi a bokami mają równe miary.

Ćwiczenie 15

Długości boków prostokąta ABCD są równe a i b .

Oblicz obwód prostokąta EFGH podobnego do prostokąta ABCD w skali k , gdy

a. $k = \frac{2}{5}, a = 2, b = 10$

b. $k = 2, a : b = 3, a = 5$

c. $k = 1\frac{1}{2}, a + b = 8$

Ćwiczenie 16

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

Prostokąty K i M są podobne w skali 0,2.

☐ Szerokość prostokąta K jest równa $2\frac{3}{4}$, a szerokość prostokąta M wynosi 13,75.

☐ Jeśli różnica długości boków prostokąta K jest równa 16, to różnica długości boków prostokąta M jest równa 3,2.

☐ Jeśli obwód prostokąta M jest równy 0,5, to obwód prostokąta K jest równy 0,1.

Ćwiczenie 17

Sprawdź, czy romby o przekątnych długości 9 dm i 4 dm oraz 5 dm i 11,25 dm są podobne.

Ćwiczenie 18

Prostokąt ABCD ma boki o długościach 1 dm oraz 2 dm.

Oblicz wymiary prostokąta A'B'C'D' podobnego do prostokąta ABCD w skali 5.

Ćwiczenie 19

Prostokąt ABCD ma boki o długościach 1 dm oraz 2 cm.

Jaki obwód ma prostokąt podobny do prostokąta ABCD w skali $\frac{7}{4}$?

Ćwiczenie 20

W jakiej skali kwadrat o boku długości 10,5 cm jest podobny do kwadratu o boku długości 13,5 cm?

Ćwiczenie 21

Prostokąty ABCD i A'B'C'D' są podobne. Prostokąt ABCD ma jeden bok długości 5 cm i przekątną długości 13 cm. Dłuższy bok prostokąta A'B'C'D' ma długość 24 cm. Oblicz obwód prostokąta A'B'C'D'.

Ćwiczenie 22

Narysuj czworokąt A'B'C'D' podobny w skali $k = 2$ do czworokąta ABCD o wierzchołkach: $A = (0,0)$, $B = (-3,2)$, $C = (5,6)$, $D = (8,0)$.

Ćwiczenie 23

Narysuj czworokąt ABCD o wierzchołkach:

$A = (0,0)$, $B = (-3,2)$, $C = (5,6)$, $D = (8,0)$ oraz czworokąt A'B'C'D' o wierzchołkach: $A = (1,1)$, $B = (-2,3)$, $C = (6,7)$, $D = (9,1)$. Sprawdź, czy są one podobne.

Ćwiczenie 24

W prostokącie ABCD symetralna jednego z jego boków dzieli go na dwa prostokąty podobne do ABCD. Jaki jest stosunek długości dłuższego boku prostokąta ABCD do jego krótszego boku?

Ćwiczenie 25

Pewien prostokąt ma tę własność, że można go rozciąć na cztery jednakowe prostokąty podobne do niego. W jakiej skali prostokąt ten jest podobny do każdego z mniejszych prostokątów? Jaki jest stosunek długości dłuższego boku do krótszego w każdym z tych prostokątów?

Ćwiczenie 26

Pewien prostokąt ma tę własność, że można go rozciąć na n ($n > 2$) jednakowych prostokątów podobnych do niego. W jakiej skali prostokąt ten jest podobny do każdego z mniejszych prostokątów? Jaki jest stosunek długości dłuższego boku do krótszego w każdym z tych prostokątów?

Ćwiczenie 27

Półokrąg P' jest podobny do półokręgu P w skali 2. W półokrąg P wpisano trapez $ABCD$ o podstawach $|AB| = 10$, $|CD| = 6$. Podstawa AB jest średnicą półokręgu P . W półokrąg P' wpisano trapez o podstawach $A'B'$ i $C'D'$. Podstawa $A'B'$ jest średnicą półokręgu P' , a trapez $A'B'C'D'$ jest podobny do trapezu $ABCD$ w skali 2. Oblicz pole trapezu $A'B'C'D'$.

Trójkąty prostokątne podobne

Podobieństwo trójkątów prostokątnych

Tales w swoich obliczeniach wykorzystał własności trójkątów prostokątnych podobnych. Zauważmy, że jeżeli jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego ma miarę równą jednemu z kątów ostrych drugiego trójkąta prostokątnego, to miary wszystkich kątów w tych trójkątach są równe.

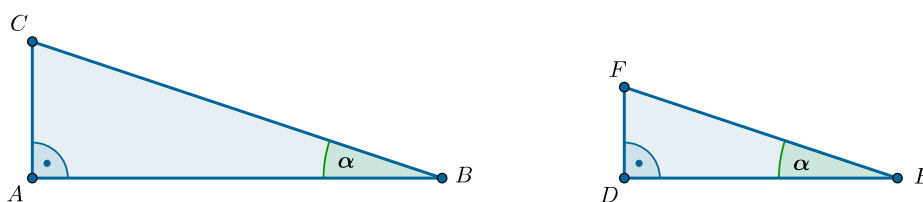
Można też wykazać, że jeżeli miary wszystkich kątów w dwóch trójkątach prostokątnych są równe, to odpowiednie boki tych trójkątów są proporcjonalne.

Zatem, aby określić podobieństwo trójkątów prostokątnych, wystarczy stwierdzić, że trójkąty te mają równy jeden z kątów ostrych bądź stosunek dwóch ich odpowiednich boków jest równy (z twierdzenia Pitagorasa wynika, że znając długości dwóch boków trójkąta prostokątnego, można obliczyć długość trzeciego boku).

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1guiH66W>

Animacja pokazuje trzy różnych wymiarów zdjęcia żagłówki, na których narysowano trójkąty prostokątne o kątach 90 stopni i alfa. W pierwszym trójkącie brakujący kąt beta równy 90 stopni minus alfa. W drugim trójkącie kąt beta prim równy 90 stopni minus alfa równy beta. W trzecim trójkącie kąt beta bis równy 90 stopni minus alfa równy beta, więc trójkąty są podobne.

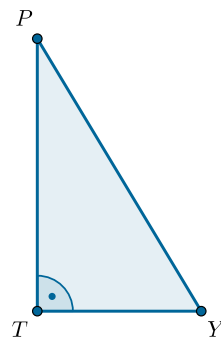
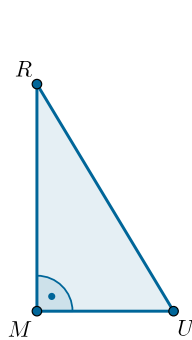
Ważne!



$$ABC \sim DEF$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Dwa trójkąty prostokątne są podobne, gdy stosunek dwóch ich odpowiednich boków jest równy.



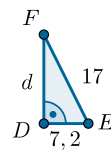
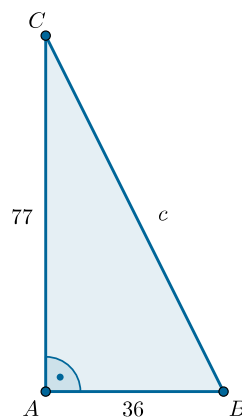
$$\frac{|MR|}{|MU|} = \frac{|TP|}{|TY|}$$

$$MUR \sim TYP$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 1

Przyprostokątne trójkąta prostokątnego ABC są równe 36 i 77. Przeciwprostokątna w trójkącie EFG jest równa 17, a jedna z przyprostokątnych 7,2. Sprawdź, czy trójkąty te są podobne.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Obliczymy długość przyprostokątnej FD trójkąta DEF, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

$$d^2 + (7,2)^2 = 17^2$$

$$d^2 = 289 - 51,84$$

$$d^2 = 237,16$$

$$d = 15,4$$

bo

$$d > 0$$

Znajdujemy stosunek dłuższych przyprostokątnych trójkątów ABC i DEF, a następnie krótszych.

$$\frac{77}{15,4} = 5$$

$$\frac{36}{7,2} = 5$$

Znalezione stosunki są równe, zatem trójkąty są podobne. Skala podobieństwa jest równa 5.

Przykład 2

W trójkącie prostokątnym EWA podobnym do trójkąta BUT kąty pozostają w stosunku $1 : 2 : 3$.

Przeciwprostokątna trójkąta BUT ma długość 6 cm. Oblicz pole trójkąta BUT.

Obliczamy miary kątów ostrych trójkąta EWA.

$$x + 2x + 3x = 180^\circ$$

gdzie

$$x > 0$$

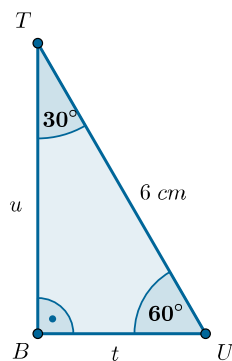
$$6x = 180^\circ$$

$$x = 30^\circ$$

$$2x = 60^\circ$$

Kąty ostre trójkąta EWA mają miary 30° i 60° .

Z podobieństwa trójkątów wynika, że miary kątów trójkąta BUT są równe miarom kątów trójkąta EWA.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oznaczmy u, t – długości przyprostokątnych trójkąta BUT. Z własności trójkąta prostokątnego o kątach 30° i 60° wynika, że $t = 3$ cm, $u = 3\sqrt{3}$ cm.

Możemy więc obliczyć pole trójkąta BUT.

$$P = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3} = 4,5\sqrt{3}$$

Pole trójkąta BUT jest równe $4,5\sqrt{3} \text{ cm}^2$

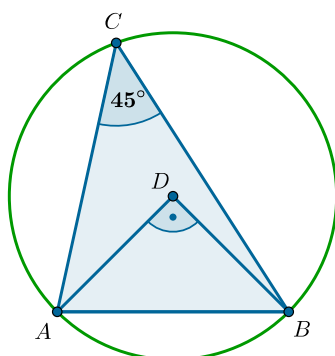
Zastosowanie podobieństwa trójkątów prostokątnych

Przykład 3

Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku w punkcie D . Kąt ACB ma miarę 45° .

Trójkąt EFG jest podobny do trójkąta ABD w skali 5 : 1. Najdłuższy bok trójkąta EFG ma długość 80. Oblicz długość okręgu o środku w punkcie D i promieniu DA.

Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg, zatem punkty A , B , C leżą na okręgu.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Kąt ADB jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku co kąt ACB. Ma zatem miarę dwa razy od niego większą.

$$|\angle ADB| = 2 \cdot |\angle ACB|$$

$$|\angle ADB| = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$$

Kąt ADB jest prosty, więc trójkąt ADB jest prostokątny.

Ponieważ $|AD| = |BD|$, zatem trójkąt ADB jest równoramienny.

Trójkąt EFG jest podobny do trójkąta ADB, jest więc też trójkątem prostokątnym równoramiennym. Najdłuższy jego bok to przeciwprostokątna. Z podobieństwa trójkątów wynika, że przeciwprostokątna trójkąta ADB jest pięciokrotnie krótsza od przeciwprostokątnej trójkąta EFG.

$$|AB| = 80 : 5 = 16$$

Odcinek DA to przyprostokątna trójkąta ABD. Obliczamy długość tego odcinka.

$$|AB| = |DA| \cdot \sqrt{2}$$

$$|DA| = \frac{16}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}$$

Obliczamy długość okręgu.

$$L = 2 \cdot \pi \cdot 8\sqrt{2} = 16\pi\sqrt{2}$$

Długość okręgu o środku w punkcie D i promieniu DA jest równa $16\pi\sqrt{2}$.

Przykład 4

Na placu Świątecznym stoi choinka, która rzuca cień długości 10 m. W tym samym czasie stojący pod drzewem Mikołaj o wzroście 180 cm rzuca cień długości 1,2 m. Oblicz wysokość choinki.

Oznaczamy przez x wysokość choinki.

Zapisujemy wzrost Mikołaja w metrach.

$$180 \text{ cm} = 1,8 \text{ m}$$

Korzystając z podobieństwa trójkątów prostokątnych ACE i BCD, zapisujemy odpowiednią proporcję, z której wyznaczamy x .

$$\frac{x}{1,8} = \frac{10}{1,2}$$

$$1,2x = 18$$

$$x = 15$$

Wysokość choinki jest równa 15 m.

Przykład 5

Aby określić przybliżoną odległość statku od brzegu, można wykorzystać sposób podany przez Talesa.

Na brzegu należy wbić cztery patyki. Pierwszy w punkcie A – leżącym najbliżej statku.

Drugi w punkcie B , znajdującym się w określonej odległości od punktu A (np.

w odległości 60 kroków). Trzeci w punkcie C , znajdującym się w określonej odległości od

B (np. 30 kroków) i leżącym na prostej AB . Teraz należy znaleźć taki punkt D , leżący na

prostej prostopadłej do prostej AC , że patyki wbite w punkcie B oraz D i statek S

znajdują się na jednej linii.

Załóżmy, że odległość z punktu C do punktu D wynosi 90 kroków. Trójkąty ASB i BCD

są trójkątami prostokątnymi podobnymi – miary ich kątów są równe. Zapisujemy

wynikającą stąd proporcję i wyznaczamy długość odcinka AS, czyli odległość statku od brzegu.

$$\frac{|AB|}{|AS|} = \frac{|BC|}{|CD|}$$

$$\frac{60}{|AS|} = \frac{30}{90}$$

$$30|AS| = 60 \cdot 90$$

$$|AS| = 180$$

Przyjmując, że długość kroku człowieka wynosi około $0,7\text{ m}$, stwierdzamy, że odległość statku od brzegu wynosi około $0,7\text{ m} \cdot 180 \approx 126\text{ m}$.

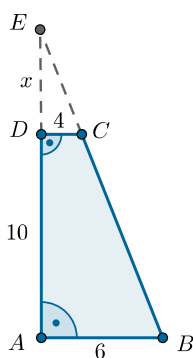
Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1guiH66W>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

E-podręczniki z matematyki

Przykład 6

W trapezie prostokątnym ABCD, w którym kąt ADC jest prosty, przedłużono ramiona do przecięcia w punkcie E. Podstawy trapezu ABCD mają długości 4 i 6. Wysokość trapezu jest równa 10. Oblicz długość odcinka BE.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Trójkąt CDE otrzymany po przedłużeniu ramion AD i BC trapezu, jest trójkątem prostokątnym. Odcinki AB i CD są równoległe, zatem kąty trójkąta CDE są równe kątom trójkąta prostokątnego AEB. Trójkąty te są podobne, zatem stosunki ich odpowiednich boków są równe.

Korzystając z tego, obliczymy długość x boku ED trójkąta CDE.

$$\frac{|ED|}{|DC|} = \frac{|EA|}{|AB|}$$

$$\frac{x}{4} = \frac{x+10}{6}$$

$$6x = 4x + 40$$

$$2x = 40$$

$$x = 20$$

Trójkąt AEB jest trójkątem prostokątnym o przyprostokątnych długości $x + 10$ i 6, czyli 30 i 6.

Odcinek BE jest przeciwprostokątną tego trójkąta. Jego długość obliczamy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

$$|BE|^2 = 30^2 + 6^2$$

$$|BE|^2 = 936$$

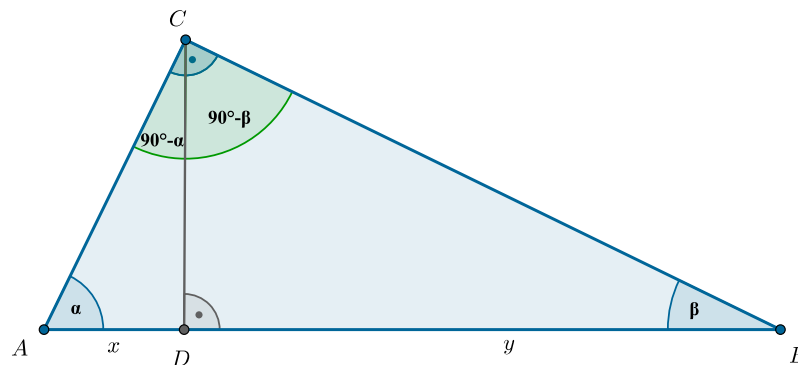
$$|BE| = \sqrt{936} = 6\sqrt{26}$$

Długość odcinka BE jest równa $6\sqrt{26}$.

Przykład 7

W trójkącie prostokątnym ABC poprowadzono wysokość CD z wierzchołka kąta prostego. Punkt D podzielił przeciwprostokątną AB na odcinki $|AD| = x$ i $|DB| = y$. Wykaż, że $|CD|^2 = xy$.

Oznaczmy: α, β - miary kątów ostrych w trójkącie ABC.

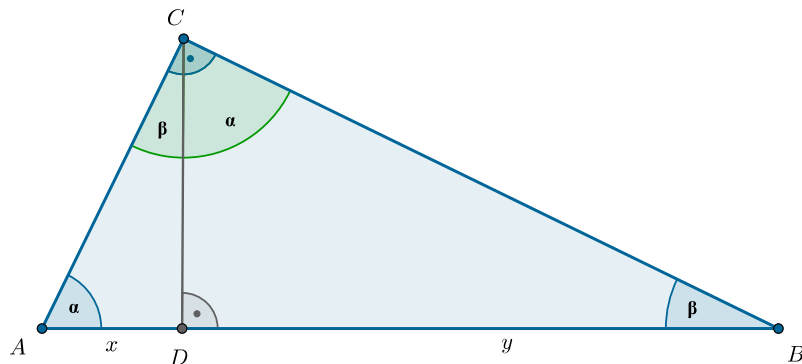


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Odcinek CD dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty prostokątne ADC i CDB.

Kąty ostre w trójkącie ADC mają miary α i $90^\circ - \alpha$. Kąty ostre w trójkącie CDB mają miary β i $90^\circ - \beta$.

Ponieważ $\alpha + \beta = 90^\circ$, więc $\beta = 90^\circ - \alpha$ i $\alpha = 90^\circ - \beta$. Zatem trójkąty ADC i CDB mają równe kąty, są więc podobne.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zapisujemy wynikającą stąd proporcję i wyznaczamy $|CD|^2$.

$$\frac{|CD|}{|AD|} = \frac{|DB|}{|CD|}$$

$$\frac{|CD|}{x} = \frac{y}{|CD|}$$

$$|CD|^2 = xy$$

Ćwiczenie 1

Trójkąty prostokątne T i M są podobne. Jeden z kątów trójkąta T ma miarę 35° . Wynika z tego, że różnica miar kątów ostrych trójkąta M jest równa

☐ 20°

☐ 55°

☐ 15°

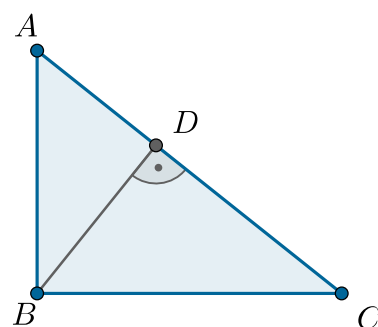
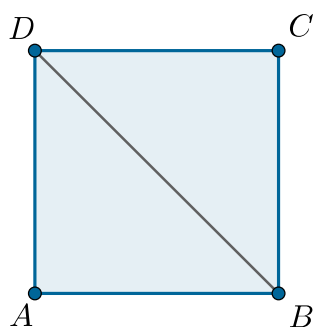
☐ 10°

Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy romby o przekątnych długości 9 dm i 4 dm oraz 5 dm i 11,25 dm są podobne.

Ćwiczenie 3

Wykaż, że trójkąty ABD i BCD są podobne.

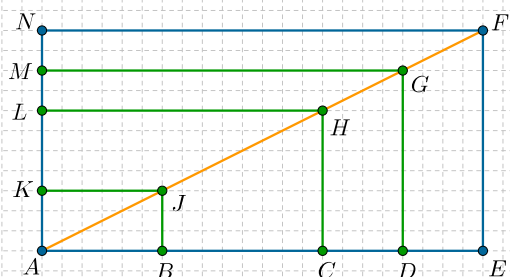


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

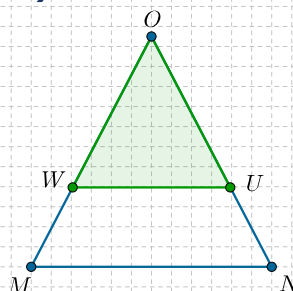
Ćwiczenie 4

Wskaż parę wielokątów podobnych. Uzasadnij, że są one podobne.

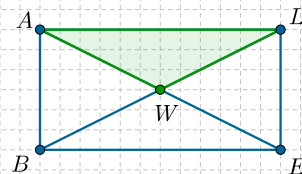
a)



b)



c)

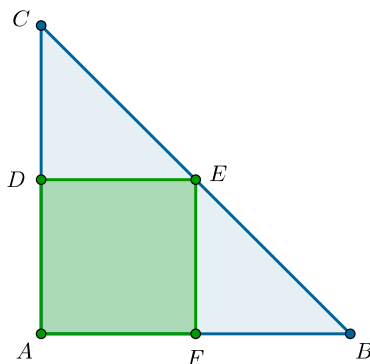


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5

W trójkąt prostokątny ABC wpisano kwadrat $ADEF$ o boku długości 4 cm tak, jak na rysunku.

Oblicz pole tego trójkąta, wiedząc, że przyprostokątna AC ma długość 9 cm.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6

W trójkącie prostokątnym poprowadzono z wierzchołka kąta prostego wysokość. Wykaż, że utworzone w ten sposób trójkąty są podobne.

Ćwiczenie 7

W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną na odcinki długości 25 dm i 9 dm. Oblicz pole trójkąta.

Ćwiczenie 8

W okrąg o promieniu długości 2,5 cm wpisano trójkąt $A'B'C'$ podobny do trójkąta prostokątnego ABC o bokach długości 9 cm, 12 cm i 15 cm. Jaki obwód ma trójkąt $A'B'C'$?

Ćwiczenie 9

W trójkącie prostokątnym ABC stosunek długości przyprostokątnych jest równy $\frac{7}{5}$.

Trójkąt $A'B'C'$ jest podobny do trójkąta ABC . Krótsza przyprostokątna trójkąta $A'B'C'$ ma długość

10 cm. Jaką długość ma druga przyprostokątna?

Ćwiczenie 10

W trójkącie prostokątnym ABC stosunek długości przyprostokątnych jest równy $\frac{4}{3}$.
W trójkącie $A'B'C'$ długości boków wynoszą 15 cm, 12 cm, 9 cm. Czy ten trójkąt jest podobny do trójkąta ABC ?

Ćwiczenie 11

W trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki długości 5 cm i 10 cm. Oblicz długość tej wysokości.

Ćwiczenie 12

Trójkąt prostokątny ABC ma przyprostokątne, długości 4 i 3. Znajdź długość wysokości opuszczonej z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną.

Ćwiczenie 13

Trójkąt prostokątny ABC ma przyprostokątne długości 4 i 3. Znajdź długości odcinków na które wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną.

Ćwiczenie 14

Udowodnij, że długość wysokości trójkąta prostokątnego opuszczonej z wierzchołka kąta prostego jest średnią geometryczną iloczynu długości odcinków, na które dzieli ona przeciwprostokątną.

Ćwiczenie 15

Przekątna trapezu prostokątnego podzieliła go na dwa trójkąty prostokątne podobne. Krótsze ramię trapezu ma długość 6, a krótsza podstawa 8. Oblicz obwód trapezu.

Ćwiczenie 16

W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną długości 30 na dwa odcinki, z których jeden ma długość x . Oblicz pole trójkąta.

Ćwiczenie 17

Dwa okręgi styczne zewnętrznie zostały wpisane w kąt (każdy z nich jest styczny do ramion kąta). Odległości środków tych okręgów od wierzchołka kąta wynoszą odpowiednio 20 i 30. Oblicz obwody okręgów.

Ćwiczenie 18

Podstawy trapezu mają długości 16 i 12, a wysokość trapezu ma długość 9,6. Znajdź odległości punktu przecięcia się przedłużeń ramion boków nierównoległych tego trapezu od obu podstaw.

Cechy podobieństwa trójkątów

Własności trójkątów podobnych

Trójkąty podobne

etap 1 z 5

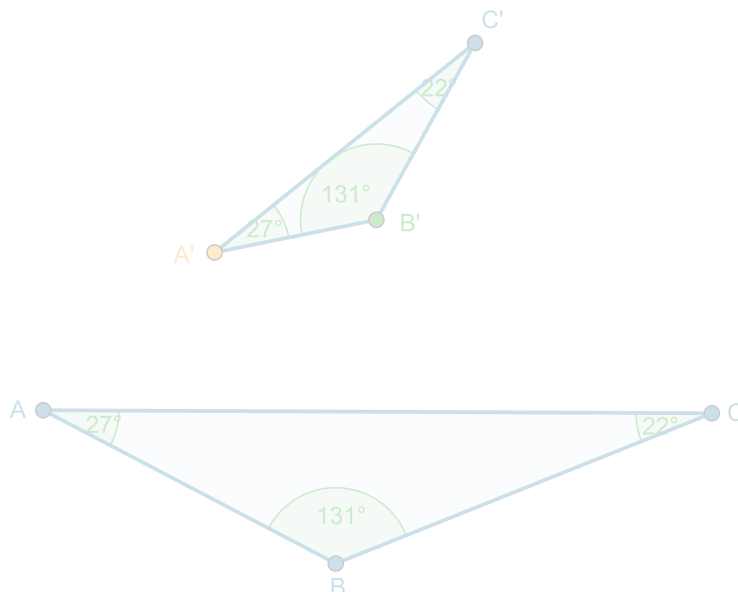


Dane są dwa trójkąty:

ABC

i mniejszy od niego trójkąt A'B'C'.

Można zmieniać położenie trójkąta A'B'C' zmieniając położenie punktu A' oraz obracać, zmieniając położenie punktu B'.

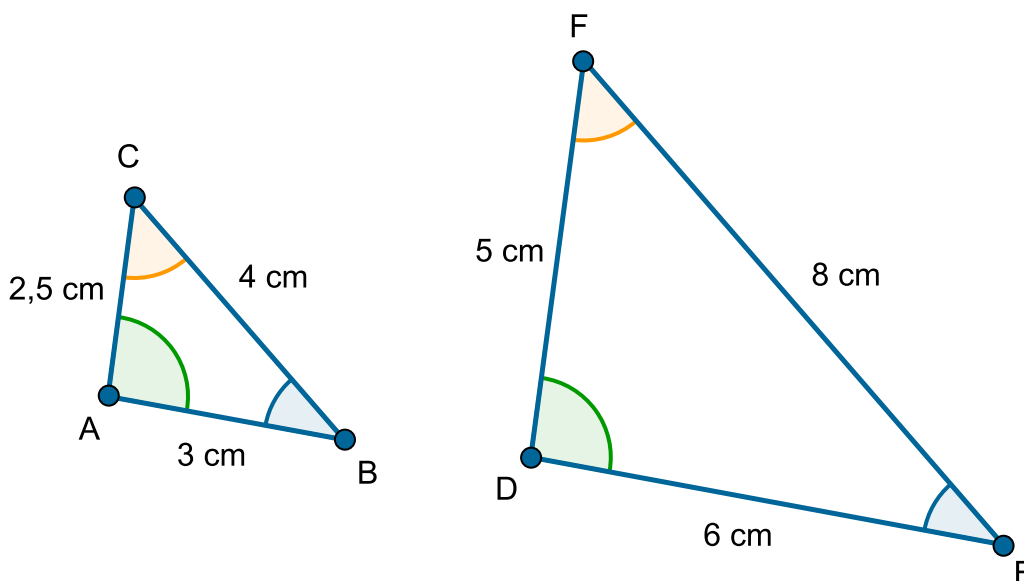


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D6QhoxTel>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Wiemy już, że wielokąty podobne mają ten sam kształt. Zatem miary kątów trójkątów podobnych są równe, a odpowiednie boki proporcjonalne.

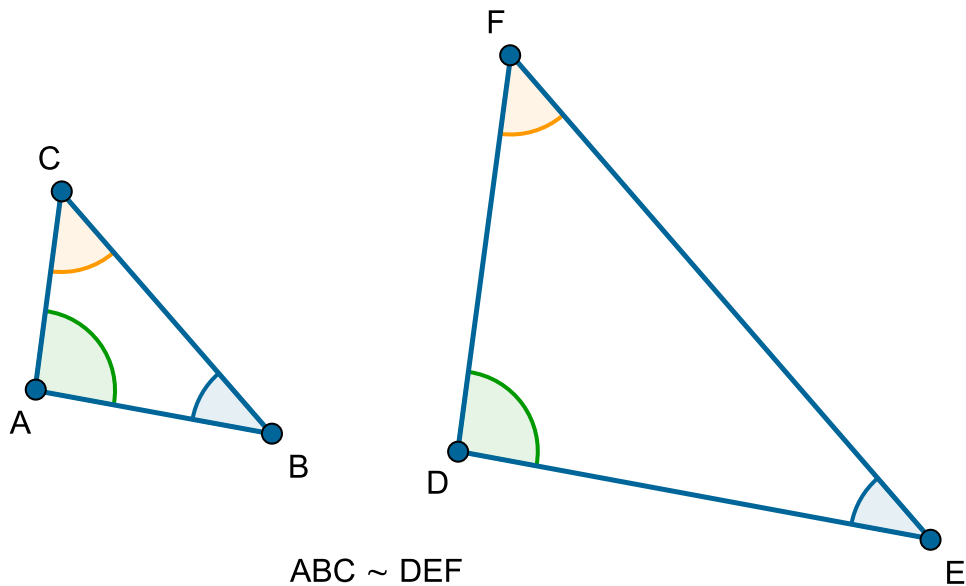
Przykład 1



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Trójkąty ABC i DEF są podobne w skali $\frac{1}{2}$.

$$\frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{1}{2}$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Tabela. Dane

Własności trójkątów podobnych	
miary odpowiednich kątów są równe	stosunek długości odpowiednich boków jest równy
$ \sphericalangle CAB = \sphericalangle FDE $ $ \sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF $ $ \sphericalangle BCA = \sphericalangle EFD $	$\frac{ AC }{ DF } = \frac{ AB }{ DE } = \frac{ BC }{ EF }$

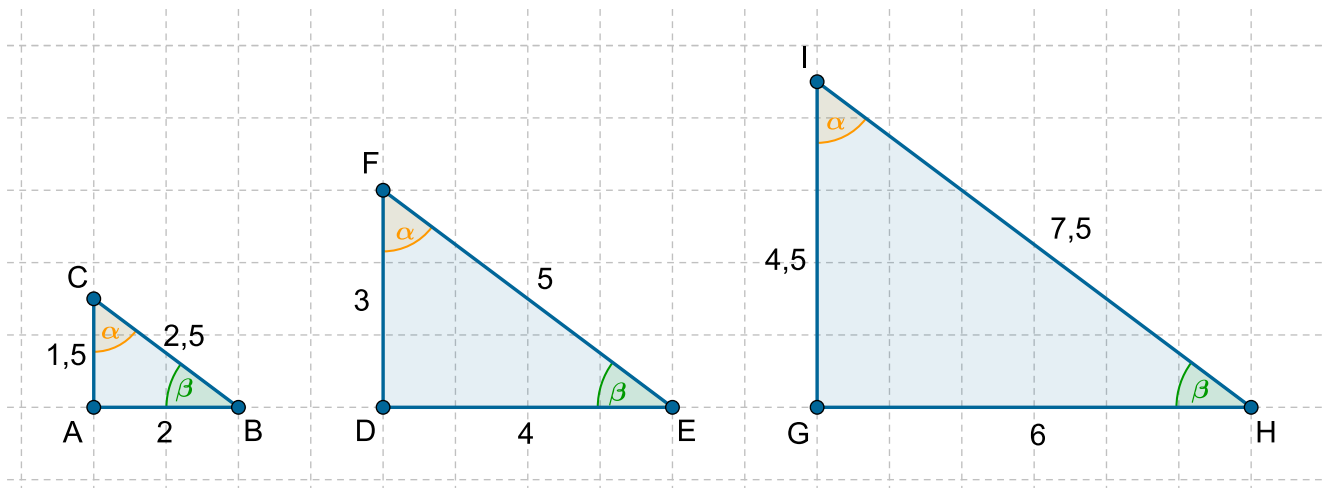
Ważne!

Jeżeli trójkąty są podobne, to skali podobieństwa jest równy:

- stosunek ich obwodów
- stosunek ich odpowiednich odcinków (np. wysokości, środkowych)

Cechy podobieństwa trójkątów

Przykład 2



Popatrz na trójkąty przedstawione na rysunku. Drugi z nich powstał przez powiększenie długości każdego boku trójkąta ABC dwa razy. Trzeci przez powiększenie długości każdego boku trójkąta ABC trzy razy.

Odpowiadające sobie kąty mają jednakowe miary, a odpowiadające sobie boki są proporcjonalne. Takie trójkąty nazywamy podobnymi.

Figury podobne to takie, które mają jednakowy kształt, a mogą się różnić wielkością. Przykładami figur podobnych są kopie tego samego obrazka, które powiększamy lub pomniejszamy.

Żeby stwierdzić, czy dwa trójkąty są podobne, korzystamy z cech podobieństwa trójkątów.

Twierdzenie: Cechy podobieństwa trójkątów

- Cecha bok-bok-bok (bbb)

Jeżeli każdy bok trójkąta A'B'C' jest proporcjonalny do odpowiedniego boku trójkąta ABC, to trójkąty te są podobne.

Trójkąty podobne - cecha bbb

Zmień trójkąt A'B'C'
poruszając wierzchołkiem A'.

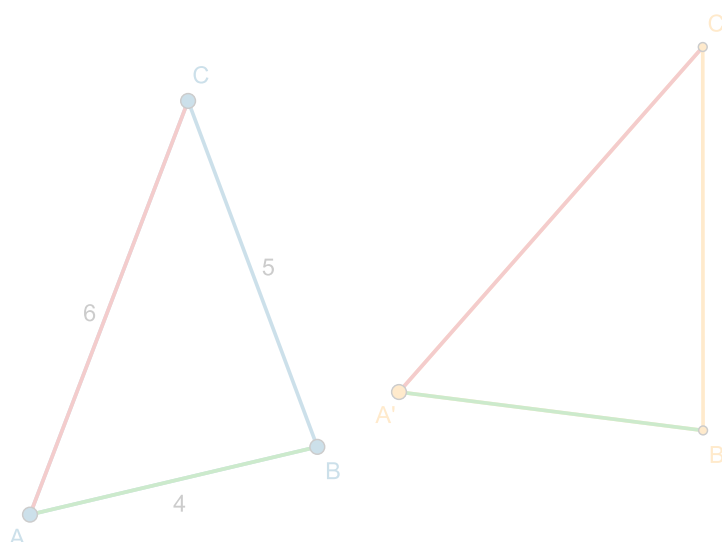
Zauważ, że

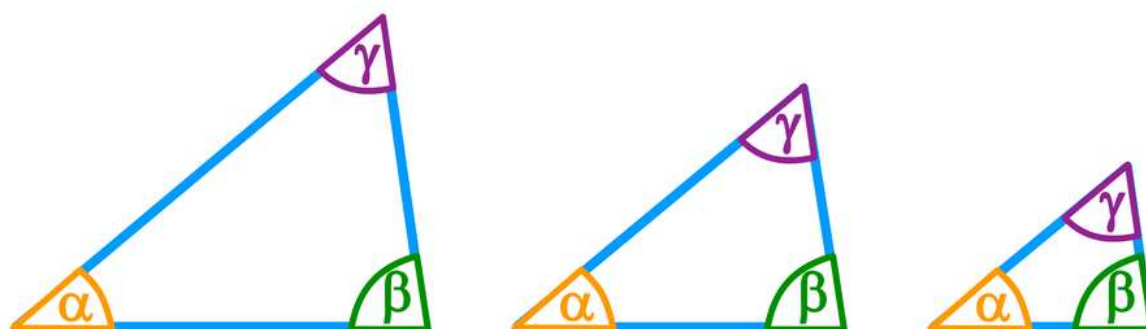
$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{4.15}{4} = 1.04,$$

$$\frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{6.23}{6} = 1.04,$$

$$\frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{5.19}{5} = 1.04.$$

czyli trójkąty ABC i A'B'C' są podobne.

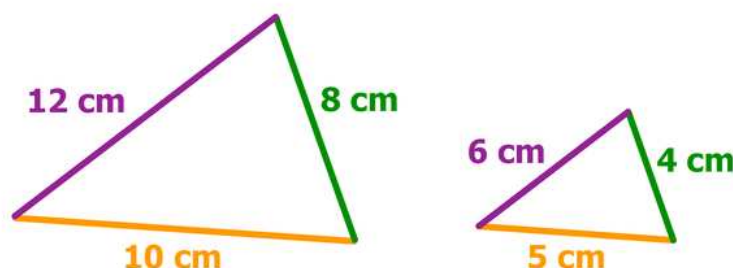




Trójkąty są podobne.

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje trzy różnych wymiarów zdjęcia tej samej budowli w kształcie trójkąta ostrokątnego. Na zdjęciu największym zaznaczono kąty alfa, beta i gamma. Porównując, w dwóch etapach (zdjęcie największe i średnie a potem największe i najmniejsze) odpowiednie kąty tych budowli, zauważamy że odpowiednie kąty w tych trójkątach są tej samej miary, a więc trójkąty są podobne.



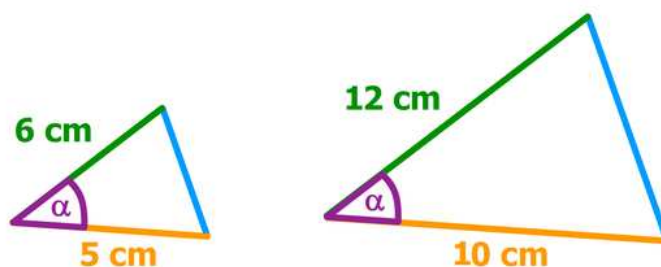
$$\frac{10}{5} = \frac{8}{4} = \frac{12}{6}$$



Trójkąty są podobne.

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje dwa różnych wymiarów zdjęcia tej samej budowli w kształcie trójkąta ostrokątnego, na których zaznaczono długości boków 12, 10, 8 oraz 6, 5, 4. Obliczając stosunki długości każdego boku w jednym trójkącie do odpowiadającego mu boku w drugim trójkącie, zauważamy że są one równe. Trójkąty są podobne.



$$\frac{5}{10} = \frac{6}{12}$$



Trójkąty są podobne.

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje dwa różnych wymiarów zdjęcia tej samej budowli w kształcie trójkąta ostrokątnego. W jednym trójkącie zaznaczono boki o długości 12 i 10 oraz między nimi kąt alfa, w drugim boki o długościach 6 i 5 oraz między nimi kąt alfa. Obliczając stosunki długości każdego boku w jednym trójkącie do odpowiadającego mu boku w drugim trójkącie, zauważamy że są one równe, a więc trójkąty są podobne.

Twierdzenie: Skala podobieństwa trójkątów

Jeżeli trójkąty $A'B'C'$ oraz ABC są podobne, przy czym wierzchołki A, B, C odpowiadają wierzchołkom odpowiednio A', B', C' , to

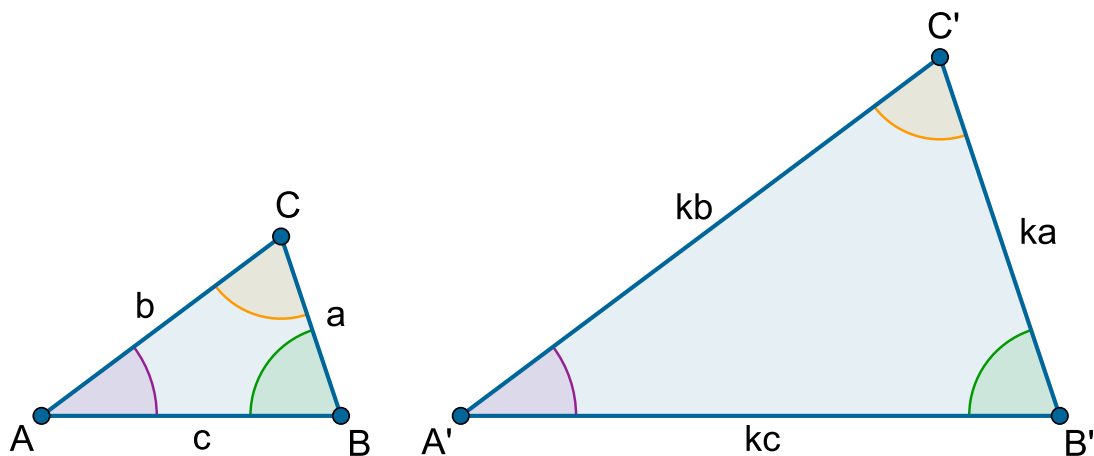
$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|C'A'|}{|CA|}$$

oraz

$$|\sphericalangle A| = |\sphericalangle A'|, |\sphericalangle B| = |\sphericalangle B'|, |\sphericalangle C| = |\sphericalangle C'|.$$

Skalą k podobieństwa trójkątów nazywamy iloraz długości odpowiadających sobie boków w trójkątach podobnych

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|C'A'|}{|CA|} = k$$



Zauważ, że trójkąty podobne w skali $k = 1$ są przystające.

Podobieństwo trójkątów $A'B'C'$ oraz ABC symbolicznie oznaczamy

$$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC.$$

Skala podobieństwa

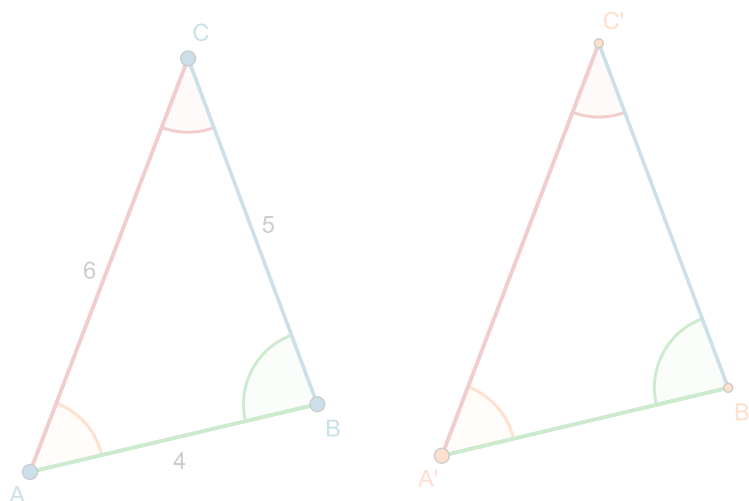
Zmień trójkąt $A'B'C'$,
poruszając wierzchołkiem A' .

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{3.99}{4} = 1$$

$$\frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{5.98}{6} = 1$$

$$\frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{4.98}{5} = 1$$

Skala podobieństwa wynosi
 $k=1$.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D6QhoxTel>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Zastosowanie cech podobieństwa trójkątów

Przykład 3

W trójkąt ABC o bokach długości a , b , c wpisano romb $ADEF$ tak, jak na rysunku.

Wykażemy, że długość boku tego rombu jest równa $\frac{ab}{a+b}$.

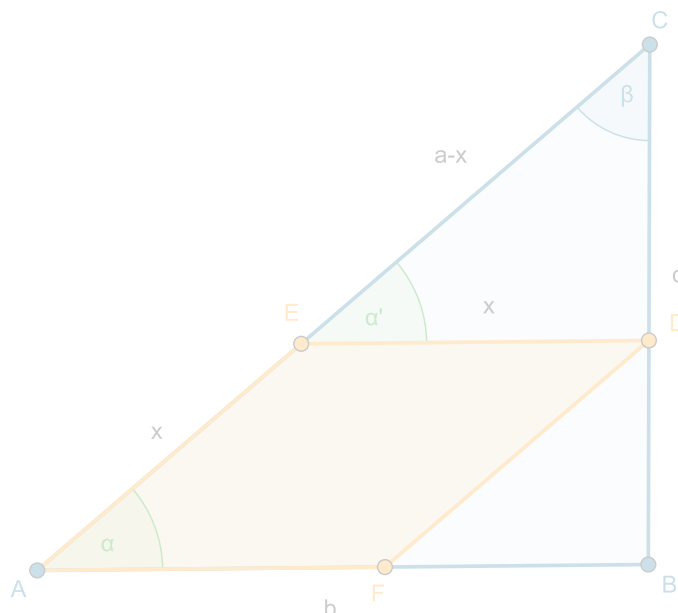
Kąty przyległe

etap 1 z 6



W trójkącie ABC o bokach a , b i c umieszczono romb ADEF. Wykaż, że długość boku x tego rombu wyraża się wzorem:

$$x = \frac{ab}{a+b}.$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D6QhoxTel>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 4

Można wykazać, że odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do boku trzeciego. Uzasadnij, że jest równy połowie boku trzeciego.

Rozważmy trójkąt ABC, w którym punkty D i E są środkami boków odpowiednio AC i BC oraz

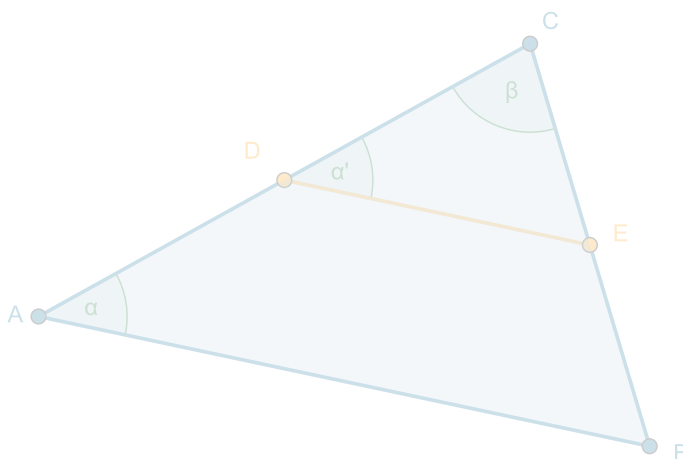
$$|CB| = 2a, |AB| = c, |DE| = x$$

Odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta

etap 1 z 3



Wykaż, że odcinek łączący dwa boki trójkąta jest równoległy do trzeciego boku i jego długość jest połową długości tego boku.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D6QhoxTel>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Ćwiczenie 1

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- ☐ Każde dwa trójkąty równoboczne są podobne.
- ☐ Każde dwa trójkąty, w których stosunek miar kątów jest równy $1 : 2 : 4$, są podobne.
- ☐ Każde dwa trójkąty przystające są podobne.
- ☐ Każde dwa trójkąty prostokątne są podobne.
- ☐ Każde dwa trójkąty o równych obwodach są podobne.

Ćwiczenie 2

Trójkąty ABC i DEF są podobne. Długości boków trójkąta ABC są równe 8, 6 i 12. Najkrótszy bok trójkąta DEF ma długość 3. Zatem najdłuższy bok trójkąta DEF.

- ☐ jest równy 4
- ☐ jest krótszy od każdego z boków trójkąta ABC
- ☐ jest równy długości jednego z boków trójkąta ABC

Ćwiczenie 3

Trójkąty ABC i DEF są podobne. Miary dwóch kątów trójkąta ABC są równe 126° , 39° .
Najmniejszy kąt trójkąta DEF ma miarę

☐ 54°

☐ 15°

☐ 39°

☐ 25°

Ćwiczenie 4

Stosunek boków dwóch trójkątów podobnych jest równy $9 : 36$. Stosunek obwodów tych trójkątów jest równy

☐ $1 : 4$

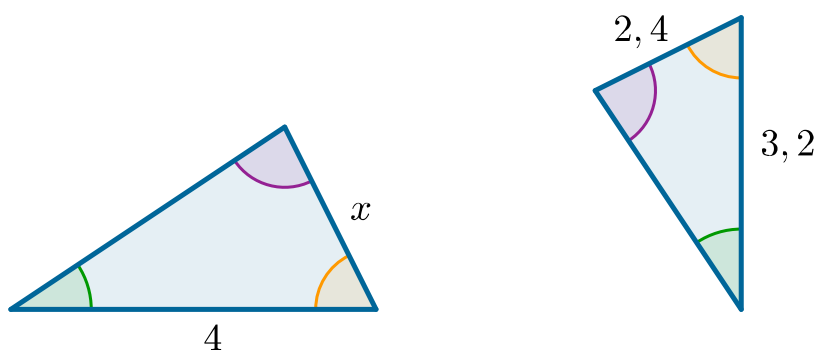
☐ $18 : 36$

☐ $3 : 6$

☐ $36 : 9$

Ćwiczenie 5

Trójkąty ABC i DEF są podobne.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zatem

☐ $x = 5,3$

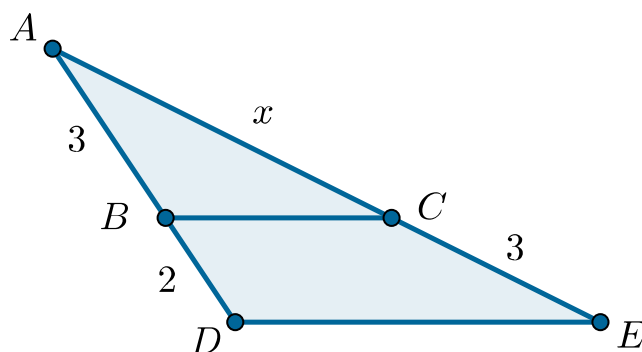
☐ $x = 1,92$

☐ $x = 3$

☐ $x = 1,4$

Ćwiczenie 6

Odcinki BC i DE są równoległe.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zatem

☐ $x = 6$

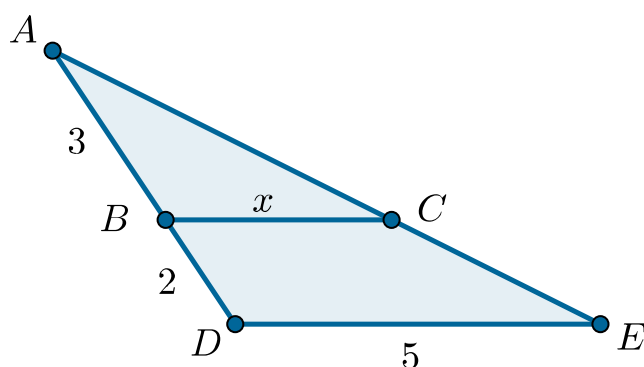
☐ $x = 9$

☐ $x = 4,5$

☐ $x = 1,8$

Ćwiczenie 7

Odcinki BC i DE są równoległe.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zatem

☐ $x = 1,2$

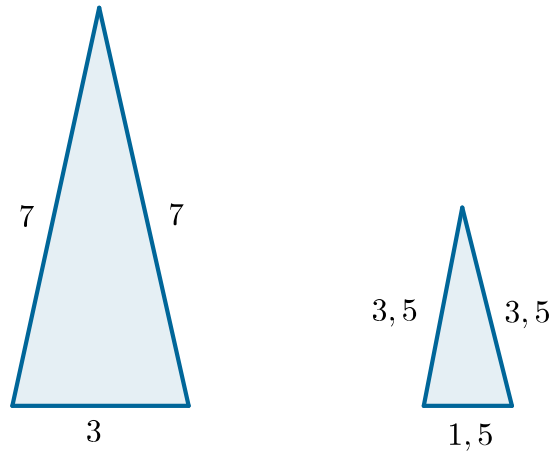
☐ $x = 1$

☐ $x = 3$

☐ $x = 7,5$

Ćwiczenie 8

Zaznacz, która cecha podobieństwa trójkątów pozwala stwierdzić, czy trójkąty na rysunku są podobne.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

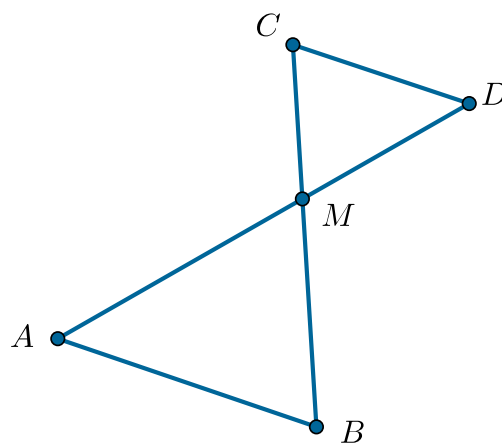
☐ kkk

☐ bkb

☐ bbb

Ćwiczenie 9

Wiadomo, że odcinki AB i CD są równoległe.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Czy wtedy $\frac{|DM|}{|CM|} = \frac{|MB|}{|MA|}$?

Ćwiczenie 10

O dwóch trójkątach równoramiennych wiadomo, że mają jeden kąt równy. Czy są to więc na pewno trójkąty podobne?

Ćwiczenie 11

W trapezie $ABCD$ podstawy AB i DC mają długości 20 cm i 10 cm, a ramię AD ma długość 8 cm. Przedłużenia ramion przecinają się w punkcie E . Oblicz długość odcinka DE .

Ćwiczenie 12

W trójkącie ABC punkt D jest środkiem odcinka AB , punkt E leży na boku BC . Odcinki AC i DE są równoległe. Odcinek AC ma długość 22 cm, odcinek DB ma długość 8 cm i CE ma długość 10 cm. Oblicz obwody trójkątów ABC i DBE .

Ćwiczenie 13

W trójkącie ABC bok AB ma długość 10 cm. Na boku AC zaznaczono punkt D taki, że odcinek AD jest cztery razy dłuższy od odcinka DC . Przez punkt D poprowadzono prostą równoległą do boku BC , która przecięła bok AB w punkcie E . Oblicz długość odcinków AE i EB .

Ćwiczenie 14

Trójkąt $A'B'C'$ o obwodzie 96 dm jest podobny do trójkąta ABC o bokach długości 6 dm, 8 dm, 10 dm. Najkrótszy bok trójkąta $A'B'C'$ ma długość:

☐ 240 cm

☐ 90 cm

☐ 12 dm

☐ 3 dm

Ćwiczenie 15

Wykaż, że odcinki łączące środki kolejnych boków dowolnego czworokąta tworzą równoległobok.

Ćwiczenie 16

Narysuj dowolny trójkąt i podziel go na dwa trójkąty, których stosunek pól wynosi 4 : 9.

Ćwiczenie 17

Obrazek ma kształt trójkąta o podstawie długości 10 cm i wysokości 8 cm. Obrazek chcemy powiększyć za pomocą kserografu tak, aby wysokość tak otrzymanego trójkąta była równa 32 cm. Jaką długość będzie miała wówczas podstawa tego trójkąta ?

Ćwiczenie 18

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Dowolne dwa trójkąty o jednakowych kątach są podobne.

☐ Dowolne dwa trójkąty o jednakowych polach są podobne.

☐ Dowolne dwa trójkąty równoramienne są podobne.

Ćwiczenie 19

W trapezie równoramiennym, którego boki mają długości 20, 12, 8, 8, przedłużono ramiona, które przecięły się w punkcie S . Oblicz odległości punktu S od obu podstaw.

Ćwiczenie 20

Dane są dwa trójkąty podobne ABC oraz $A'B'C'$. Podstawy tych trójkątów mają długości $|AB| = 16,8$, $|A'B'| = 21$. Wysokość CD opuszczona na bok AB ma długość 14,4. Oblicz wysokość $C'D'$ trójkąta $A'B'C'$ opuszczoną na bok $A'B'$.

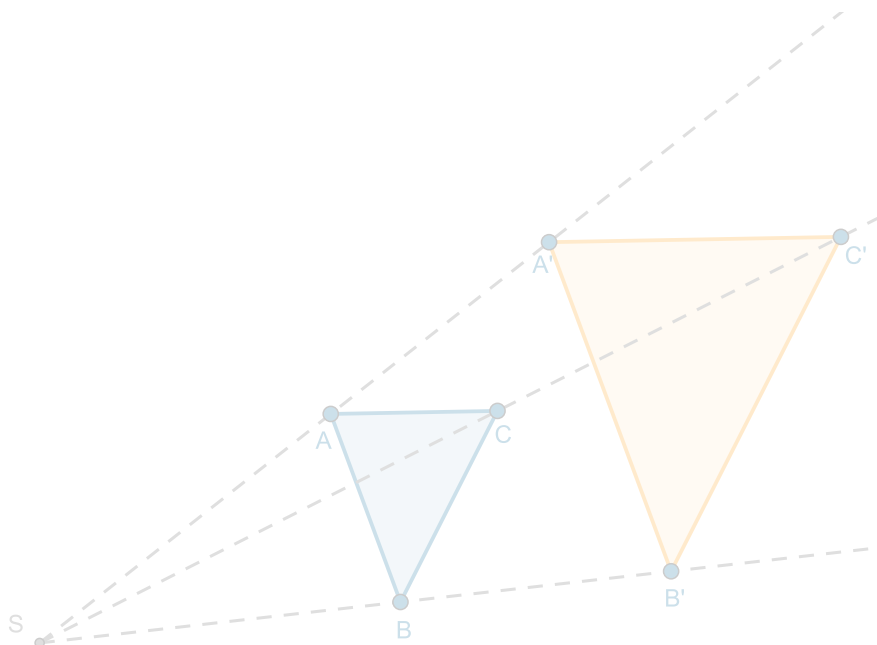
Trójkąty podobne - cecha BBB

etap 1 z 6



Trójkąty ABC i $A'B'C$ są podobne.
Można powiedzieć, że jeden z nich jest powiększoną kopią drugiego.

Poznajmy cechę, która pozwoli nam w przyszłości ocenić, czy dwa trójkąty są podobne i wyznaczyć skalę tego podobieństwa.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D6QhoxTeI>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

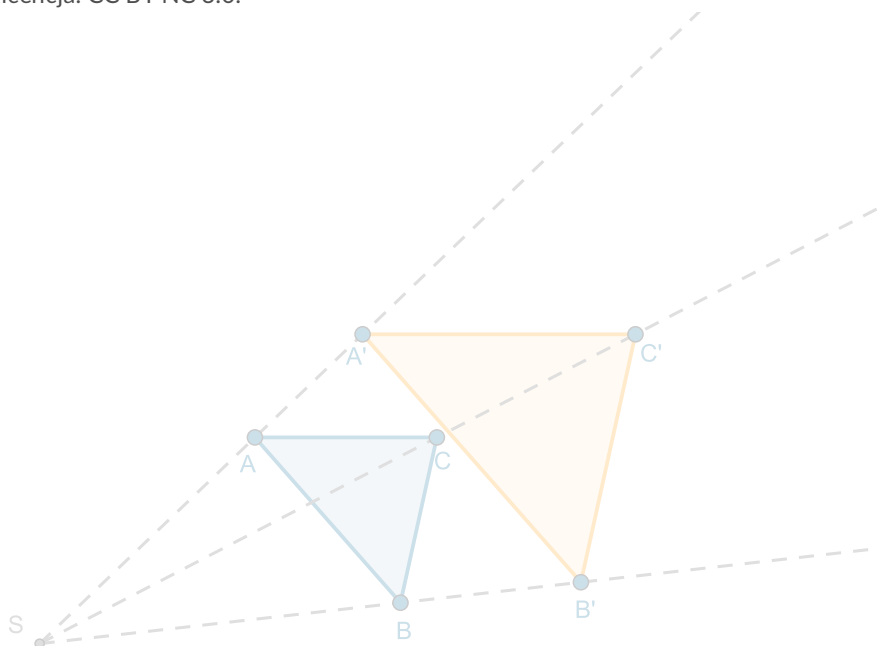
Trójkąty podobne - cecha BKB

etap 1 z 6



Trójkąty ABC i $A'B'C$ są podobne.
Można powiedzieć, że jeden z nich jest powiększoną kopią drugiego.

Poznajmy cechę, która pozwoli nam w przyszłości ocenić, czy dwa trójkąty są podobne i wyznaczyć skalę tego podobieństwa.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D6QhoxTeI>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Trójkąty podobne cecha KKK



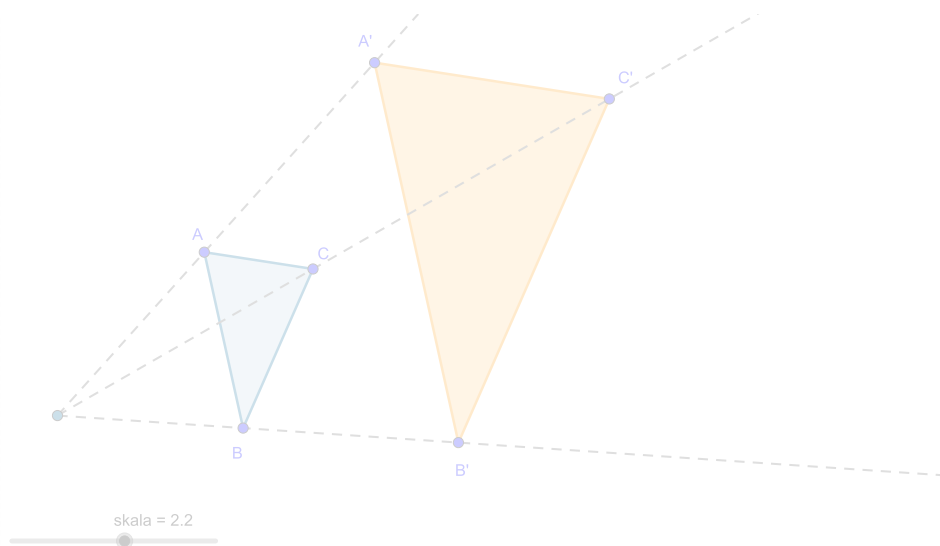
etap 1 z 7



Trójkąty ABC i A'B'C są podobne.

Możnaby powiedzieć, że jeden z nich jest powiększoną kopią drugiego.

Poznajmy cechy które pozwolą nam w przyszłości ocenić, czy dwa trójkąty są podobne.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D6QhoxTeI>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Pola figur podobnych

Stosunek pól figur podobnych

Wiemy, że stosunek odpowiednich odcinków figur podobnych jest równy skali podobieństwa.

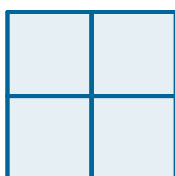
Zastanowimy się teraz, jaka jest zależność między polami takich figur.

Przykład 1

Przyjmijmy, że pole niebieskiego kwadratu jest równe 1. Kwadrat ten jest podobny do każdego z pozostałych kwadratów. Pod rysunkami zapisana jest skala podobieństwa danego kwadratu do kwadratu niebieskiego. Zapisane są też pola tych figur. Co zauważasz?

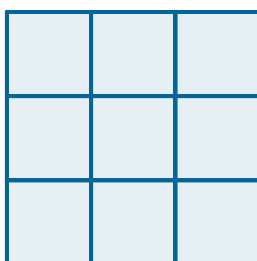


$$P = 1$$



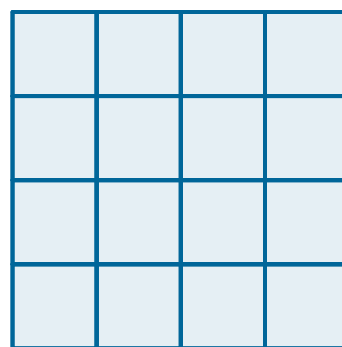
$$k = 2$$

$$P = 4$$



$$k = 3$$

$$P = 9$$



$$k = 4$$

$$P = 16$$

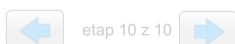
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Odpowiedź. Pole kwadratu jest równe kwadratowi skali podobieństwa.

Pola figur podobnych.

Pole $f = 2 \text{ cm}^2$

skala podob $s = 3$



Wpisz wyznaczone pole figury f' do poniższej ramki.

Pole figury f' jest równe:

Źle



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D14ATWBkl>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 2

Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 4 dm i 6 dm. Każdą z przyprostokątnych zmniejszamy dwukrotnie. Oblicz stosunek pola pomniejszonego trójkąta do pola danego trójkąta.

Każdy z boków trójkąta zmniejszono dwukrotnie. Zatem skala podobieństwa trójkąta otrzymanego do trójkąta danego jest równa $\frac{1}{2}$. Wynika z tego, że przyprostokątne trójkąta pomniejszonego mają długości 2 dm i 3 dm.

Oznaczmy:

- P – pole danego trójkąta,
- P_1 – pole trójkąta pomniejszonego.

$$P = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12$$

$$P = 12 \text{ dm}^2$$

$$P_1 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$$

$$P_1 = 3 \text{ dm}^2$$

$$\frac{P_1}{P} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Stosunek pól tych trójkątów jest równy $\frac{1}{4}$, czyli jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

Przykład 3

Prostokątna kartka w notesie ma wymiary 10 cm i 8 cm. Kartka w książce ma wymiary 30 cm i 24 cm. Ile razy pole powierzchni kartki w książce jest większe od pola powierzchni kartki w notesie?

Zauważmy, że prostokąty, w kształcie których są kartki, są podobne. Skala podobieństwa prostokąta w kształcie którego jest kartka w książce do prostokąta, w kształcie którego jest kartka w notesie, jest równa

$$\frac{30}{10} = \frac{24}{8} = 3$$

Obliczamy stosunek pól tych prostokątów.

$$\frac{30 \text{ cm} \cdot 24 \text{ cm}}{10 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm}} = 9$$

Stosunek pól powierzchni kartek jest równy 9, czyli jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

Na podstawie powyższych przykładów możemy wnioskować, że jeśli figura F jest podobna do figury G w skali k , to stosunek pól tych figur jest równy k^2 .

Sprawdźmy nasze przypuszczenia jeszcze na kilku przykładach.

Ważne!

Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

Przykład 4

Pięciokąt M jest podobny do pięciokąta K w skali $1 : 8$. Pole pięciokąta M jest równe 2. Oblicz pole pięciokąta K .

Korzystamy z tego, że stosunek pól wielokątów podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa. Stąd

$$\frac{2}{P} = \left(\frac{1}{8}\right)^2$$

$$\frac{2}{P} = \frac{1}{64}$$

$$P = 128$$

Pole pięciokąta K jest równe 128.

Przykład 5

Jedną z największych atrakcji turystycznych Gdańska jest Bazylika Mariacka, na której znajduje się największy w Polsce zegar. Został on zbudowany w 1637 r.

Pole powierzchni tarczy tego zegara jest równe około 16 m^2 . Pole powierzchni tarczy zegarka na rękę jest równa około 16 cm^2 . Określ skalę podobieństwa tych tarcz.

Zapisujemy oba pola w tej samej jednostce pola.

$$16 \text{ m}^2 = (16 \cdot 100 \cdot 100) \text{ cm}^2 = 160\,000 \text{ cm}^2$$

Dzielimy pole powierzchni większej tarczy przez pole powierzchni mniejszej tarczy. Obliczamy w ten sposób kwadrat skali podobieństwa tarcz.

$$k^2 = \frac{160000}{16} = 10000$$

Obliczamy teraz skalę podobieństwa.

$$k = \sqrt{10000} = 100$$

Skala podobieństwa tarczy gdańskiego zegara do tarczy zegarka na rękę wynosi 100.

Skala a pola kwadratów

Dane są dwa kwadraty narysowane w pewnej skali.

Zmień skalę.

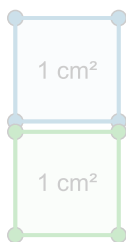


1:1 1:2 1:3 1:4 1:5

Obserwuj zmianę pola zielonego kwadratu.

Jaki jest stosunek pól w zależności od skali?

1 :



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D14ATWBkl>

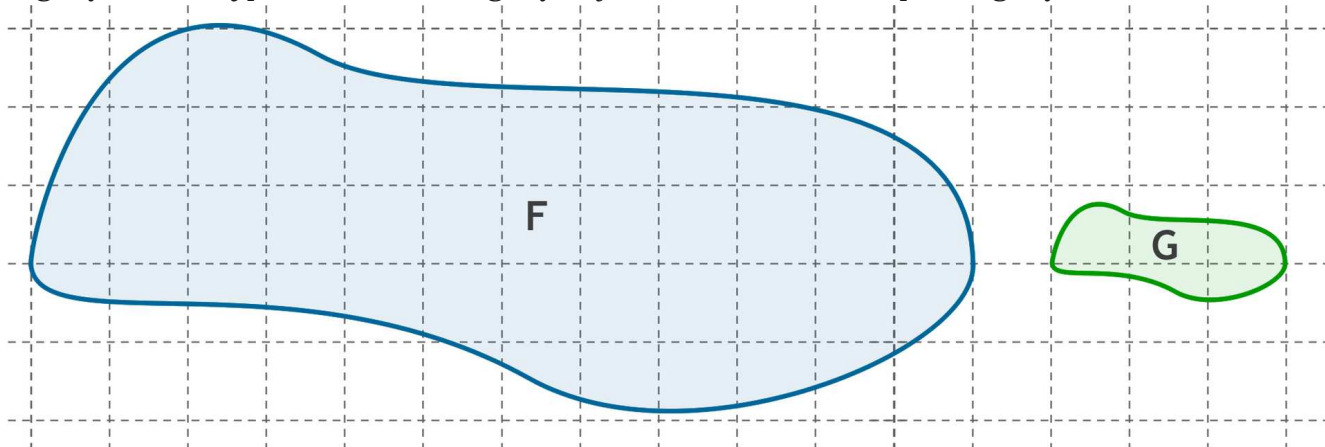
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Obliczanie pól figur podobnych

Zauważmy, że jeżeli figura F jest podobna do figury G w skali k , pole figury F jest równe P , a pole figury G jest równe P_1 , to $P = k^2 \cdot P_1$ oraz $P_1 = \frac{1}{k^2} \cdot P$. Wykorzystamy teraz podane równości w zadaniach.

Przykład 6

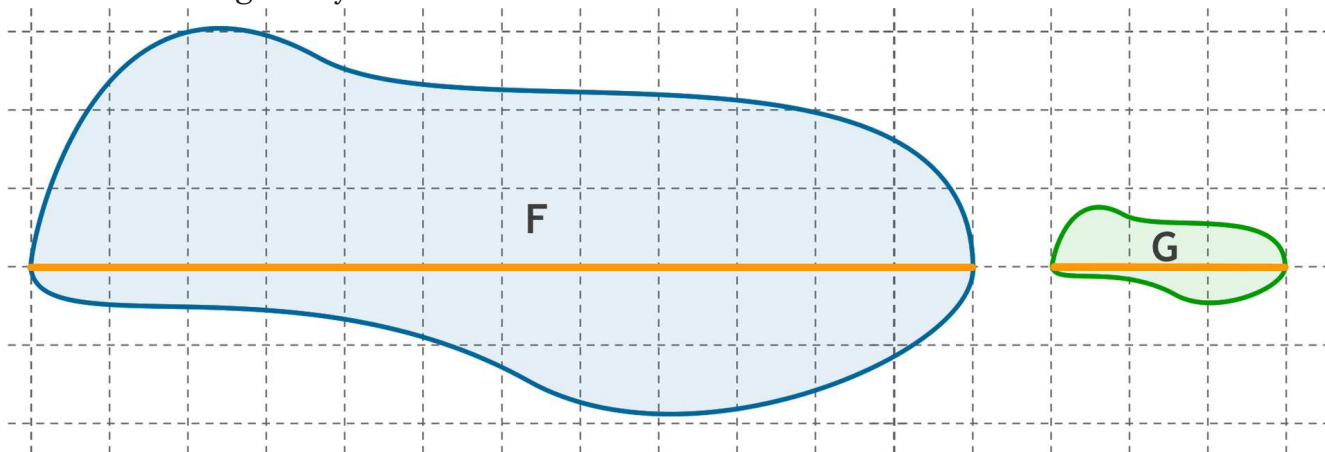
Figury F i G są podobne. Pole figury G jest równe 7. Oblicz pole figury F .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Określamy najpierw skalę podobieństwa figur. W tym celu zaznaczamy w obu figurach odpowiadające sobie odcinki. Skala podobieństwa figury F do figury G jest równa

stosunkowi długości tych odcinków.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Jeżeli przyjmiemy, że długość małej kratki jest równa a , to

$$k = \frac{12a}{3a} = 4$$

Zatem $P_F = k^2 \cdot P_G$, gdzie

P_F – pole figury F

P_G – pole figury G

Stąd

$$P_F = 4^2 \cdot 7 = 16 \cdot 7 = 112$$

Pole figury F jest równe 112.

Przykład 7

Pole rombu F jest równe 125. Romb ten jest podobny do rombu G , którego przekątne mają długości 2 i 5. Znajdź sumę długości przekątnych rombu F .

Oznaczmy:

- P_F – pole rombu F ,
- P_G – pole rombu G ,
- k – skala podobieństwa rombu F do rombu G .

Wtedy

$$P_F = k^2 \cdot P_G$$

$$125 = k^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5$$

$$k^2 = 25$$

$$k = \sqrt{25} = 5$$

bo

$$k > 0$$

Skala podobieństwa rombów jest równa 5. Oznacza to, że każda z przekątnych rombu F jest 5 razy dłuższa od odpowiedniej przekątnej rombu G .

Zatem długości przekątnych rombu F są równe 10 i 25.

Suma długości tych przekątnych jest równa 35.

Przykład 8

Dwa wielokąty są podobne. Obwód pierwszego z nich jest równy 12, a pole 14. Obwód drugiego wielokąta jest równy 2. Oblicz pole drugiego wielokąta.

Obliczamy skalę k podobieństwa wielokątów.

$$k = \frac{12}{2} = 6$$

Obliczamy pole P_2 drugiego wielokąta.

$$P_2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot 14$$

$$P_2 = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

Pole drugiego wielokąta jest równe $\frac{7}{18}$.

Przykład 9

Skala podobieństwa dwóch kwadratów jest równa 0,5. Oblicz długość boku mniejszego kwadratu, jeżeli różnica pól tych kwadratów wynosi 27.

Niech P oznacza pole mniejszego kwadratu. Wtedy pole większego kwadratu P_W to

$$P_W = \left(\frac{1}{0,5}\right)^2 \cdot P$$

Zatem

$$P_W = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^2 \cdot P = 2^2 \cdot P = 4P$$

Korzystamy z tego, że różnica pól tych kwadratów jest równa 27 i wyznaczamy pole mniejszego kwadratu i długość a jego boku.

$$P_W - P = 27$$

$$4P - P = 27$$

$$3P = 27$$

$$P = 9$$

$$a^2 = 9$$

$$a = 3$$

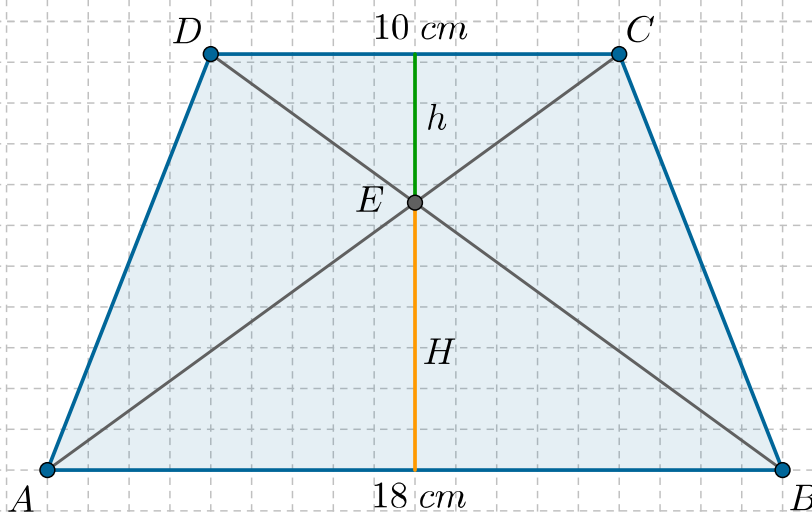
bo

$$a > 0$$

Długość boku mniejszego kwadratu jest równa 3.

Przykład 10

Podstawy trapezu równoramiennego ABCD mają długości 10 cm i 18 cm. Przekątne trapezu przecinają się w punkcie E. Wysokość trójkąta DEC jest równa 4 cm. Oblicz pole trapezu.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zauważmy, że trójkąty AEB i DEC mają równe kąty: kąty AEB i DEC to kąty wierzchołkowe, mają więc równe miary, kąty EDC i EBA to kąty naprzemianległe przy prostych równoległych, podobnie kąty EAB i DCA. Na podstawie cechy kkk stwierdzamy, że trójkąty AEB i DEC są podobne.

Skala podobieństwa k tych trójkątów jest równa stosunkowi długości ich podstaw.

$$k = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$$

Stosunek wysokości tych trójkątów jest równy skali podobieństwa.

$$\frac{H}{h} = k$$

$$\frac{H}{4} = \frac{9}{5}$$

$$5H = 36 : 5$$

$$H = 7,2 \text{ cm}$$

Wysokość trapezu jest równa sumie wysokości trójkątów AEB i DEC.

$$H + h = 7,2 + 4$$

$$H + h = 11,2 \text{ cm}$$

Obliczamy pole trapezu.

$$P = \frac{1}{2} \cdot (18 + 10) \cdot 11,2$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 28 \cdot 11,2$$

$$P = 14 \cdot 11,2$$

$$P = 156,8 \text{ cm}^2$$

Pole trapezu jest równe $156,8 \text{ cm}^2$.

Przykład 11

Jezioro Śniardwy to największe jezioro w Polsce. Powierzchnia tego jeziora jest równa około $113,4 \text{ km}^2$. Na mapie powierzchnia ta jest równa $0,126 \text{ cm}^2$. W jakiej skali wykonana jest mapa?

Zapisujemy najpierw powierzchnię jeziora w cm^2 .

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m} = 1000 \cdot 100 \text{ cm} = 100000 \text{ cm} = 10^5 \text{ cm}$$

$$1 \text{ km}^2 = 10^5 \cdot 10^5 \text{ cm}^2 = 10^{10} \text{ cm}^2$$

$$113,4 \text{ km}^2 = 113,4 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2$$

Obliczamy kwadrat skali podobieństwa figury, w kształcie której jest jezioro na mapie, i figury, w kształcie której jest powierzchnia jeziora w rzeczywistości.

$$k^2 = \frac{0,126}{113,4 \cdot 10^{10}} = \frac{1}{900 \cdot 10^{10}} = \frac{1}{9 \cdot 10^{12}}$$

Obliczamy skalę podobieństwa tych figur.

$$k = \sqrt{\frac{1}{9000000000000}} = \frac{1}{3000000}$$

Skala mapy jest równa obliczonej skali podobieństwa.

Mapa wykonana jest więc w skali 1 : 3 000 000.

Ćwiczenie 1

Figura F jest podobna do figury G w skali $1 : 7$. Stosunek pola figury G do pola figury F jest równy

☐ $1 : 7$

☐ $49 : 1$

☐ $1 : 49$

☐ $7 : 1$

Ćwiczenie 2

Wiadomo, że $A = (-5, 2)$, $B = (1, 2)$, $C = (1, 6)$. Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta EFG w skali $2 : 1$.

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Suma pola trójkąta ABC i pola trójkąta EFG jest równa 15.

☐ Pole trójkąta ABC jest dwukrotnie mniejsze od pola trójkąta EFG .

☐ Różnica pola trójkąta ABC i pola trójkąta EFG jest mniejsza od 10.

☐ Pole trójkąta EFG jest dwukrotnie mniejsze od pola trójkąta ABC .

Ćwiczenie 3

Pole koła zwiększono n -krotnie. Wynika z tego, że

☐ średnicę koła zwiększono dwudziestokrotnie

☐ promień koła zwiększono n -krotnie

☐ obwód koła zwiększono dziesięciokrotnie

Ćwiczenie 4

Pole powierzchni kwadratowej działki pani *A* jest 25 razy większe od pola kwadratowej działki pani *B*. Ile razy więcej siatki trzeba kupić na ogrodzenie działki pani *A* niż działki pani *B*?

Ćwiczenie 5

Stosunek obwodów dwóch kół jest równy 0,75. Stosunek pola większego koła do mniejszego jest równy

☐ 7 : 5

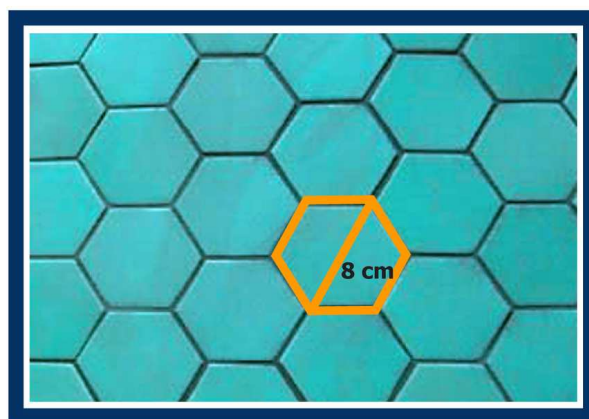
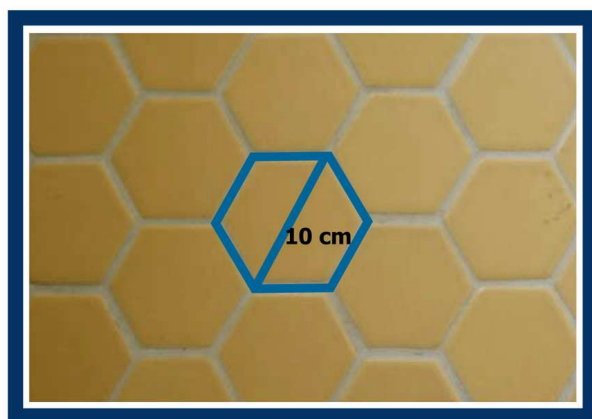
☐ 4 : 3

☐ 25 : 16

☐ 16 : 9

Ćwiczenie 6

Płytki terakoty jest w kształcie sześciokąta foremnego. Płytki glazury ma również kształt sześciokąta foremnego.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

W sześciokątach tych dłuższe przekątne są odpowiednio równe 10 cm i 8 cm. Ile razy większe jest pole powierzchni płytki terakoty od pola powierzchni płytki glazury?

Ćwiczenie 7

Trapez ABCD jest podobny do trapezu EFGH w skali 4,5. Wynika stąd, że

- a. obwód trapezu ABCD jest 4,5 razy większy od obwodu trapezu EFGH
- b. wysokość trapezu EFGH stanowi $\frac{4}{9}$ wysokości trapezu ABCD
- c. pole trapezu ABCD stanowi $\frac{81}{4}$ pola trapezu EFGH
- d. pole trapezu ABCD jest o $\frac{77}{81}$ większe od pola trapezu EFGH

Ile spośród podanych stwierdzeń jest prawdziwych?

☐ trzy

☐ jedno

☐ żadne

☐ wszystkie

Ćwiczenie 8

Trójkąt ABC o bokach długości 15 cm, 17 cm, 8 cm jest podobny do trójkąta EFG. Pole trójkąta EFG jest równe 15 cm^2 . Oblicz długości boków trójkąta EFG.

Ćwiczenie 9

Przekątne rombu R są równe 24 cm i 12 cm. Pole rombu W jest równe 64 cm^2 . Dłuższa przekątna rombu W jest równa

☐ 16 cm

☐ $10\frac{2}{3}$ cm

☐ 36 cm

☐ 12 cm

Ćwiczenie 10

Prostokąt $A'B'C'D'$ jest podobny w skali k do prostokąta $ABCD$, którego pole wynosi 144 cm^2 . Oblicz pole prostokąta $A'B'C'D'$ dla:

a. $k = 2$

b. $k = \frac{1}{4}$

c. $k = 0,1$

d. $k = \sqrt{2}$

Ćwiczenie 11

Równoległobok $A'B'C'D'$ jest podobny do równoległoboku $ABCD$ w skali $\frac{3}{2}$. Jaki jest stosunek pól tych równoległoboków?

Ćwiczenie 12

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Dowolne dwa sześciokąty foremne o jednakowych polach są podobne.

☐ Dowolne dwa czworokąty o równych polach są podobne.

☐ Dowolne dwa wielokąty podobne mają jednakowe pola.

Ćwiczenie 13

W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną długości c na dwa odcinki, z których jeden ma długość x . Oblicz pole trójkąta.

Ćwiczenie 14

Prostokątną fotografię o wymiarach 12 cm na 18 cm powiększono na kserografie tak, że jej szerokość jest równa 21 cm. Jakie pole ma powiększona fotografia?

Ćwiczenie 15

Wycinek W koła o promieniu 6 cm ma pole równe $6\pi \text{ cm}^2$. Wycinek M koła o promieniu 8 cm ma pole równe $32/3 \pi \text{ cm}^2$. Czy wycinki te są podobne? Jeśli tak, podaj ich skalę podobieństwa.

Ćwiczenie 16

Koło K_1 jest podobne do koła K_2 w skali $k = 3$. Oblicz pole koła K_2 , jeśli wiadomo, że wycinkowi koła K_1 o polu 6π odpowiada kąt środkowy o mierze 60° .

Ćwiczenie 17

Dwa sześciokąty foremne mają pola równe 36 cm^2 oraz 18 cm^2 . Oblicz długości boków tych sześciokątów oraz określ skalę podobieństwa promieni okręgów wpisanych w te sześciokąty.

Ćwiczenie 18

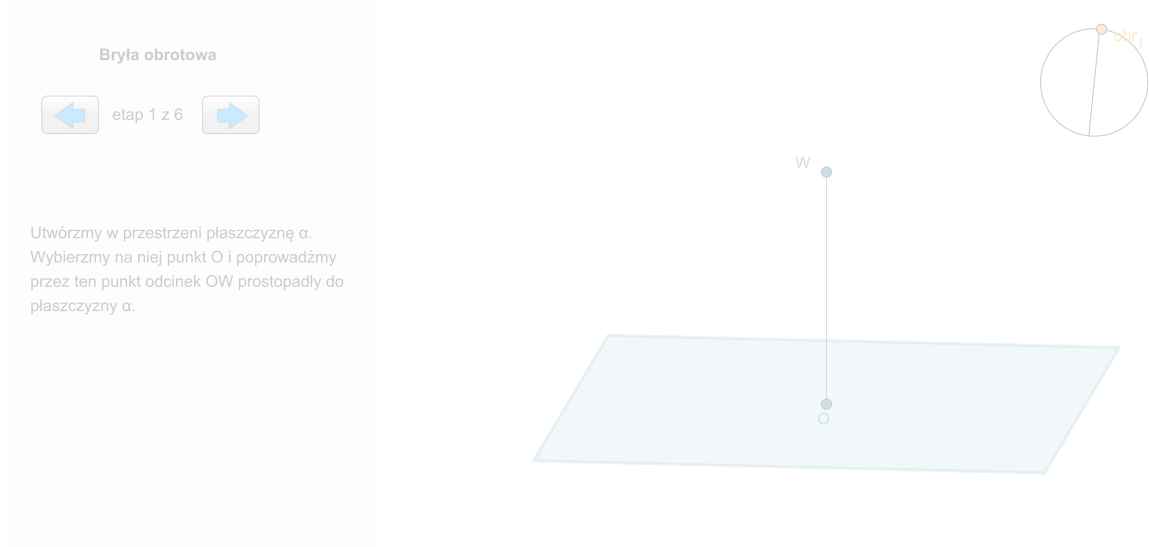
Podstawami trapezu $ABCD$ są odcinki AB i CD . Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie S . Pole trójkąta ASB jest równe 25, pole trójkąta DSC jest równe 9. Oblicz pole trapezu.

Bryły obrotowe

Bryły obrotowe

Definicja: Oś obrotu

Obracając figurę płaską dookoła prostej p , zawartej w tej samej płaszczyźnie, otrzymujemy powierzchnię, która ogranicza figurę, zwaną bryłą obrotową. Prosta p nazywamy osią obrotu. Jest ona osią symetrii bryły obrotowej.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DHE26ZBp5>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DHE26ZBp5>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 1



bryła obrotowa

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

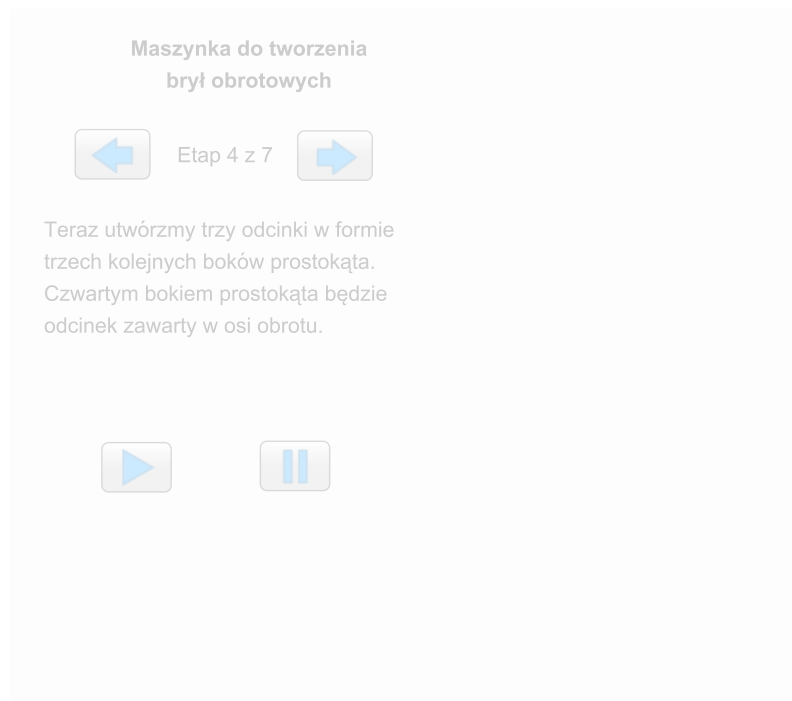
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Przykłady brył obrotowych



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DHE26ZBp5>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 2

Przez całą noc padał deszcz i beczka na deszczówkę została napełniona w połowie. Beczka ma wysokość 1,4 m. Jej średnica w najszerszym miejscu wynosi 1 m, a w najwęższym 80 cm.

Ile litrów wody znajduje się w beczce? Przyjmij, że $\pi = \frac{22}{7}$. Skorzystaj z podanego wzoru na pojemność beczki.

Wzór na pojemność beczki.

$$V = \frac{1}{12}\pi H(2D^2 + d^2)$$

- V – pojemność
- H – wysokość beczki
- D – średnica w najszerszym miejscu
- d – średnica w najwęższym miejscu

Mamy podać pojemność beczki w litrach.

Jeden liter to jeden decymetr sześcienny. Zapisujemy więc wymiary beczki w decymetrach.

$$H = 1,4 \text{ m} = 14 \text{ dm}$$

$$D = 1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$$

$$d = 80 \text{ cm} = 8 \text{ dm}$$

Beczka napełniona jest w połowie, zatem obliczamy połowę jej pojemności.

$$\frac{1}{2}V = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12}\pi H(2D^2 + d^2)$$

$$\frac{1}{2}V = \frac{1}{24} \cdot \frac{22}{7} \cdot 14(2 \cdot 10^2 + 8^2)$$

$$\frac{1}{2}V = \frac{44}{24} \cdot 264$$

$$\frac{1}{2}V = 484$$

W beczce jest 484 l wody.

Przykład 3

Bryła G powstaje w wyniku obrotu figury F wokół prostej p .

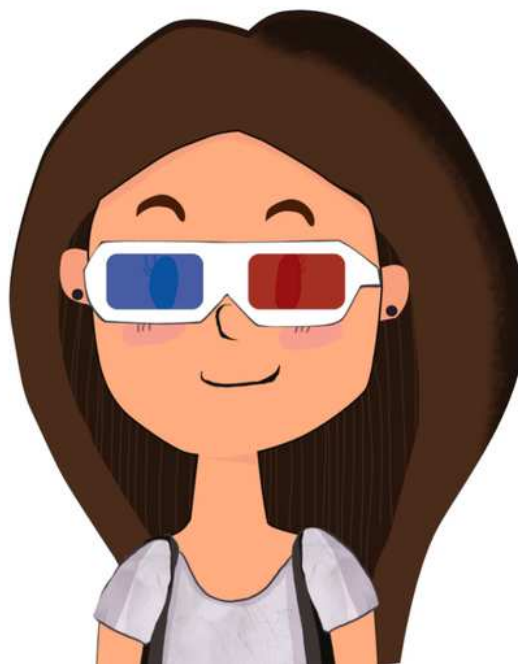
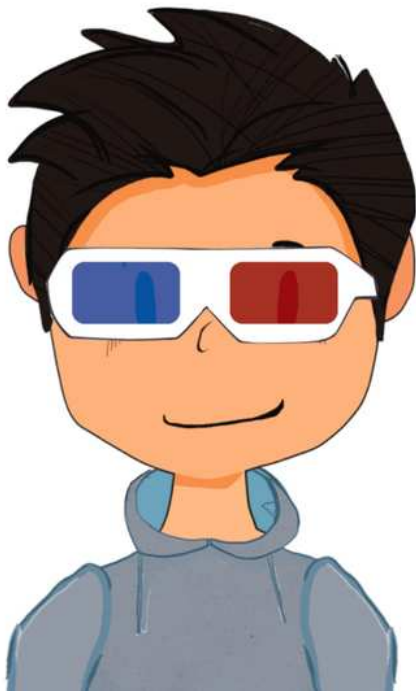


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Przykład 4



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Ciekawostka

Nasza planeta nie ma kształtu idealnej kuli. Na skutek ruchu wirowego (czyli ruchu wokół własnej osi) Ziemia uległa spłaszczeniu przy biegunach. W wyniku tego powstała bryła zwana geoidą (z greckiego: gea – Ziemia, eidos – kształt).

Bryłą najbardziej zbliżoną kształtem do Ziemi jest elipsoida obrotowa.

Elipsoida obrotowa



Ukryjmy płaszczyznę bazową i włączmy przycisk animacji.

Elipsoida to powierzchnia obrotowa utworzona przez elipsę.



Klawiszami CTRL+F odświeżamy konstrukcję.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DHE26ZBp5>

Przekroje brył obrotowych

Figurę płaską, która powstanie po przecięciu bryły płaszczyzną, nazywamy przekrojem tej bryły.

Ważne!

Przekrój osiowy bryły obrotowej to część wspólna tej bryły z płaszczyzną zawierającą oś obrotu.

Przekrój poprzeczny bryły obrotowej to część wspólna tej bryły z płaszczyzną prostopadłą do osi obrotu.

Przykład 5

Przekroje osiowe i poprzeczne



Każdą bryłę obrotową można przeciąć płaszczyzną zawierającą oś obrotu oraz płaszczyzną prostopadłą do tej osi.

Walec skonstruowany obok przecięto zieloną płaszczyzną osiową i pomarańczową płaszczyzną poprzeczną
Płaszczyznę poprzeczną można przesuwając punkt A.
w dół i w górę przemieszczając punkt A.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DHE26ZBp5>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 6

Określ, jaki kształt mają przekroje narysowanych brył. Jeśli nie wiesz, jak nazywa się dana figura, sprawdź w internecie jej nazwę.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje baterię elektryczną. Kreślone są krawędzie – powstaje walec. Następnie przekroje skośne i poprzeczne dzielą walec na dwie bryły.

Przykład 7

Arbuz przekrojono na pół. Otrzymany przekrój jest w kształcie koła o polu $452,16 \text{ cm}^2$. Oblicz średnicę tego koła. Przyjmij $\pi = 3,14$.

Korzystamy ze wzoru na pole koła o promieniu r .

$$P = \pi r^2$$

$$452,16 = 3,14 \cdot r^2$$

$$r^2 = 144$$

$$r = \sqrt{144} = 12$$

bo

$$r > 0$$

Obliczamy średnicę koła.

$$2 \cdot 12 \text{ cm} = 24 \text{ cm}$$

Średnica koła, będąca przekrojem arbuza, jest równa 24 cm.

Przykład 8

Przekroje osiowe i poprzeczne



Etap 2 z 6



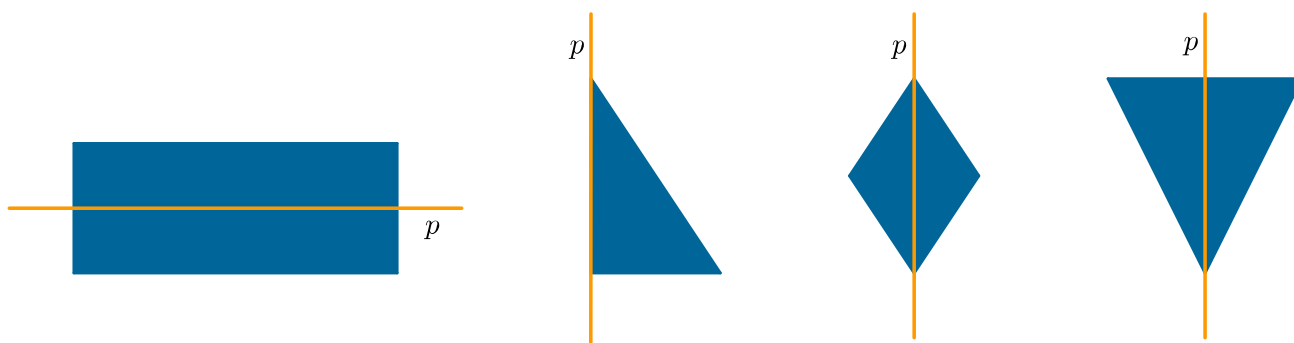
Walec skonstruowany obok przecięto zieloną płaszczyzną osiową i pomarańczową płaszczyzną poprzeczną
Płaszczyznę poprzeczną można przesuwac w dół i w górę przemieszczając punkt A.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DHE26ZBp5>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Ćwiczenie 1

Narysuj bryłę, która powstanie w wyniku obrotu danej figury wokół prostej p .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

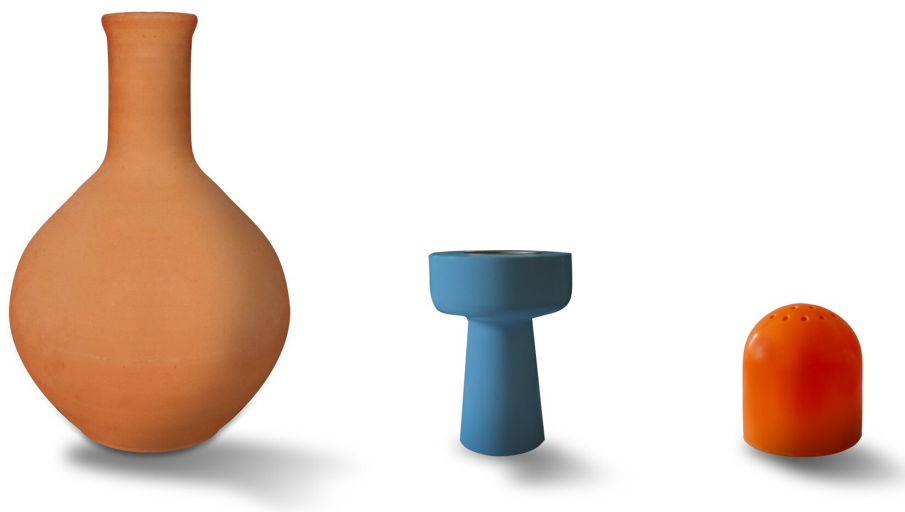
Ćwiczenie 2

Narysuj bryłę, która powstała w wyniku obrotu prostokąta wokół prostej

- a. na której leży jeden z boków
- b. równoległej do dłuższego boku
- c. równoległej do krótszego boku

Ćwiczenie 3

Bryła na rysunku powstała w wyniku obrotu pewnej figury płaskiej dookoła prostej.
Narysuj tę figurę i tę prostą.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4

Naszkicuj przekrój osiowy przedstawionych figur.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5

Narysuj bryłę obrotową, której przekrój osiowy jest

- a. trójkątem równoramiennym
- b. trójkątem równobocznym

Ćwiczenie 6

Narysuj bryłę obrotową, której przekrój osiowy jest

- a. prostokątem
- b. kwadratem

Ćwiczenie 7

Narysuj bryłę obrotową, której przekrój poprzeczny jest kołem.

Ćwiczenie 8

Bryła obrotowa powstała w wyniku obrotu prostokąta P wokół jednego z jego boków. Przekątna prostokąta P ma długość 5 cm i jest nachylona do jego boku pod kątem 60° . Jaka długość ma promień r podstawy tej bryły? Znajdź wszystkie rozwiązania.

Ćwiczenie 9

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Istnieje bryła obrotowa, której przekrój osiowy jest inny niż przekrój poprzeczny.

☐ Bryła, której każdy przekrój poprzeczny jest kołem, jest bryłą obrotową.

☐ Sześcian jest bryłą obrotową.

Ćwiczenie 10

Uzupełnij zdania.

- Część wspólna bryły obrotowej z płaszczyzną zawierającą oś obrotu to przekrój ... bryły.
- Przekrój poprzeczny bryły obrotowej to część wspólna tej bryły z płaszczyzną ... do osi obrotu.

Ćwiczenie 11

Arbuz przekrojono na pół. Pole tak otrzymanego przekroju jest w kształcie koła o polu $530,66 \text{ cm}^2$. Skóra arbuza ma grubość 2 cm. Oblicz, ile procent przekroju stanowi miąższ arbuza. Przyjmij $\pi = 3.14$. Odpowiedź zaokrąglij do jednej cyfry po przecinku.

Ćwiczenie 12

Narysuj bryłę obrotową powstałą w wyniku obrotu

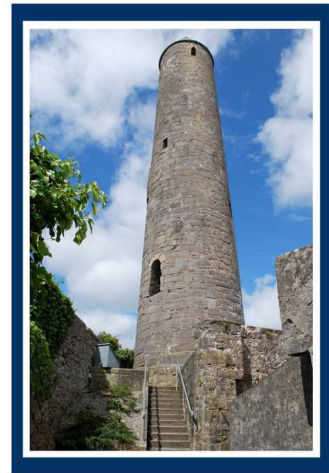
- a. trapezu prostokątnego wokół krótszego ramienia
- b. trapezu równoramiennego wokół dłuższej podstawy

Walec. Pole powierzchni walca

Budowa walca

Przykład 1

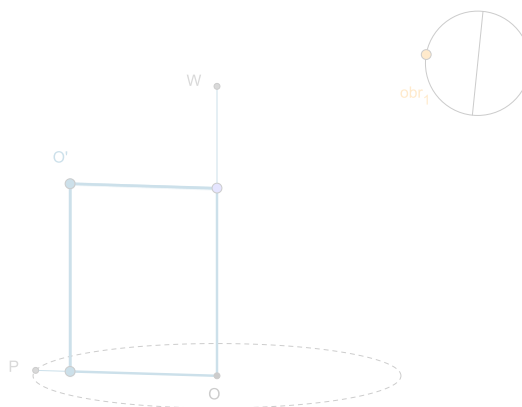
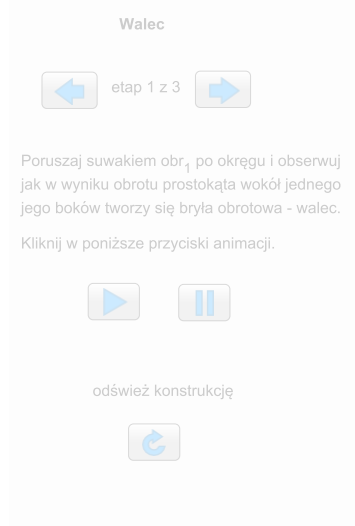
W jakim kształcie są wieże na zdjęciach? Jakie bryły geometryczne przypominają?



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 2

Zmieniaj wymiary obracającego się prostokąta. Jaka jest zależność między wysokością otrzymywanego walca a jego tworzącą? Jaka jest zależność między promieniem podstawy walca a długością boku prostokąta prostopadłego do osi obrotu?



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DvaowsLHi>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

W wyniku obrotu prostokąta wokół prostej przechodzącej przez jeden z boków otrzymujemy bryłę, zwaną walcem.

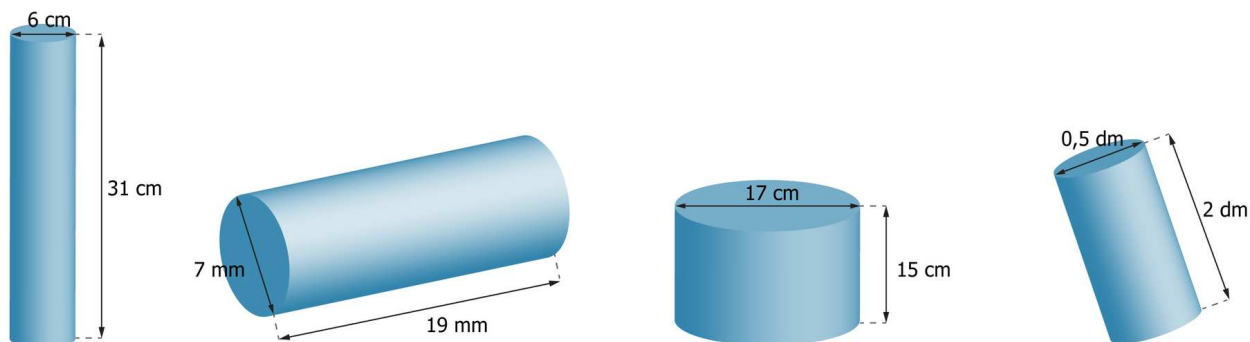
Walec ma dwie równoległe podstawy w kształcie przystających kół. Odcinek łączący podstawy walca i prostopadły do tych podstaw to wysokość walca. Wysokość jest równa

odległości podstaw walca.

Każdy odcinek zawarty w powierzchni bocznej walca o końcach należących do podstaw walca nazywamy tworzącą. Długość tworzącej walca jest równa jego wysokości.

Przykład 3

Określ dla każdego z walców jego wysokość, długość tworzącej, promień podstawy i średnicę podstawy.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przekroje walca

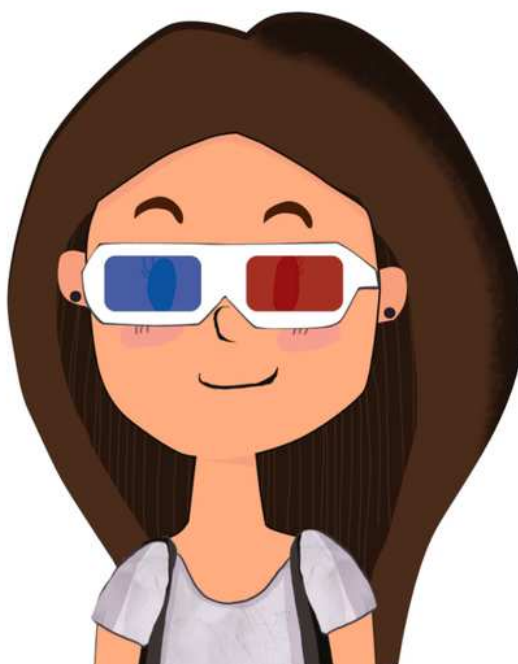
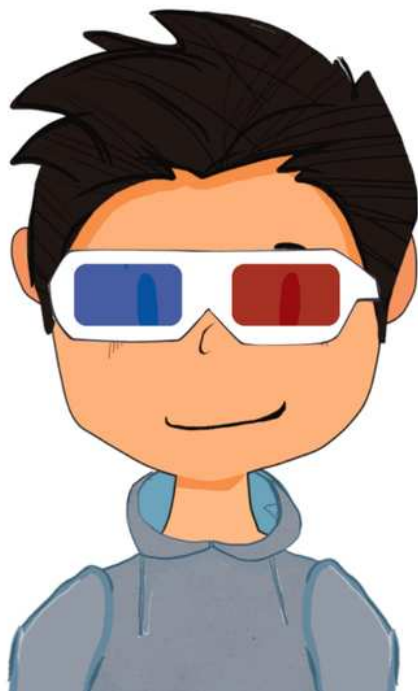
Przykład 4



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje baterię elektryczną. Kreślone są krawędzie – powstaje walec. Następnie przekroje skośne i poprzeczne dzielą walec na dwie bryły.

Przykład 5

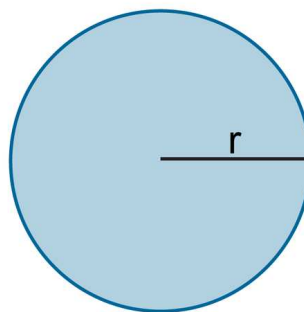
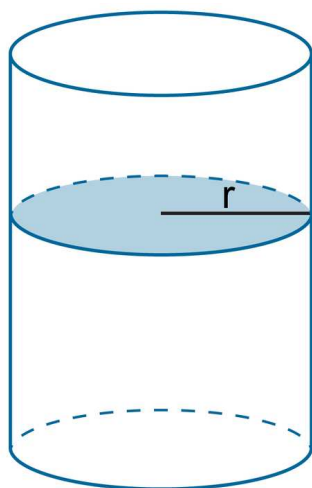


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Przykład 6



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przekroje walca

Oprócz przekroju osiowego i poprzecznego walec ma jeszcze inne przekroje. Ich kształt zależy od kąta nachylenia płaszczyzny przekroju do podstawy.

Konstrukcja dynamiczna ilustruje rodzaje tych przekrojów i sposób ich powstawania.

Obrotu płaszczyzny dokonasz poruszając poniższym suwakiem.

Jaki przekrój uzyskamy dla kąta $\alpha = 90^\circ$?

Jaki przekrój otrzymamy dla $\alpha \neq 90^\circ$?



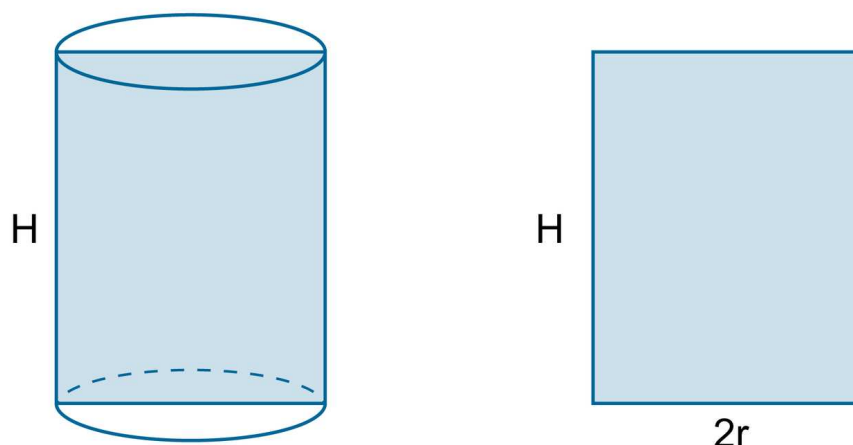
Zmieniaj długość promienia R podstawy walca i jego wysokość H przesuwając odpowiednio końce odcinków.

Zmieniaj położenie płaszczyzny przekroju poruszając punktem M po tworzącej walca.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DvaowsLHi>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 7



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 8

Przekrój osiowy walca jest prostokątem o szerokości 9 cm. Pole tego przekroju jest równe 108 cm^2 .

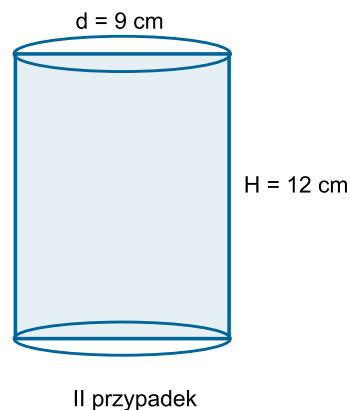
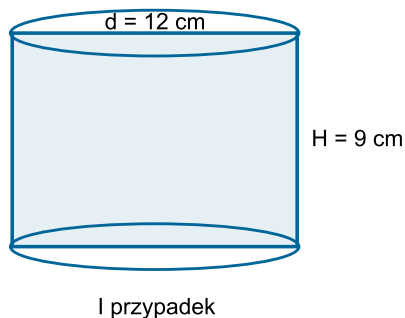
Określ wysokość i promień podstawy walca.

Obliczamy długość prostokąta, będącego przekrojem osiowym walca.

$$108 \text{ cm}^2 : 9 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$$

Prostokąt, będący przekrojem osiowym walca, ma wymiary 9 cm na 12 cm.

Możliwe są dwa przypadki.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

I przypadek

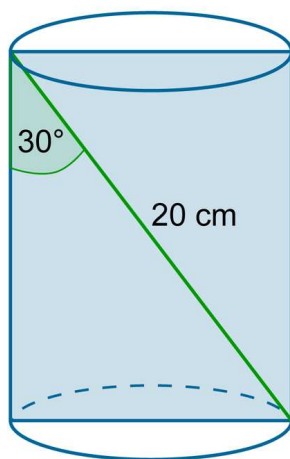
Wysokość walca jest równa 9 cm, a promień jego podstawy jest równy $12 \text{ cm} : 2 = 6 \text{ cm}$.

II przypadek

Wysokość walca jest równa 12 cm, a promień jego podstawy jest równy $9 \text{ cm} : 2 = 4,5 \text{ cm}$.

Przykład 9

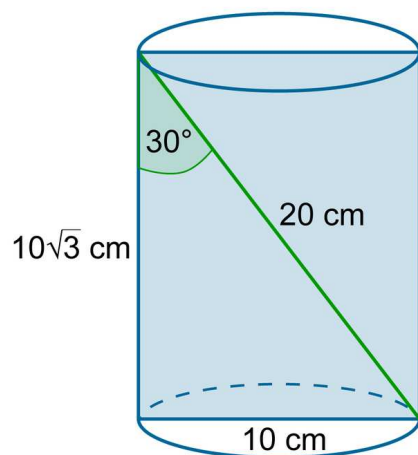
Przekrój osiowy walca jest prostokątem, którego przekątna długości 20 cm jest nachylona do dłuższego boku pod kątem 30° . Wysokość walca jest równa długości tego prostokąta. Oblicz pole podstawy walca.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przekątna dzieli prostokąt, będący przekrojem osiowym walca, na dwa przystające trójkąty prostokątne.

Przeciwprostokątna w tak otrzymanym trójkącie ma długość 20 cm, a jeden z kątów ostrych ma miarę 30° . W takim trójkącie naprzeciw kąta o mierze 30° leży przyprostokątna dwa razy krótsza od przeciwprostokątnej, czyli w tym przypadku o długości $20 \text{ cm} : 2 = 10 \text{ cm}$. Druga z przyprostokątnych ma długość $10\sqrt{3} \text{ cm}$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Promień podstawy walca jest więc równy $10 \text{ cm} : 2 = 5 \text{ cm}$.

Obliczamy pole koła, będącego podstawą walca.

$$P = \pi \cdot 5^2$$

$$P = 25\pi \text{ cm}^2$$

Pole podstawy walca jest równe $25\pi \text{ cm}^2$.

Przykład 10

Obwód przekroju poprzecznego walca jest równy $34\pi \text{ dm}^2$. Stosunek wysokości walca do promienia podstawy jest równy $7 : 9$. Oblicz wysokość walca.

Obliczamy promień r podstawy walca.

$$2\pi r = 34\pi / : 2\pi$$

$$r = 17 \text{ dm}$$

Korzystamy z tego, że stosunek wysokości H walca do promienia jego podstawy jest równy $7 : 9$.

$$\frac{H}{r} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{H}{17} = \frac{7}{9}$$

$$H = \frac{119}{9}$$

$$H = 13\frac{2}{9} \text{ dm}$$

Wysokość walca jest równa $13\frac{2}{9} \text{ cm}$.

Siatka walca. Pole powierzchni walca



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje stojące na stole kubki w kształcie walca. Kreślone są krawędzie jednego kubka – powstaje walec, który następnie rozkłada się na siatkę walca.

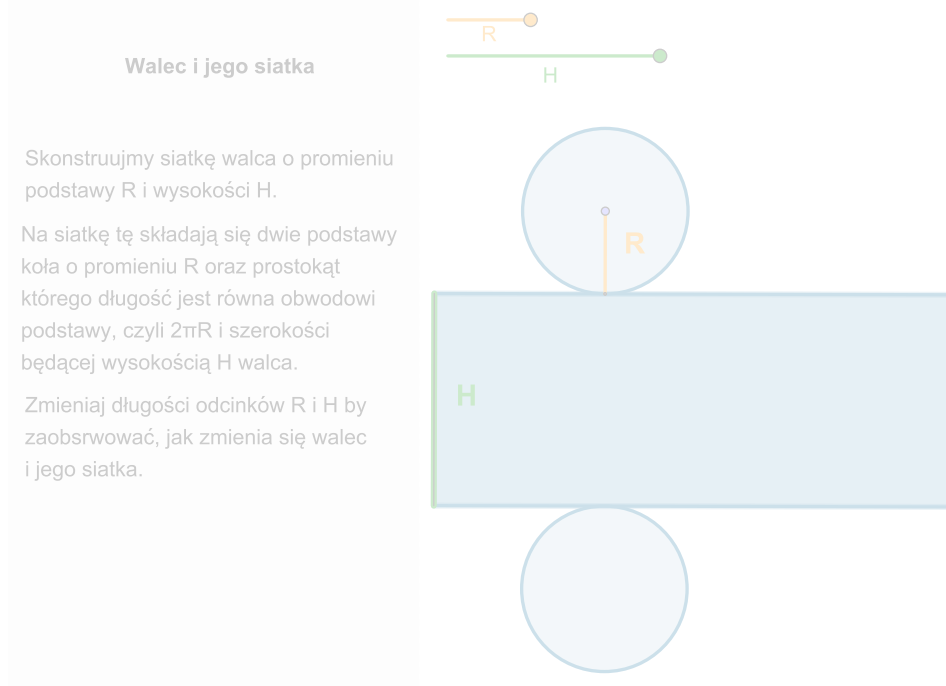


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje siatkę walca, która składa się w walec. Następnie walec zamienia się w kubek. Na stole stoją kubki w kształcie walca.

Przykład 11

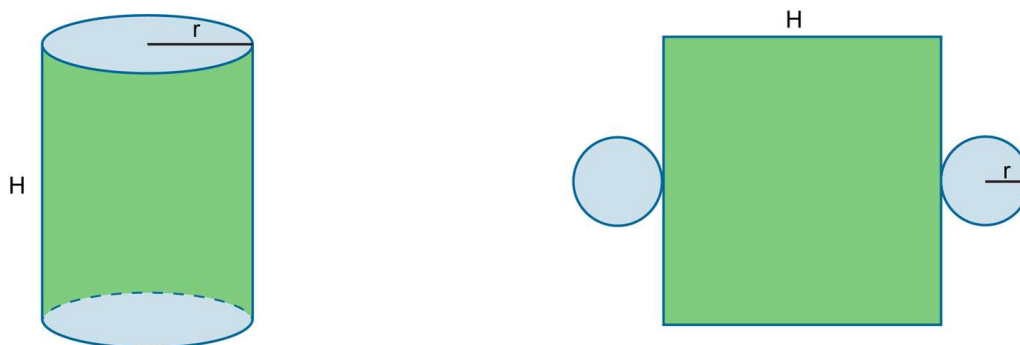
Obserwuj, jak wraz ze zmianą wysokości i promienia podstawy walca, zmieniają się wymiary figur tworzących siatkę walca. Co zauważasz?



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DvaowsLHi>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Siatka walca składa się z dwóch przystających kół i prostokąta. Promień każdego z tych kół jest równy promieniowi podstawy walca. Boki prostopadłe prostokąta są równe odpowiednio wysokości walca i obwodowi koła, będącego podstawą.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ważne!

Pole P powierzchni walca o wysokości H i promieniu podstawy r jest równe

$$P = 2 \cdot P_p + P_b$$

gdzie

- P_p - pole podstawy
- P_b - pole powierzchni bocznej.

- $P = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot H$

Przykład 12

Ile cm^2 blachy zużyto na wykonanie metalowej puszki w kształcie walca o wysokości 20 cm i średnicy 8 cm? Wynik podaj z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku. Promień podstawy walca jest równy $8 \text{ cm} : 2 = 4 \text{ cm}$. Obliczamy, ile blachy zużyto na wykonanie denka puszki.

$$P = \pi r^2$$

$$P_p = \pi \cdot 4^2$$

$$P_p = 16\pi \text{ cm}^2$$

Obliczamy, ile blachy użyto na wykonanie powierzchni bocznej puszki.

$$P_b = 2\pi \cdot 4 \cdot 20$$

$$P_b = 160\pi \text{ cm}^2$$

Teraz obliczamy, ile blachy użyto na wykonanie całej puszki.

$$P = 2 \cdot 16\pi + 160\pi = 192\pi$$

Liczbę π zastępujemy jej przybliżeniem.

$$P \approx 192 \cdot 3,14 = 602,88$$

$$P \approx 602,88 \text{ cm}^2$$

Na wykonanie puszki zużyto około 602, 88 cm^2 blachy.

Przykład 13

Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu na płaszczyźnie jest prostokątem o wymiarach 15 cm x 24 cm. Oblicz promień podstawy walca, wiedząc, że wysokość walca jest równa 15 cm.

Obwód koła, który jest podstawą walca, jest równy długości prostokąta, w kształcie którego jest powierzchnia boczna walca.

$$2\pi r = 24$$

$$r = \frac{24}{2\pi} = \frac{12}{\pi}$$

Promień podstawy walca jest równy $\frac{12}{\pi}$ cm.

Przykład 14

Tort ma kształt walca o wysokości 25 cm i średnicy podstawy 30 cm. Na pokrycie 100 cm^2 powierzchni tortu potrzeba 8 dag polewy. Oblicz, ile dag polewy należy

przygotować na pokrycie powierzchni tortu.

Polewą będzie pokryta podstawa górna walca, w kształcie którego jest tort i jego powierzchnia boczna. Obliczamy pole powierzchni do pokrycia.

$$P = 2\pi \cdot \left(\frac{30}{2}\right)25 + \pi \cdot \left(\frac{30}{2}\right)^2$$

$$P = 750\pi + 225\pi = 975\pi$$

$$P \approx 975 \cdot 3,14 = 3061,5$$

$$P \approx 3061,5 \text{ cm}^2$$

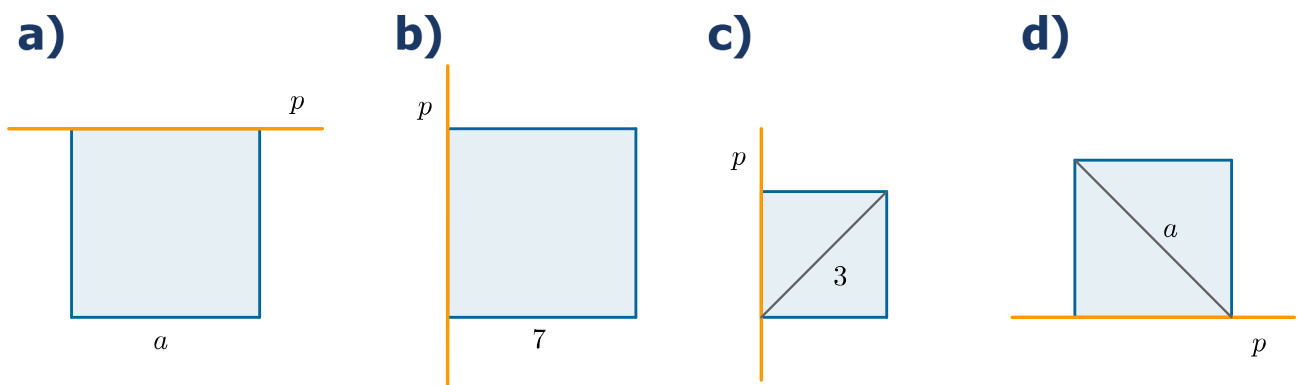
Obliczamy, ile dag polewy potrzeba.

$$(3061,5 : 100) \cdot 8 = 30,615 \cdot 8 = 244,92$$

Liczbę π zaokrągliliśmy z dołu, zatem żeby nie zbrakło polewy, należy przygotować jej trochę więcej niż 244,92 dag.

Ćwiczenie 1

Kwadrat obracamy wokół prostej p . Określ wysokość i promień podstawy tak otrzymanego walca.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2

Prostokąt o wymiarach 10 cm x 4 cm obracamy wokół dłuższego boku. Średnica podstawy tak otrzymanego walca jest równa

☐ 20 cm

☐ 8 cm

☐ 4 cm

☐ 10 cm

Ćwiczenie 3

Uzupełnij zdania.

- a. Przekrój osiowy walca jest kwadratem o polu $0,25 \text{ dm}^2$. Promień podstawy tego walca jest równy ... dm.
- b. Przekrój osiowy walca jest kwadratem. Pole podstawy walca jest równe 81π . Wysokość tego walca jest równa ...
- c. Przekrój osiowy walca jest kwadratem. Średnica podstawy walca jest równa 12 cm. Wysokość walca jest równa ... cm.

Ćwiczenie 4

Uzupełnij.

Tabela. Dane

Wysokość walca	Średnica podstawy walca	Pole przekroju osiowego	Pole przekroju płaszczyzną równoległą do podstawy	Długość przekątnej przekroju osiowego
5		30π		
			16π	10
	12	120		
1,2			$1,44\pi$	

Ćwiczenie 5

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6

Pole powierzchni całkowitej walca jest równe 748. Promień podstawy walca jest równy 7. Przyjmij $\pi = \frac{22}{7}$. Wtedy wysokość walca jest równa

☐ 8

☐ 49

☐ 7

☐ 10

Ćwiczenie 7

Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu na płaszczyźnie jest prostokątem o wymiarach 10 dm x 12 dm. Oblicz pole powierzchni całkowitej walca. Rozważ dwa przypadki.

Ćwiczenie 8

Dany jest prostokąt o wymiarach 6 cm na 8 cm. W wyniku obrotu tego prostokąta wokół prostej, na której leży dłuższy bok, otrzymano walec W , a w wyniku obrotu tego prostokąta wokół prostej, na której leży krótszy bok, otrzymano walec $W1$.

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- ☐ Pole podstawy górnej walca W jest równe polu podstawy dolnej walca $W1$.
- ☐ Średnica podstawy walca W jest mniejsza od średnicy podstawy walca $W1$.
- ☐ Pola powierzchni całkowitej walca W jest równe polu powierzchni całkowitej walca $W1$.
- ☐ Pole powierzchni bocznej walca W jest większe od pola powierzchni bocznej walca $W1$.
- ☐ Pole przekroju osiowego walca W jest większe od pola przekroju osiowego walca $W1$.
- ☐ Wysokość walca W jest większa od wysokości walca $W1$.

Ćwiczenie 9

Przekątna przekroju osiowego walca ma długość $4\sqrt{2}$ cm. Przekątna ta tworzy kąt o mierze 45° z jednym z boków prostokąta, będącego przekrojem osiowym walca. Oblicz pole powierzchni całkowitej walca.

Ćwiczenie 10

Kwadrat o boku długości 16 cm obrócono wokół jednego z boków. Oblicz pole powierzchni bocznej tak otrzymanego walca.

Ćwiczenie 11

Walec powstał w wyniku obrotu prostokąta wokół jednego z jego boków. Przekątna tego prostokąta ma długość 5 cm i jest nachylona do jego boku pod kątem 60° . Oblicz pole powierzchni bocznej walca.

Ćwiczenie 12

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Tworzące walca mogą mieć różne długości.

☐ Istnieje przekrój walca, który nie jest kołem ani prostokątem.

☐ Każdy przekrój poprzeczny walca jest kołem.

Ćwiczenie 13

Udowodnij, że wszystkie przekroje poprzeczne walca są przystającymi kołami.

Ćwiczenie 14

Prostokąt o wymiarach a cm x b cm obrócono wokół boku o długości a cm i otrzymano walec W_1 . Ten sam prostokąt obrócono wokół boku o długości b cm i otrzymano walec W_2 . Walce W_1 i W_2 mają równe pola całkowite. Wykaż, że prostokąt ten jest kwadratem.

Ćwiczenie 15

Dwa prostokąty P_1 i P_2 są podobne w skali 1 : 2. Prostokąt P_1 ma wymiary 5 cm x 10 cm. Oblicz pole powierzchni bocznej walca powstałego w wyniku obrotu prostokąta P_2 wokół dłuższego boku.

Ćwiczenie 16

Oblicz pole przekroju osiowego walca otrzymanego w wyniku obrotu prostokąta o wymiarach 20 cm x 5 cm wokół krótszego boku.

Ćwiczenie 17

Przekątna przekroju osiowego walca ma długość $12\sqrt{2}$ i tworzy z płaszczyzną podstawy walca kąt o mierze 45° . Oblicz pole powierzchni całkowitej walca.

Ćwiczenie 18

Udowodnij, że stosunek powierzchni bocznej dowolnego walca do powierzchni przekroju osiowego tego walca jest zawsze taki sam.

Ćwiczenie 19

Przekątna przekroju osiowego walca ma długość 10 cm, a wysokość walca 8 cm. Oblicz pole powierzchni otrzymanej po rozwinięciu tego walca na płaszczyźnie.

Ćwiczenie 20

Pole powierzchni całkowitej walca jest równe 216π . Wysokość walca jest równa średnicy jego podstawy. Oblicz promień podstawy walca oraz jego wysokość.

Objętość walca

Wzór na objętość walca

Przykład 1

Wyobraź sobie, że pojemnik w kształcie walca o wysokości $H > 1$ wypełniamy jednakowymi krążkami o wysokości 1 i promieniu podstawy równym promieniowi podstawy pojemnika.

Ile takich krążków zmieści się w pojemniku?

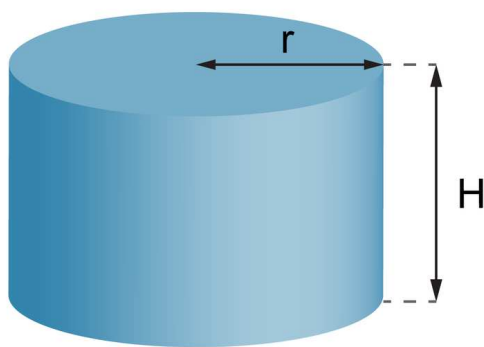
Jeśli przyjmiemy, że objętość takiego krążka jest równa V , to ile wynosi objętość pojemnika?

Jeśli teraz zwiększymy promień podstawy pojemnika i analogicznie promień podstawy krążków, to czy objętość pojemnika zmieni się?

Objętość walca zależy od jego wysokości i pola podstawy. Obliczamy ją podobnie jak objętość graniastopuła.

Ważne!

Objętość V walca o promieniu podstawy r jest równa iloczynowi pola podstawy P_p walca przez jego wysokość H .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

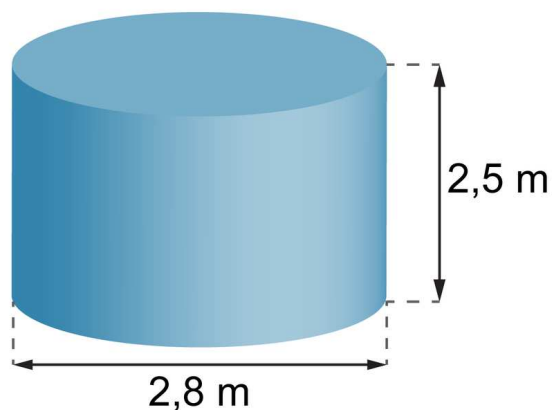
$$V = P_p \cdot H$$

$$V = \pi r^2 \cdot H$$

Przykład 2

Ile litrów wody mieści się w pojemniku o wysokości 2,5 m i średnicy podstawy 2,8 m?

Przyjmij $\pi = \frac{22}{7}$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Promień podstawy pojemnika wynosi $2,8 \text{ m} : 2 = 1,4 \text{ m}$. Obliczamy objętość walca.

$$V = \pi r^2 \cdot H$$

$$V = \frac{22}{7} \cdot (1,4)^2 \cdot 2,5$$

$$V = \frac{22}{7} \cdot \frac{14}{10} \cdot \frac{14}{10} \cdot \frac{25}{10}$$

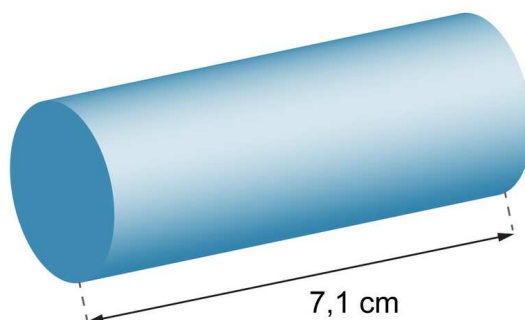
$$V = \frac{22 \cdot 10 \cdot 7}{1 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{77}{5}$$

$$V = 15,4 \text{ m}^3$$

Wiadomo, że $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ l}$, stąd $15,4 \text{ m}^3$ to $15,4 \cdot 1000 \text{ l} = 15400 \text{ l}$.
W pojemniku mieści się 15 400 l wody.

Przykład 3

Objętość walca przedstawionego na rysunku jest równa $89,2 \text{ cm}^3$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oblicz promień podstawy tego walca. Przyjmij $\pi = 3\frac{10}{71}$.
Korzystamy ze wzoru na objętość walca.

$$V = \pi r^2 \cdot H$$

$$89,2 = 3 \frac{10}{71} \cdot r^2 \cdot 7,1$$

$$\frac{892}{10} = \frac{223}{71} \cdot \frac{71}{10} \cdot r^2$$

$$892 = 223r^2$$

$$r^2 = 4$$

$$r = 2$$

bo

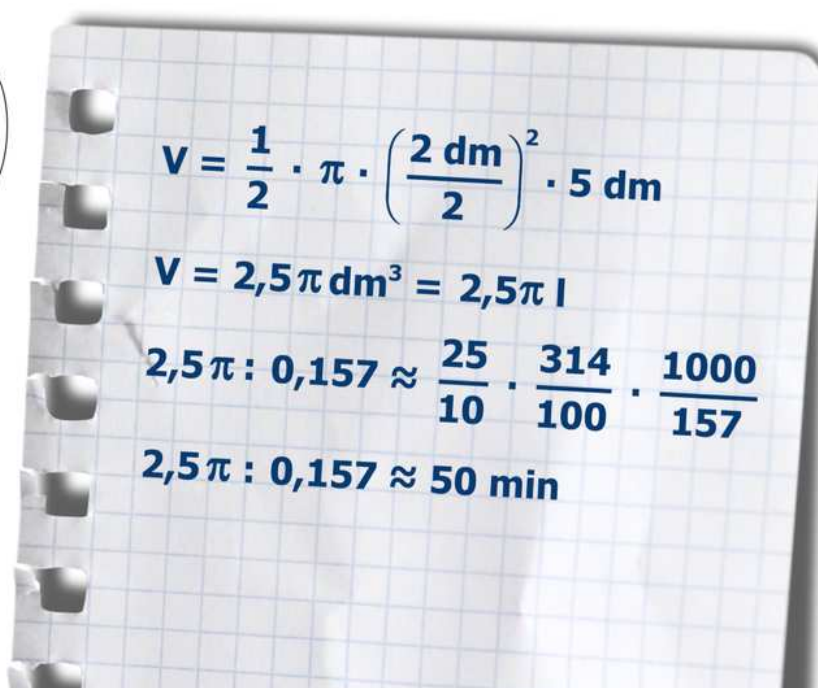
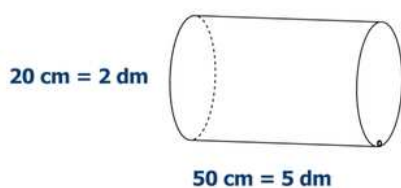
$$r > 0$$

$$r = 2 \text{ cm}$$

Promień podstawy walca wynosi 2 cm.

Obliczanie objętości walca

Przykład 4

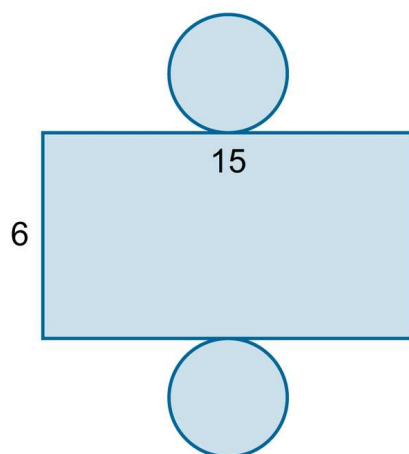


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 5

Oblicz objętość walca, którego siatkę przedstawia rysunek. Przyjmij $\pi = 3$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

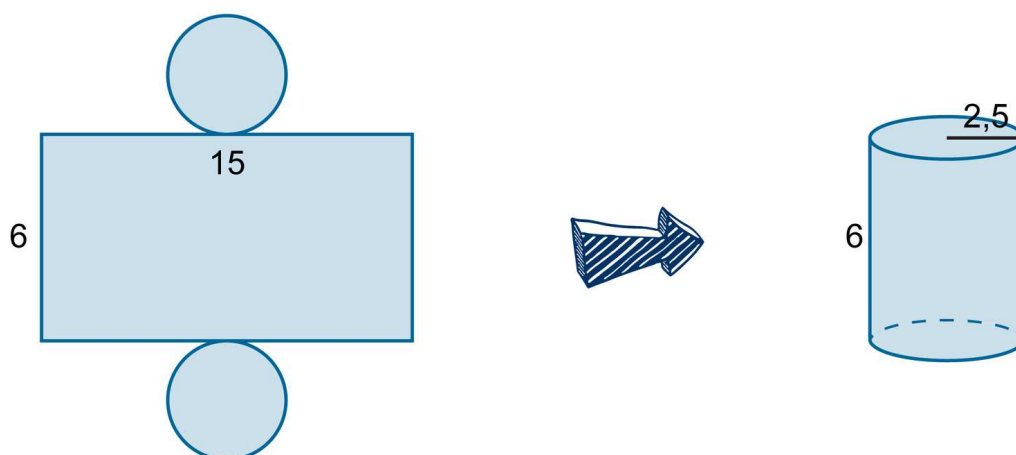
Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu na płaszczyźnie jest prostokątem, którego długość jest równa obwodowi koła, będącego podstawą walca. Obliczamy promień r tego koła.

$$2\pi r = 15$$

$$2 \cdot 3 \cdot r = 15$$

$$r = 2,5$$

Wysokość H walca jest równa szerokości prostokąta, czyli $H = 6$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Obliczamy objętość walca.

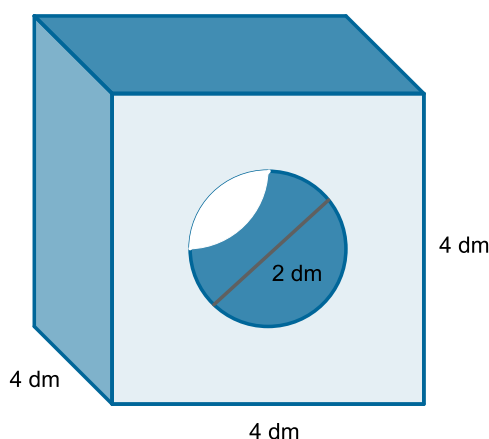
$$V = \pi r^2 \cdot H$$

$$V = 3 \cdot (2,5)^2 \cdot 6 = 112,5$$

Objętość walca jest równa 112,5.

Przykład 6

Element przedstawiony na rysunku wykonany jest ze stali o gęstości $7,5 \text{ kg/dm}^3$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oblicz masę elementu.

Element jest w kształcie sześcienniej kostki z wydrążonym otworem w kształcie walca. Obliczamy najpierw objętość V elementu. Jest ona równa różnicy objętości sześcianu i objętości walca o wysokości 4 dm i promieniu podstawy $2 \text{ dm} : 2 = 1 \text{ dm}$.

$$V = 4^3 - \pi \cdot 1^2 \cdot 4$$

$$V = (64 - 4\pi) \text{ dm}^3$$

Masa m ciała jest równa iloczynowi objętości tego ciała przez jego gęstość.

$$m = V \cdot 7,5$$

$$m \approx (64 - 4 \cdot 3,14) \cdot 7,5 = 385,8$$

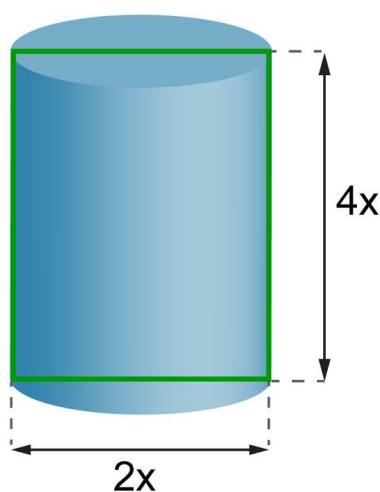
$$m \approx 385,8 \text{ kg}$$

Masa elementu wynosi około 385,8 kg.

Przykład 7

Przekrój osiowy walca jest prostokątem, w którym jeden z boków, równy wysokości walca, jest dwukrotnie dłuższy od drugiego.

Pole powierzchni walca jest równe $250\pi \text{ cm}^2$. Oblicz objętość walca.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oznaczmy:

- x – promień podstawy walca w cm
- $4x$ – wysokość walca w cm, gdzie $x > 0$.

Wtedy pole P powierzchni walca jest równe;

$$P = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot 4x$$

$$P = 2\pi x^2 + 8\pi x^2 = 10\pi x^2$$

Jednocześnie wiemy, że pole to jest równe $250\pi \text{ cm}^2$.

$$10\pi x^2 = 250\pi$$

$$x^2 = 25$$

$$x = 5 \text{ cm}$$

$$4x = 20 \text{ cm}$$

Promień podstawy walca jest więc równy 5 cm, a jego wysokość 20 cm. Obliczamy objętość walca.

$$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 20 = 500\pi$$

$$V = 500\pi \text{ cm}^3$$

Objętość walca jest równa $500\pi \text{ cm}^3$.

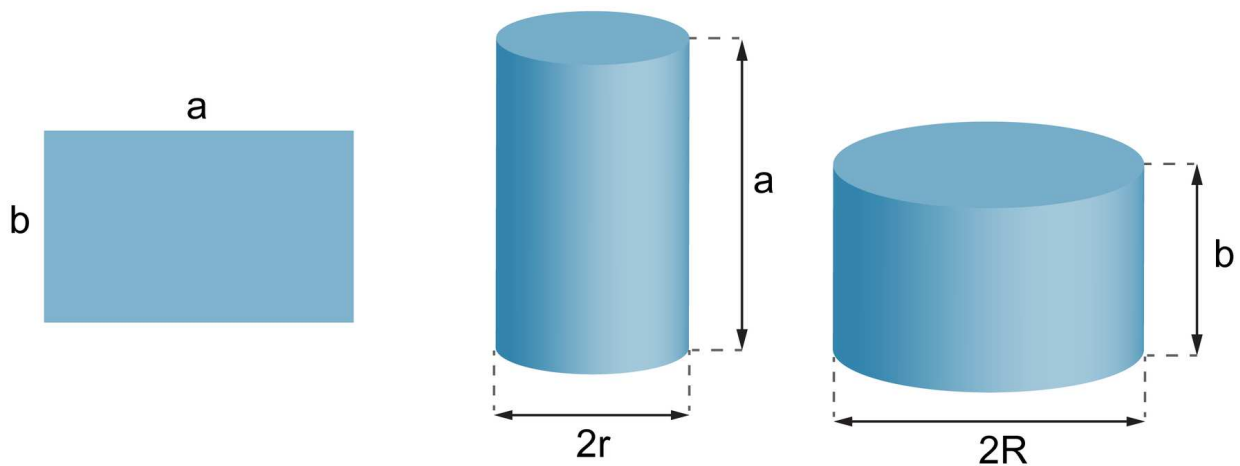
Ćwiczenie 1

Kartkę papieru w kształcie prostokąta o wymiarach $a \text{ cm}$ na $b \text{ cm}$ można zwinąć na dwa sposoby,

uzyskując za każdym razem walec. Jeden z nich będzie niższy i grubszy, drugi wyższy i chudszy. Który w tych walców ma większą objętość?

Poniższy rysunek ilustruje w przybliżeniu kartkę papieru i dwa uzyskane walce.

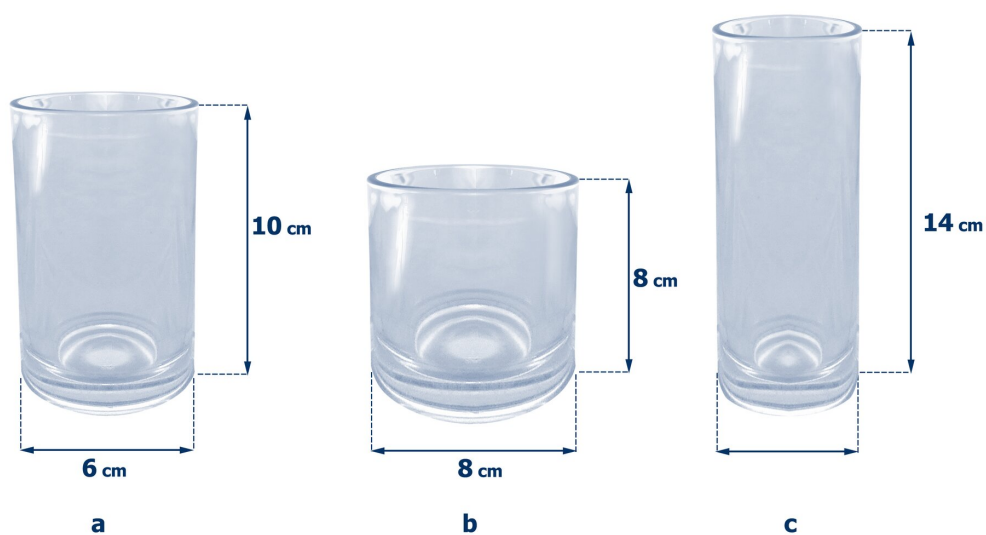
Przyjmując za a i b długość i szerokość kartki, wyznaczmy najpierw promień podstawy każdego z walców.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2

Czy w każdej ze szklanek, jak przedstawiono jak na rysunku, zmieści się ćwierć litra wody?
Przyjmij $\pi = 3,14$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3

Butla gazowa domowa – parametry techniczne

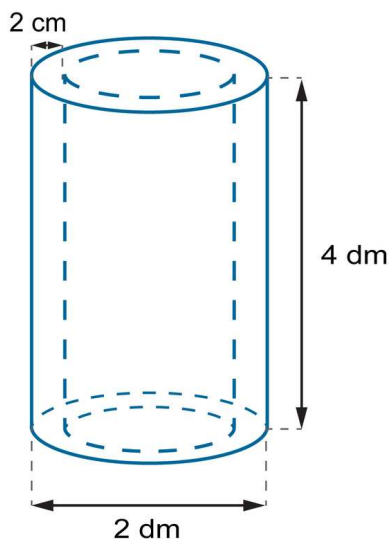
Tabela. Dane

Wysokość zewnętrzna bez zaworu	590 mm
Masa butli	10,2 kg
Średnica zewnętrzna	300 mm
Średnica wewnętrzna	260 mm

Przyjmij, że butla gazowa ma kształt walca. Oblicz jej pojemność. Przyjmij $\pi = 3,14$.

Ćwiczenie 4

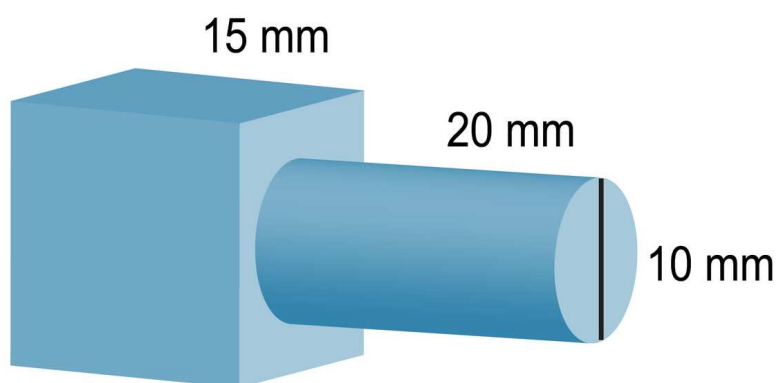
Rurkę, taką jak na rysunku przetopiono i wykonano z niej sześcienną kostkę. Oblicz pole powierzchni tej kostki. Wynik podaj z dokładnością do 1 cm^2 .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5

Element betonowy składa się z części w kształcie sześcianu i części w kształcie walca. Ile takich elementów można wykonać z 1 m^3 betonu? Przyjmij $\pi = 3,14$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6

Pojemnik z sokiem jest prostopadłościem o wymiarach $25 \text{ cm} \times 12,5 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$. Sok rozlano do szklanek w kształcie walca o średnicy podstawy 5 cm i wysokości 10 cm . Ile szklanek napełniono sokiem? W obliczeniach przyjmij $\pi = 3,14$.

Ćwiczenie 7

Która z brył ma większą objętość - sześcian o krawędzi 6 cm czy walec o promieniu 3 cm i wysokości 10 cm. W obliczeniach przyjmij $\pi = 3,14$.

Ćwiczenie 8

Głównymi składnikami powietrza są azot i tlen. Zawartość procentowa azotu wynosi 78%, a tlenu 21%. Jeden 1 dm^3 powietrza ma masę 0,66 g. Jaka jest masa azotu, a jaka tlenu w butli w kształcie walca o średnicy dna 40 cm i wysokości 150 cm? W obliczeniach przyjmij $\pi = 3,14$.

Ćwiczenie 9

Walec powstał w wyniku obrotu prostokąta o bokach długości 4 cm i 8 cm dookoła krótszego boku. Oblicz objętość walca.

Ćwiczenie 10

Długości boków prostokąta pozostają w stosunku 1 : 2. Prostokąt obraca się raz wokół dłuższego boku, a raz wokół krótszego boku. Który z tak powstałych walców będzie miał większą objętość i ile razy, a który będzie miał większe pole powierzchni całkowitej i ile razy?

Ćwiczenie 11

Oblicz pole powierzchni bocznej i objętość walca, którego przekrój osiowy jest kwadratem o polu równym 144 cm^2 .

Ćwiczenie 12

Objętość walca jest równa $81 \pi \text{ cm}^3$. Wysokość walca jest 3 razy większa od promienia podstawy. Oblicz promień podstawy i wysokość tego walca.

Ćwiczenie 13

Dwa walce W_1 oraz W_2 mają jednakowe objętości. Długość promienia podstawy walca W_1 jest dziesięciokrotnie mniejsza od długości promienia podstawy walca W_2 . Ile razy wysokość walca W_1 jest większa od wysokości walca W_2 ?

Ćwiczenie 14

Wysokość walca jest równa promieniowi podstawy tego walca. Objętość walca jest równa $343 \pi \text{ cm}^3$. Oblicz pole podstawy tego walca.

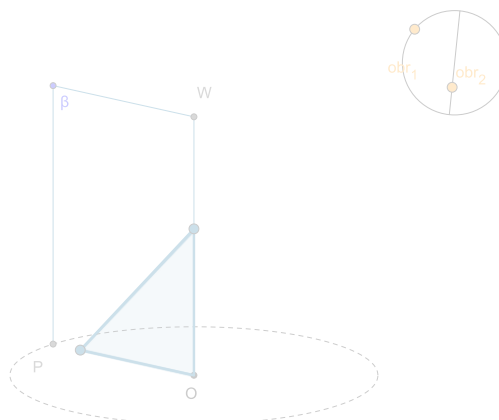
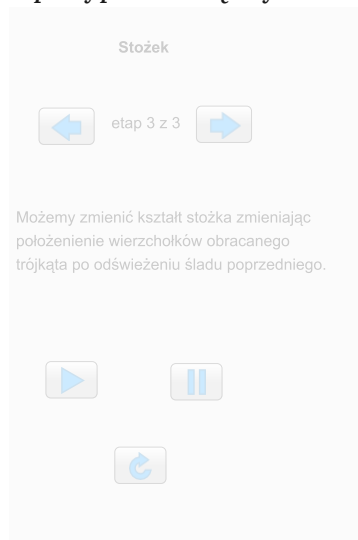
Ćwiczenie 15

Jaką pojemność ma naczynie w kształcie walca o średnicy podstawy 24 cm i wysokości 15 cm?

Stożek. Pole powierzchni stożka

Przykład 1

Zaobserwuj, jaką bryłę otrzymujemy w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego wokół jednej z przyprostokątnych. W kształcie jakiej figury jest podstawa bryły? Ile ma wierzchołków?



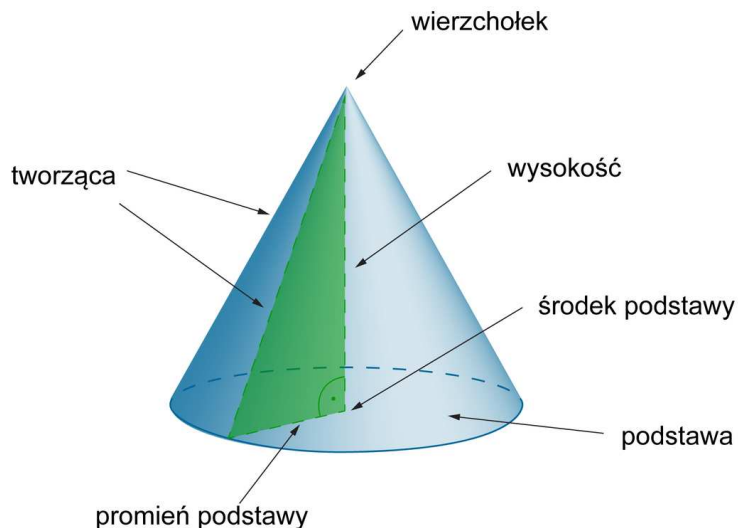
Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DbKCVKgZF>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

W wyniku obrotu trójkąta prostokątnego wokół prostej, na której leży jedna z przyprostokątnych, otrzymujemy bryłę, zwaną **stożkiem**.

Prosta ta jest **osią obrotu** stożka. Jest to również **oś symetrii** stożka. **Podstawą stożka** jest koło. **Wysokość H** stożka jest równa przyprostokątnej, wokół której obracaliśmy trójkąt, a promień r podstawy jest równy drugiej z przyprostokątnych. Wysokość jest prostopadła do płaszczyzny, na której leży podstawa stożka, a więc i do każdego z promieni podstawy. Wierzchołek obracanego trójkąta nieleżący na podstawie to **wierzchołek stożka**.

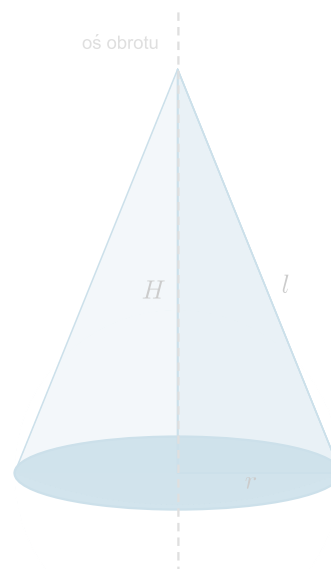
Przeciwprostokątna obracanego trójkąta zakresliła **powierzchnię boczną** stożka. Jest ona **tworzącą stożka**. Tworzącą stożka jest zatem każdy odcinek łączący wierzchołek stożka z punktem leżącym na okręgu będącym brzegiem podstawy.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Stożek

Stożek to bryła, która powstała w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego dookoła prostej zawierającej jedną z przyprostokątnych.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DbKCVKgZF>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 2

Na oklejenie kartonowej czapeczki w kształcie stożka zużyto 44 cm niebieskiej taśmy. Wysokość czapeczki jest trzykrotnie większa od promienia podstawy. Oblicz tę wysokość. Przyjmij

$$\pi = \frac{22}{7}$$

Z treści zadania wynika, że długość okręgu, będącego brzegiem podstawy stożka, w kształcie którego jest czapeczka, jest równy 44 cm. Obliczmy promień r tego okręgu.

$$2\pi r = 44$$

$$2 \cdot \frac{22}{7} \cdot r = 44$$

$$r = 7 \text{ cm}$$

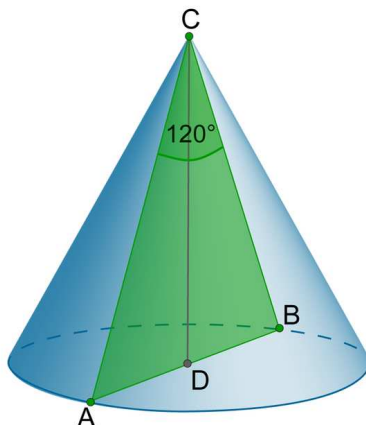
Wysokość czapeczki jest trzykrotnie większa od promienia, czyli wynosi

$$3 \cdot 7 \text{ cm} = 21 \text{ cm}$$

Przykład 3

W trójkącie równoramiennym ABC kąt ACB między ramionami ma miarę 120° , a ramię BC ma długość 10 dm.

Trójkąt ten obrócono wokół prostej, na której leży wysokość CD. Oblicz średnicę podstawy tak utworzonego stożka i jego wysokość.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Kąt BCD jest połową kąta ACB, ma zatem miarę 60° .

Trójkąt BCD jest więc trójkątem prostokątnym, w którym jeden z kątów ostrych ma miarę 60° . Z własności takiego trójkąta wynika, że

$$|CD| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$$

$$|BD| = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

Zatem wysokość stożka jest równa 5 dm, a średnica podstawy ma długość

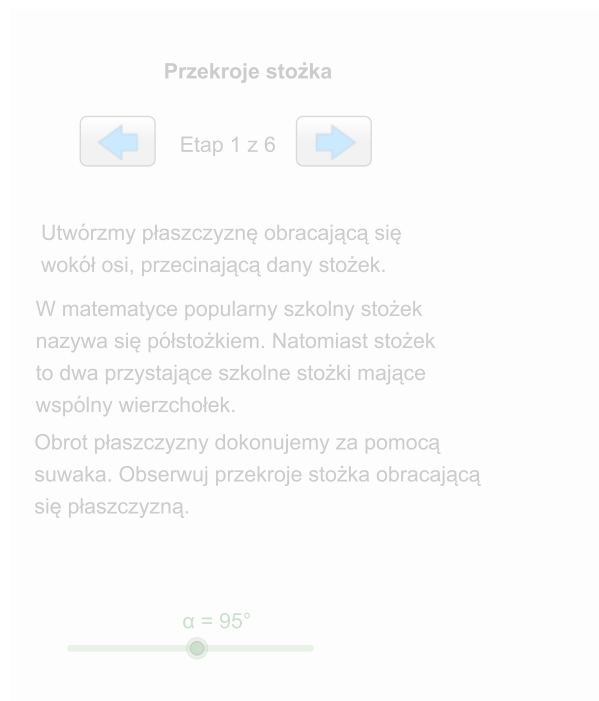
$$2 \cdot 5\sqrt{3} \text{ dm} = 10\sqrt{3} \text{ dm}$$

Przekroje stożka

Przykład 4

Przyjrzyj się przekrojom stożka. Jaki kształt ma przekrój osiowy? Jaki kształt ma przekrój poprzeczny?

Dowiedz się, jak nazywa się figura otrzymana w wyniku przekroju stożka płaszczyzną, która nie jest ani równoległa, ani prostopadła do podstawy.

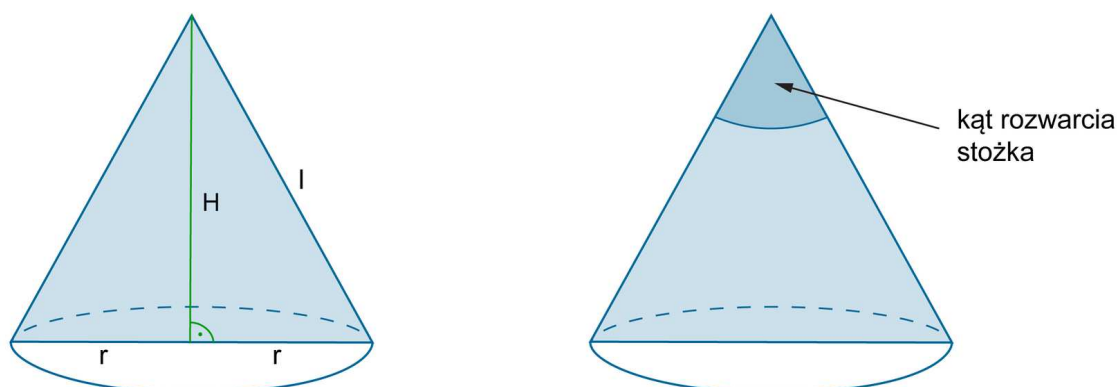


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DbKCVKgZF>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Ważne!

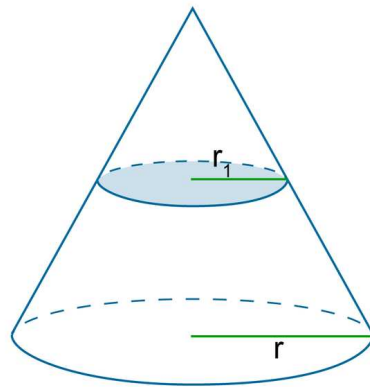
Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równoramiennym. Podstawa tego trójkąta jest równa średnicy podstawy stożka, ramię jest równe tworzącej, a wysokość poprowadzona z wierzchołka między ramionami jest równa wysokości stożka.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ważne!

Przekrój poprzeczny stożka jest kołem. Promień tego koła jest nie większy od promienia podstawy stożka.



$$r_1 \leq r$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 5

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem, w którym jeden z kątów ma miarę 160° . Znajdź miary pozostałych kątów tego trójkąta.

Trójkąt będący przekrojem osiowym stożka jest równoramienny. Kąt o mierze 160° jest kątem rozwartym, zatem jest kątem między ramionami tego trójkąta. Kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego mają równe miary.

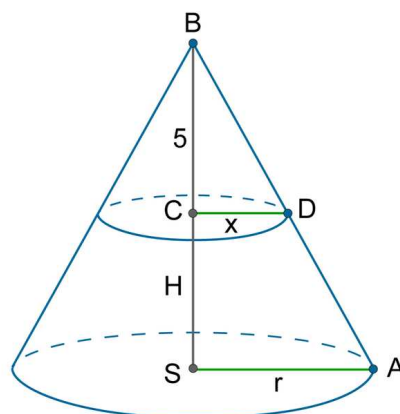
Każdy z nich jest więc równy

$$\frac{180^\circ - 160^\circ}{2} = 10^\circ$$

Pozostałe kąty trójkąta są równe $10^\circ, 10^\circ$.

Przykład 6

Wysokość stożka jest równa 12, a średnica podstawy ma długość 7. W odległości 5 od wierzchołka przecięto stożek płaszczyzną prostopadłą do wysokości. Oblicz pole tak utworzonego przekroju.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oznaczmy:

- B - wierzchołek stożka,
- C - środek przekroju poprzecznego,
- $|CD| = x$ - promień przekroju poprzecznego,

- $|SA| = r$ - promień podstawy stożka,
- H - wysokość stożka.

Zauważmy, że trójkąty BCD i BSA są podobne na podstawie cechy podobieństwa trójkątów kąt-kąt-kąt. Istotnie: oba trójkąty są prostokątne, kąt SBA jest kątem wspólnym obu trójkątów i $|\sphericalangle CDB| = |\sphericalangle BSA|$ - jako kąty odpowiadające przy prostych równoległych.

Zapisujemy proporcję wynikającą z podobieństwa tych trójkątów i wyznaczamy promień przekroju poprzecznego.

$$\frac{5}{x} = \frac{H}{r}$$

$$\frac{5}{x} = \frac{12}{\frac{7}{2}}$$

$$12x = \frac{35}{2}$$

$$x = \frac{35}{2} \cdot \frac{1}{12}$$

$$x = \frac{35}{24}$$

Obliczamy pole przekroju.

$$P = \pi x^2$$

$$P = \left(\frac{35}{24}\right)^2 \cdot \pi$$

$$P = \frac{1225\pi}{276} = 4\frac{121}{276}\pi$$

Pole przekroju stożka jest równe $4\frac{121}{276}\pi$.

Siatka stożka

Przykład 7

Wytnij z papieru trzy koła.

Pierwsze koło przetnij na pół. Drugie przetnij wzdłuż średnic na 4 równe części.

Z trzeciego wytnij dowolny wycinek koła. Zwiń wycięte figury tak, aby otrzymać „czapeczkę”.

Jaki ma kształt każda z otrzymanych „czapeczek”?



Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DbKCVKgZF>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Aniamcja

Przykład 8

Wytnij z papieru koło. Oznacz jego środek S , a promień r . Przetnij koło wzdłuż promienia i zwiń tak, aby promienie wyznaczone przez miejsce przecięcia pokryły się. Zepnij tak otrzymaną powierzchnię boczną stożka.

- Jaka jest długość tworzącej?
- Jak obliczyć promień podstawy?
- Który z punktów koła jest wierzchołkiem stożka?
- W jakim kształcie jest powierzchnia boczna stożka?
- Z jakich figur składa się powierzchnia całkowita stożka?

Przykład 9

Zaobserwuj, jak zmienia się powierzchnia boczna stożka, gdy zmieniamy jego wysokość. Jaka jest długość promienia podstawy stożka, a jaka tworzącej, gdy powierzchnia boczna jest półkolem?

Pole stożka

← etap 3 z 3 →

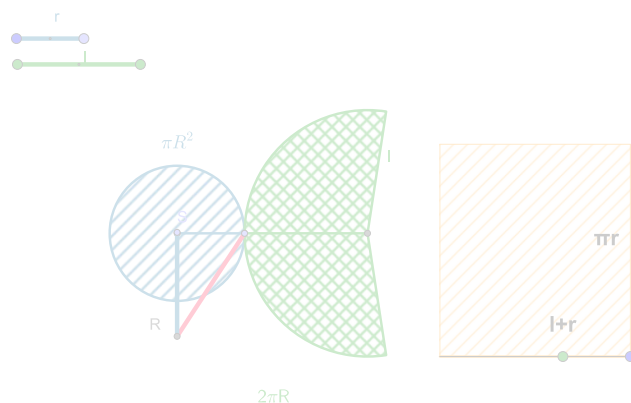
Zatem pole całkowite stożka =

$$Pole_{stożka} = \pi \cdot R^2 + \pi \cdot R \cdot l =$$

$$= \pi \cdot R(R + l)$$

Jak widać jest ono równe polu prostokąta o bokach πR , oraz $R+l$. Ilustruje to konstrukcja obok.

↺

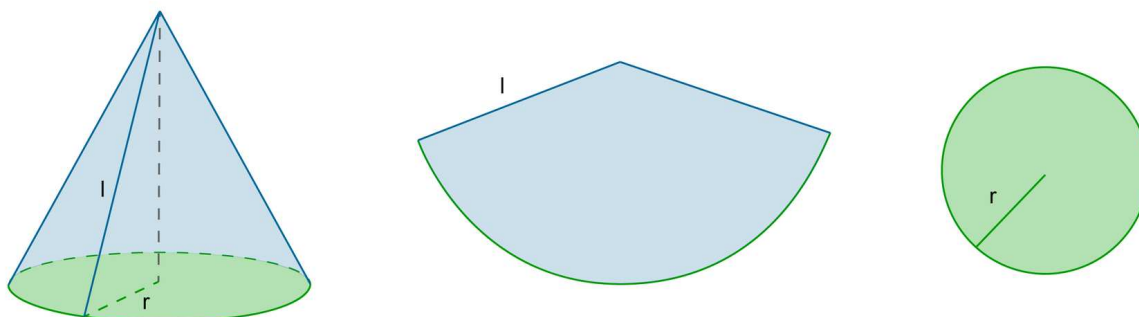


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DbKCVKgZF>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Powierzchnia boczna stożka, po rozłożeniu na płaszczyźnie, jest wycinkiem kołowym. Siatka stożka składa się z koła, będącego podstawą stożka i wycinka koła, będącego powierzchnią boczną.

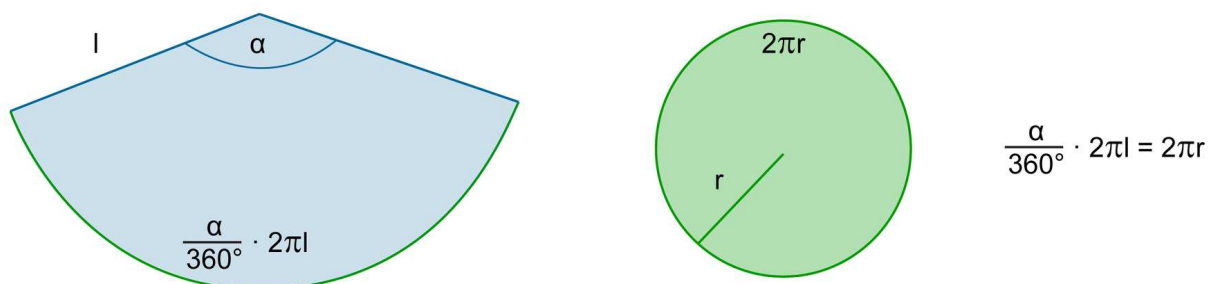
Ważne!



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Tworząca stożka jest równa promieniowi wycinka koła, będącego powierzchnią boczną stożka.

Obwód podstawy stożka jest równy długości łuku wyznaczonego przez wycinek koła, będący powierzchnią boczną.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 10

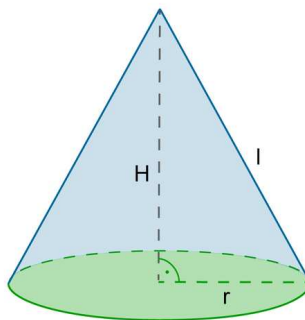
Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu na płaszczyźnie jest półkolem, którego promień jest równy 8. Oblicz wysokość stożka.

Obliczamy najpierw promień r podstawy stożka.

$$2\pi r = \frac{2\pi \cdot 8}{2}$$

$$r = 4$$

Aby obliczyć wysokość H stożka, korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta, którego boki mają długości H , r , l .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

$$H^2 + r^2 = l^2$$

$$H^2 + 4^2 = 8^2$$

$$H^2 = 64 - 16$$

$$H^2 = 48$$

$$H = \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$$

Wysokość stożka jest równa $4\sqrt{3}$.

Przykład 11

Podstawą stożka jest koło o promieniu $r = 16$ cm. Powierzchnia boczna po rozwinięciu na płaszczyźnie jest wycinkiem koła o promieniu 18 cm. Oblicz miarę kąta środkowego wyznaczającego ten wycinek.

Obliczamy obwód podstawy stożka.

$$L = 2\pi r$$

$$L = 2\pi \cdot 16$$

$$L = 32\pi \text{ cm}$$

Oznaczmy: α - miara kąta środkowego wyznaczającego wycinek, będący powierzchnią boczną stożka.

Obliczamy długość łuku wyznaczającego wycinek koła.

$$L_W = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 18$$

$$L_W = \frac{\alpha}{10^\circ} \pi \text{ cm}$$

Porównujemy obwód podstawy stożka i długość łuku wycinka koła i wyznaczamy α .

$$32\pi = \frac{\alpha}{10^\circ} \cdot \pi$$

$$\alpha = 320^\circ$$

Miara kąta środkowego wyznaczającego wycinek koła, będący powierzchnią boczną stożka, jest równa 320° .

Pole powierzchni stożka

Przykład 12

Oblicz pole powierzchni bocznej stożka, która po rozwinięciu na płaszczyźnie jest wycinkiem koła o promieniu l . Promień podstawy tego stożka jest równy r .

Pole powierzchni bocznej P_b obliczymy jako pole wycinka koła. Niech α będzie kątem środkowym tego wycinka. Wtedy

$$P_b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot l^2$$

Zapisujemy i przekształcamy równość wynikającą z tego, że długość łuku okręgu wyznaczonego przez wycinek jest równa obwodowi podstawy stożka.

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot l = 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$\frac{\alpha}{360^\circ} l = r$$

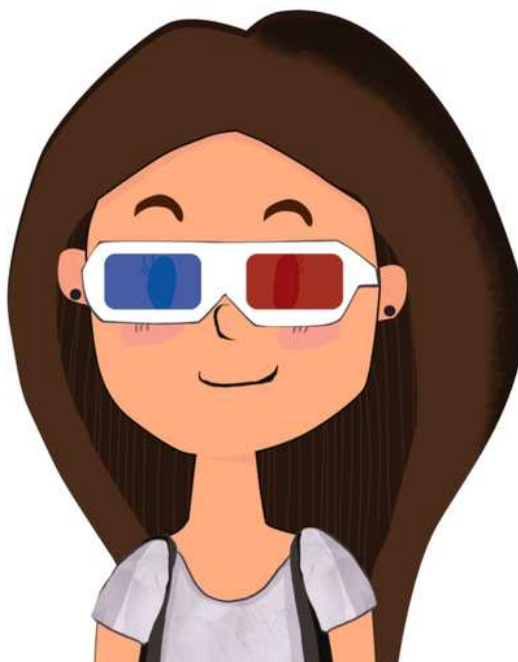
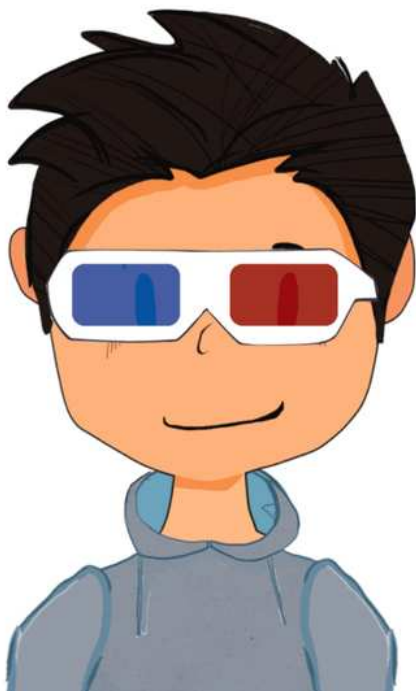
$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{r}{l}$$

Stąd

$$P_b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot l^2 = \frac{r}{l} \cdot \pi \cdot l^2 = \pi r l$$

Pole powierzchni bocznej jest równe $\pi r l$.

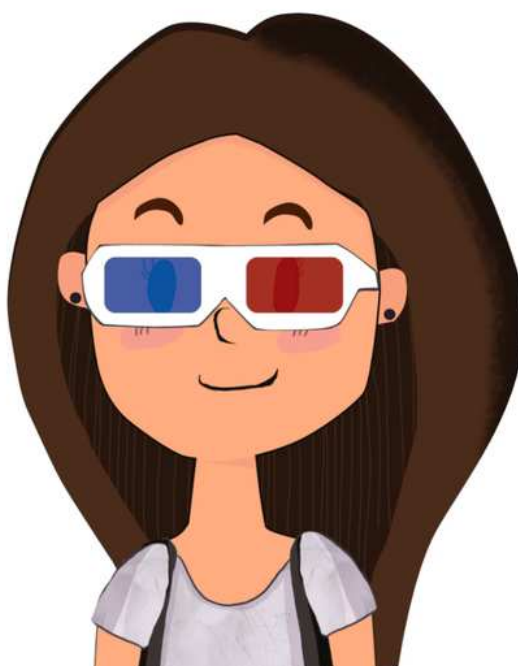
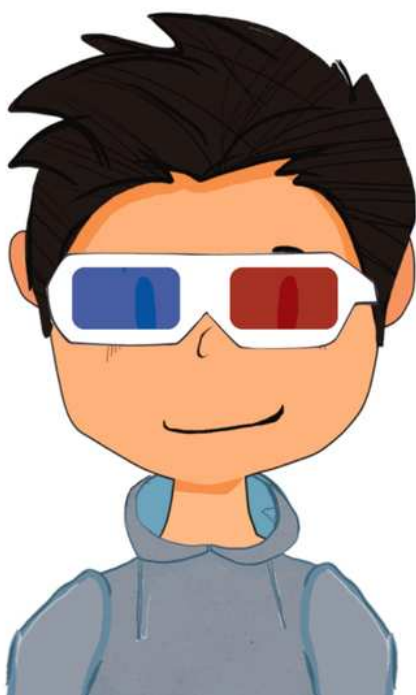
Ważne!



Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DbKCVKgZF>

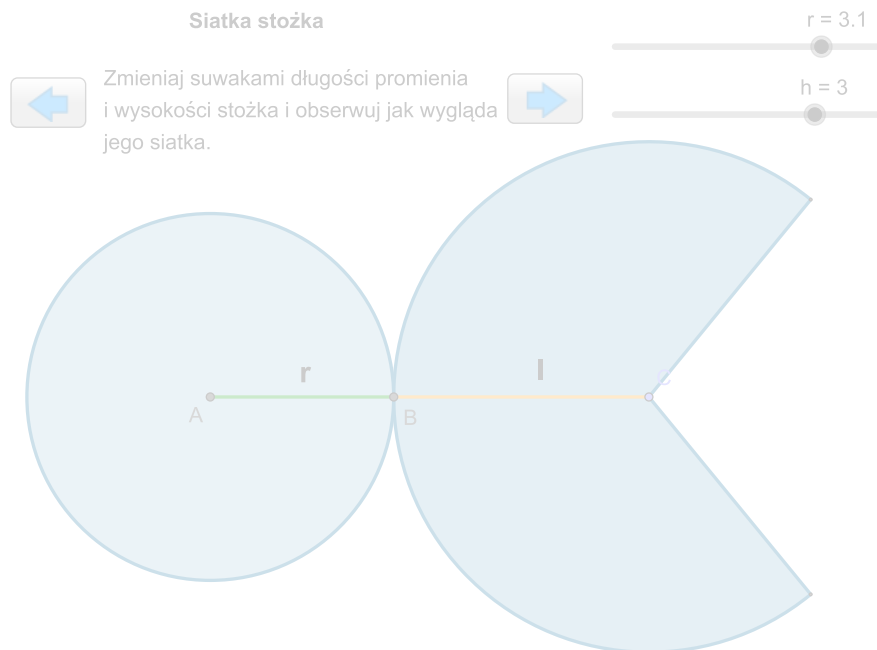
Animacja 3D pokazuje stojące na drodze pachołki drogowe w kształcie stożka. Kreślone są krawędzie jednego pachołka - powstaje stożek, który następnie rozkłada się na siatkę stożka.

Ważne!



Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DbKCVKgZF>

Animacja 3D pokazuje siatkę stożka, która następnie składa się w stożek. Stożek zamienia się w pachołek drogowy. Na drodze stoją cztery pachołki.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DbKCVKgZF>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Ważne!

Pole powierzchni całkowitej P_c stożka o promieniu podstawy r i tworzącej l jest równe

$$P_c = P_b + P_p$$

gdzie P_b - pole powierzchni bocznej, P_p - pole podstawy.

Ponieważ $P_b = \pi r l$, $P_p = \pi r^2$, stąd

$$P_c = \pi r l + \pi r^2$$

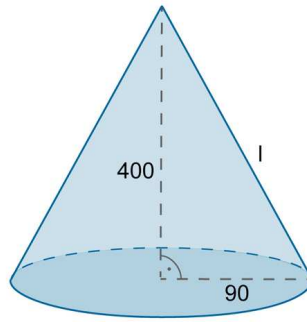
Przykład 13

Oblicz, ile dm^2 szkła zużyto na wykonanie klosza do lampy, który ma kształt stożka o wysokości 400 mm i promieniu podstawy 90 mm.

Aby obliczyć ile dm^2 szkła użyto, obliczymy pole powierzchni bocznej stożka, w kształcie którego jest klosz.

$P_b = \pi r l$, gdzie $r = 90 \text{ mm}$

Najpierw jednak, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, wyznaczmy długość tworzącej odpowiedniego stożka.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

$$l^2 = 400^2 + 90^2$$

$$l^2 = 160000 + 8100$$

$$l^2 = 168100$$

$$l = 410 \text{ mm}$$

Zapisujemy wymiary stożka w decymetrach.

$$r = 90 \text{ mm} = 0,9 \text{ dm}$$

$$l = 410 \text{ mm} = 4,1 \text{ dm}$$

Obliczamy pole powierzchni bocznej stożka.

$$P = \pi \cdot 0,9 \cdot 4,1$$

$$P = 3,69 \cdot \pi \text{ dm}^2$$

Na wykonanie klosza potrzeba $3,69 \cdot \pi \text{ dm}^2$ szkła.

Przykład 14

Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka o tworzącej długości 4,2 cm i promieniu podstawy 2 cm.

Pole powierzchni całkowitej stożka obliczamy jako sumę pola powierzchni bocznej i pola podstawy.

$$P_c = P_b + P_p$$

$$P_c = \pi \cdot 2 \cdot 4,2 + \pi \cdot 2^2$$

$$P_c = 8,4\pi + 4\pi$$

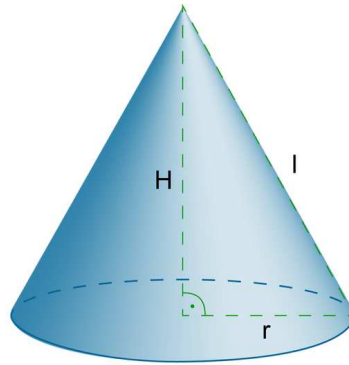
$$P_c = 12,4\pi \text{ cm}^2$$

Pole powierzchni całkowitej stożka jest równe $12,4 \cdot \pi \text{ cm}^2$.

Przykład 15

Pole przekroju osiowego stożka jest równe 660. Pole podstawy wynosi 121π . Oblicz pole powierzchni bocznej.

Pole podstawy stożka wynosi 121π , zatem promień podstawy stożka jest równy $\sqrt{121} = 11$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Pole przekroju osiowego to połowa iloczynu wysokości stożka i średnicy jego podstawy. Wiedząc, że pole to jest równe 660, a średnica $2 \cdot 11 = 22$, można obliczyć wysokość stożka.

$$H = 60$$

Teraz musimy jeszcze wyznaczyć długość tworzącej – korzystamy z twierdzenia Pitagorasa.

$$l^2 = H^2 + r^2$$

$$l^2 = 60^2 + 11^2$$

$$l^2 = 3721$$

$$l = 61$$

Obliczamy pole powierzchni bocznej.

$$P_b = \pi r l$$

$$P_b = \pi \cdot 11 \cdot 61$$

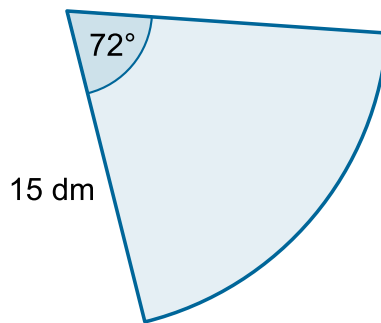
$$P_b = 671 \cdot \pi$$

Pole powierzchni bocznej stożka jest równe $671 \cdot \pi$.

Przykład 16

Pole powierzchni bocznej stożka jest wycinkiem koła o kącie środkowym 72° i promieniu 15 dm.

Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Obliczamy pole powierzchni bocznej stożka, jako pole wycinka koła .

$$P_b = \frac{72^0}{360^0} \cdot \pi \cdot 15^2$$

$$P_b = \frac{1}{5} \cdot \pi \cdot 225$$

$$P_b = 45\pi$$

Teraz wyznaczamy promień r podstawy stożka.

$$2\pi r = \frac{72^0}{360^0} \cdot 2\pi \cdot 15$$

$$r = \frac{1}{5} \cdot 15$$

$$r = 3 \text{ dm}$$

Obliczamy pole podstawy.

$$P_p = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$$

Dodajemy wyznaczone wartości , obliczając pole powierzchni całkowitej stożka.

$$P_c = P_b + P_p$$

$$P_c = 45\pi + 9\pi = 54\pi$$

Pole powierzchni całkowitej stożka jest równe $54\pi \text{ dm}^2$.

Przykład 17

Trójkąt prostokątny o bokach długości 5, 12, 13 obracamy wokół przeciwprostokątnej. Oblicz pole powierzchni tak powstałej bryły.

W wyniku obrotu trójkąta wokół przeciwprostokątnej powstała bryła składająca się z dwóch stożków o wspólnej podstawie. Tworzące stożków są równe przyprostokątnym trójkąta. Większy stożek ma tworzącą długości 12, a mniejszy ma tworzącą długości 5. Promienie podstaw obu stożków są równe.

Zauważmy, że promień r jest wysokością obracanego trójkąta. Jego długość obliczymy, porównując pole trójkąta obliczone dwoma sposobami.

$$\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5$$

$$13r = 60 / : 13$$

$$r = \frac{60}{13}$$

Obliczamy pole powierzchni bryły jako sumę pól powierzchni bocznych dwóch stożków.

$$P = \pi \cdot \frac{60}{13} \cdot 12 + \pi \cdot \frac{60}{13} \cdot 5$$

$$P = \frac{720\pi}{13} + \frac{300\pi}{13}$$

$$P = \frac{1020}{13} \pi$$

$$P = 78 \frac{6}{13} \pi$$

Pole powierzchni bryły jest równe $78 \frac{6}{13} \pi$.

Ćwiczenie 1

Podaj promień r podstawy i wysokość H stożka otrzymanego w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego wokół krótszej przyprostokątnej. W trójkącie tym

- długość jednej z przyprostokątnych jest równa 24, a przeciwprostokątna ma długość 25
- pole jest równe 60, a jedna z przyprostokątnych ma długość 15
- jeden z kątów ostrych ma miarę 30° , a przeciwprostokątna ma długość 9

Ćwiczenie 2

Oblicz pole powierzchni stożka otrzymanego w wyniku obrotu trójkąta

- równobocznego o boku długości 6 wokół prostej, na której leży jedna z wysokości trójkąta
- równoramienne wokół wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta między ramionami. Wysokość ta jest równa 8, a miara jednego z kątów 120° .
- prostokątnego równoramienne wokół prostej, na której leży jedna z przyprostokątnych. Pole koła opisanego na tym trójkącie jest równe 100π .

Ćwiczenie 3

Uzupełnij.

Pole powierzchni bocznej stożka, którego wysokość jest równa 12,

- a pole podstawy jest równe 256π , wynosi ...
- a tworząca ma długość 13, wynosi ...
- a przekrój osiowy jest trójkątem równobocznym, wynosi ...

Ćwiczenie 4

Oblicz, ile dm^2 srebrnego kartonu użyto na wykonanie 4 dekoracyjnych jednakowych choinek. Każda choinka ma kształt stożka o wysokości 0,5 m i promieniu podstawy 1,5 dm. Wynik podaj z dokładnością do 0,01 dm^2 .

Ćwiczenie 5

Oblicz, ile cm^2 szkła użyto na wykonanie szklanego klosza do lampki nocnej. Klosz ma kształt stożka o promieniu podstawy 3 cm i wysokości 10 cm.

Ćwiczenie 6

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

Podstawą stożka jest koło o polu 400π . Pole powierzchni bocznej jest równe 580π .

☐ Pole przekroju osiowego wynosi 420.

☐ Tworząca jest o 9 dłuższa od promienia podstawy.

☐ Wysokość stożka jest o 1 większa od średnicy podstawy.

Ćwiczenie 7

Uzupełnij tabelkę.

Tabela. Dane

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem prostokątnym, którego przyprostokątna ma długość 2.

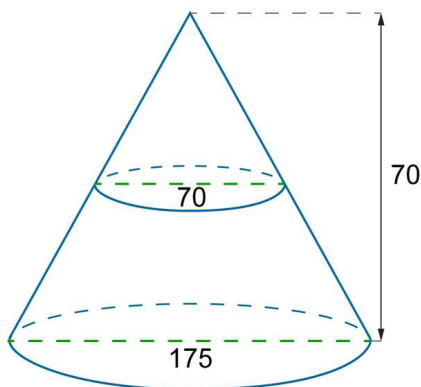
Pole podstawy stożka	Wysokość stożka	Długość tworzącej	Pole powierzchni bocznej

Ćwiczenie 8

Średnica podstawy stożka jest równa 175, a jego wysokość 70. Stożek przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy.

Średnica tak otrzymanego przekroju poprzecznego ma długość 70.

Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka, który otrzymano w wyniku przekroju.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9

Oblicz pole powierzchni bocznej stożka, którego przekrój osiowy jest trójkątem równobocznym

a. o polu $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$

b. o obwodzie 15 cm

Ćwiczenie 10

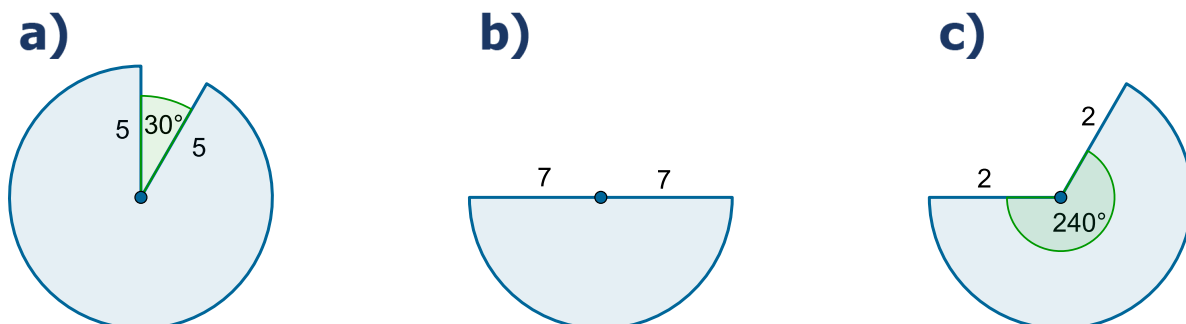
Pole powierzchni bocznej stożka jest równe 3864π , a pole podstawy 3136π . Oblicz wysokość stożka.

Ćwiczenie 11

Kąt rozwarcia stożka jest równy 120° , a tworząca jest równa 8. Oblicz obwód podstawy i wysokość stożka.

Ćwiczenie 12

Powierzchnia boczna stożka jest wycinkiem koła przedstawionym na rysunku. Oblicz pole podstawy stożka.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o boku długości 12 cm. Oblicz pole powierzchni bocznej stożka.

Ćwiczenie 14

Pole powierzchni całkowitej stożka wynosi 100π cm. Promień podstawy stożka ma długość 5 cm. Oblicz długość tworzącej tego stożka.

Ćwiczenie 15

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐

Stożek jest bryłą obrotową.

☐

Przekrój stożka może być trójkątem rozwartokątnym.

☐

Każdy przekrój stożka jest kołem.

Ćwiczenie 16

Oceń prawdziwość zdania.

Istnieje stożek, którego pole powierzchni bocznej jest równe polu powierzchni jego podstawy.
Odpowiedź uzasadnij.

Ćwiczenie 17

Oblicz pole całkowite powierzchni stożka, którego powierzchnię boczną utworzono z półkola o promieniu długości a .

Ćwiczenie 18

Koło o promieniu długości 10 cm rozcięto na dwa wycinki kołowe. Jeden z wycinków odpowiada kątowi środkowemu o mierze 60° . Z każdego wycinka utworzono powierzchnię boczną stożka. Oblicz sumę długości promieni podstaw tych stożków.

Ćwiczenie 19

Koło o promieniu długości a cm rozcięto na dwa wycinki kołowe. Jeden z wycinków odpowiada kątowi środkowemu o mierze α° . Z każdego wycinka utworzono powierzchnię boczną stożka. Oblicz sumę długości promieni podstaw tych stożków.

Ćwiczenie 20

Tworząca stożka ma długość 20 cm i jest nachylona do podstawy pod kątem 30° . Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka.

Ćwiczenie 21

Kąt między tworzącą i wysokością stożka ma miarę 45° . Promień podstawy stożka ma długość 5 cm. Oblicz pole powierzchni bocznej stożka.

Ćwiczenie 22

Naszkicuj bryłę powstałą w wyniku obrotu trapezu prostokątnego wokół jego dłuższej podstawy. Oblicz powierzchnię całkowitą otrzymanej bryły, jeśli podstawy trapezu mają długości 5 cm i 8 cm, a wysokość trapezu ma długość 4 cm.

Objętość stożka

Wzór na objętość stożka

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DBpgxRP4R>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Przykład 1

Walec i stożek mają taki sam promień podstawy i taką samą wysokość.

Zaobserwuj, jak zmienia się stosunek objętości stożka do objętości walca wraz ze zmianą wysokości brył.

Objętość stożka i walca

← etap 1 z 2 →

Obok konstrukcja przedstawia walec i stożek o tej samej podstawie i tej samej wysokości. Obserwuj objętość każdej z tych brył. Co dostrzegasz interesującego? Przejdź do kolejnego etapu.

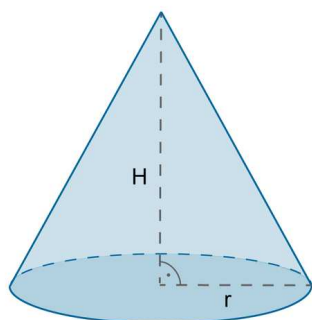
Obj_{walca} = 30.3 Obj_{stożka} = 10.1

Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DBpgxRP4R>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Ważne!

Objętość stożka o wysokości H i promieniu podstawy r wyraża się wzorem



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot H$$

Przykład 2

Oblicz objętość stożka, którego wysokość jest równa 36 cm, a promień podstawy 4 cm.
Do wzoru na objętość stożka

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot H$$

podstawiamy:

$$H = 36 \text{ cm}, r = 4 \text{ cm}.$$

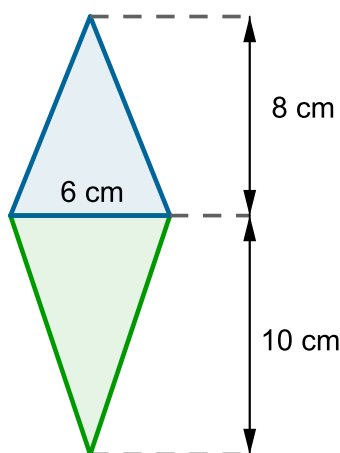
$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 36$$

$$V = 192\pi \text{ cm}^2$$

Objętość stożka jest równa $192\pi \text{ cm}^2$.

Przykład 3

Ile porcji lodów można otrzymać z 1 l masy lodowej?



Obliczymy objętość masy lodowej potrzebnej do wykonania jednej porcji lodów, czyli objętość dwóch stożków o wspólnej podstawie. Wysokość jednego z tych stożków jest równa 10 cm, a drugiego 8 cm. Promień podstawy każdego ze stożków jest równy $6 \text{ cm} : 2 = 3 \text{ cm}$.

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 10 + \frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 8$$

$$V = 30\pi + 24\pi = 54\pi$$

$$V \approx 54 \cdot 3,14 = 169,56$$

$$V \approx 169,56 \text{ cm}^3$$

Na wykonanie jednej porcji lodów potrzeba około $169,56 \text{ cm}^3$ masy lodowej.

Obliczamy teraz, ile lodów można otrzymać z 1 l masy lodowej.

Ponieważ $1 \text{ l} = 1000 \text{ ml}$, a $1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$, zatem $1 \text{ l} = 1000 \text{ cm}^3$.

$$1000 : 169,56 \approx 5,89$$

Z 1 l masy lodowej można wykonać 5 lodów.

Obliczanie objętości stożka

Przykład 4

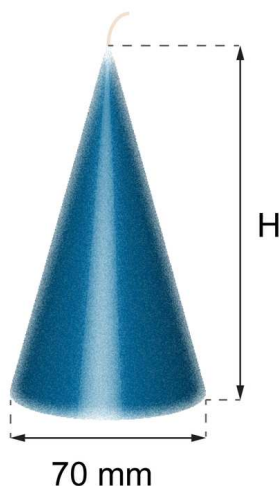
Świeca wykonana z wosku o gęstości $0,9 \text{ g/cm}^3$ ma masę $0,231 \text{ kg}$. Świeca ma kształt stożka o średnicy podstawy równej 70 mm . W czasie godziny wysokość palącej się świecy zmniejsza się przeciętnie o 1 cm . Świecę zapalono o godzinie 20.00. O której godzinie zgaśnie ta świeca?

Przyjmij $\pi = \frac{22}{7}$.

Gęstość wosku podana jest w g/cm^3 . Średnicę świecy zapiszemy więc w centymetrach, a jej masę w gramach, aby ujednolicić jednostki.

$$70 \text{ mm} = 7 \text{ cm}$$

$$0,231 \text{ kg} = 231 \text{ g}$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oznaczmy:

H – wysokość świecy.

Objętość V stożka, w kształcie którego jest świeca, jest równa

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 \cdot H$$

Stąd

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{49}{4} \cdot H = \frac{77}{6} \cdot H$$

$$V = \frac{77}{6} H \text{ cm}^3$$

Zapisujemy równość wynikającą z tego, że masa substancji to iloczyn zajmowanej przez nią objętości przez gęstość tej substancji.

$$0,9 \cdot \frac{77}{6} \cdot H = 231$$

Z zapisanej równości wyznaczamy wysokość świecy.

$$\frac{9}{10} \cdot \frac{77}{6} \cdot H = 231$$

$$\frac{231}{20} \cdot H = 231 / : \frac{231}{20}$$

$$H = 20 \text{ cm}$$

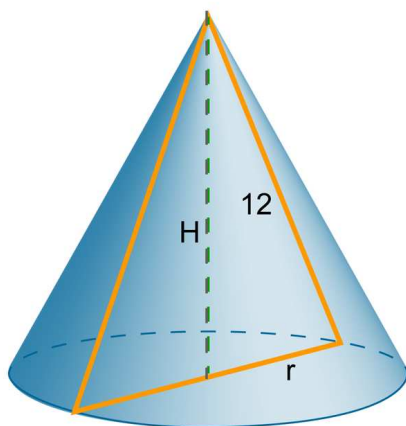
W czasie godziny wysokość świecy zmniejsza się o 1 cm, czyli świeca będzie paliła się 20 godzin.

Świecę zapalono o godzinie 20.00, do północy paliła się więc 4 godziny i 16 godzin po północy.

Świeca zgaśnie o godzinie 16.00 następnego dnia.

Przykład 5

Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt, którego tworząca jest równa 12 dm. Pole powierzchni bocznej stożka jest równe $48\pi\sqrt{5} \text{ dm}^2$. Oblicz objętość stożka.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Aby obliczyć objętość stożka, należy najpierw znaleźć wysokość stożka i promień jego podstawy.

Promień r podstawy stożka znajdujemy, korzystając z tego, że pole powierzchni bocznej stożka jest równe $48\pi\sqrt{5} \text{ dm}^2$.

$$\pi \cdot r \cdot 12 = 48\pi\sqrt{5}$$

$$r = 4\sqrt{5} \text{ dm}$$

Zauważmy, że wysokość stożka jest zarazem wysokością jego przekroju osiowego. Zatem trójkąt, którego boki mają długości $H, r, 12$ (jak na rysunku), jest prostokątny. Zapisujemy dla tego trójkąta równość wynikającą z twierdzenia Pitagorasa i wyznaczamy wysokość stożka.

$$H^2 + r^2 = 12^2$$

$$H^2 + (4\sqrt{5})^2 = 144$$

$$H^2 + 80 = 144$$

$$H^2 = 144 - 80$$

$$H = \sqrt{64}$$

$$H = 8 \text{ dm}$$

Obliczamy objętość stożka.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8 \cdot (4\sqrt{5})^2$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8 \cdot 80$$

$$V = 213\frac{1}{3} \cdot \pi \text{ cm}^3$$

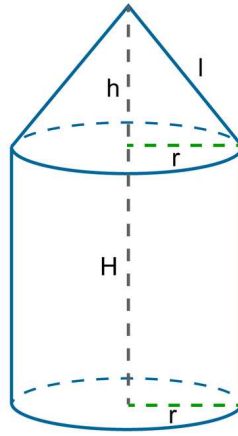
Objętość stożka jest równa $213\frac{1}{3} \cdot \pi \text{ cm}^3$.

Przykład 6

Element ma kształt walca, na którym umieszczony jest stożek.

Przekrojem osiowym tego walca jest kwadrat o polu 9 m^2 . Objętość całej bryły wynosi $25,905 \text{ m}^3$. Oblicz, ile puszek farby należy zakupić, aby pomalować cały element, jeżeli zawartość jednej puszki wystarcza na pomalowanie 5 m^2 powierzchni. Przyjmij $\pi = 3,14$. Oznaczmy

- r - promień podstawy walca,
- H - wysokość walca,
- h - wysokość stożka,
- l - długość tworzącej stożka.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przekrojem osiowym walca jest kwadrat o polu 9 m^2 . Wynika z tego, że długość boku tego kwadratu jest równa $\sqrt{9} \text{ cm}$, czyli 3 cm . Wysokość walca H jest więc równa 3 m , a promień jego podstawy $r = 3 \text{ m} : 2 = 1,5 \text{ m}$. Objętość elementu jest równa sumie objętości walca i stożka.

$$\pi r^2 \cdot H + \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h = 25,905$$

Dla ułatwienia obliczeń wyłączamy z obu składników wspólne czynniki poza nawias.

$$\pi r^2 (H + \frac{1}{3} h) = 25,905$$

$$3,14 \cdot (1,5)^2 \cdot (3 + \frac{1}{3} h) = 25,905$$

$$7,065 (3 + \frac{1}{3} h) = 25,905 / : 3,14$$

$$2,25 (\frac{9+h}{3}) = 8,25$$

$$0,75 (9 + h) = 8,25 / : 0,75$$

$$9 + h = 11$$

$$h = 2 \text{ m}$$

Teraz , korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość tworzącej stożka.

$$l^2 = h^2 + r^2$$

$$l = \sqrt{2^2 + (1,5)^2} = \sqrt{6,25} = 2,5$$

$$l = 2,5 \text{ cm}$$

Obliczamy pole P powierzchni całkowitej elementu, czyli sumę pola koła (podstawy bryły), pola powierzchni bocznej walca i pola powierzchni bocznej stożka.

$$P = \pi r^2 + 2\pi r \cdot H + \pi r l$$

$$P = \pi r(r + 2H + l)$$

$$P = 3,14 \cdot 1,5(1,5 + 2 \cdot 3 + 2,5)$$

$$P = 4,71 \cdot 10 = 47,1$$

$$P = 47,1 \text{ m}^2$$

Jedna puszka farby wystarcza na pomalowanie 5 m^2 powierzchni. Ponieważ $47,1 : 5 = 9,42$, zatem należy kupić 10 puszek farby.

Ćwiczenie 1

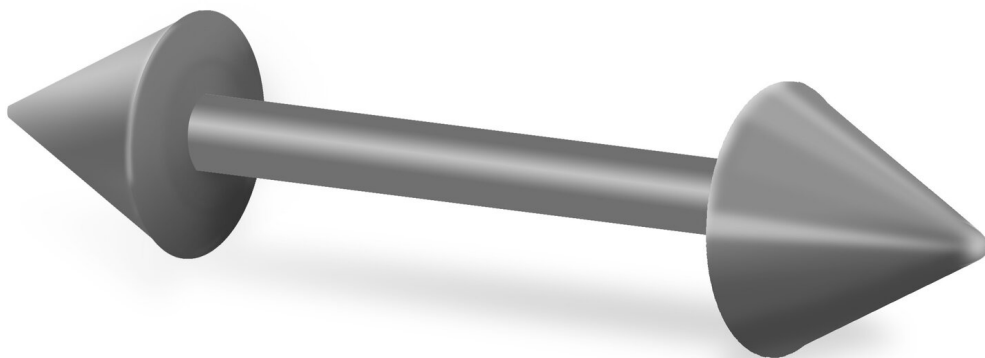
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3

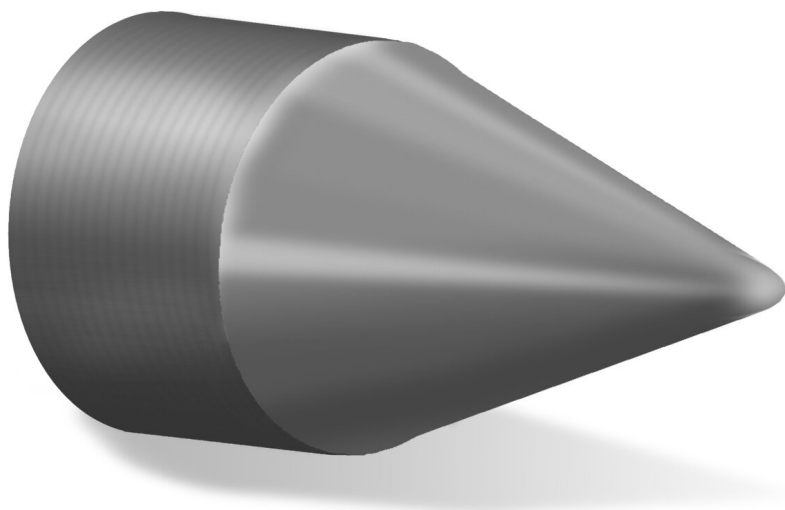
Karnisz składa się z trzech elementów. Dwa elementy są jednakowe i każdy z nich ma kształt stożka o średnicy podstawy 120 mm i wysokości 8 cm. Trzeci element ma kształt walca o wysokości 2 m i średnicy podstawy 60 mm. Oblicz, ile cm^3 aluminium zużyto na wykonanie karnisza. Przyjmij $\pi = 3,14$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4

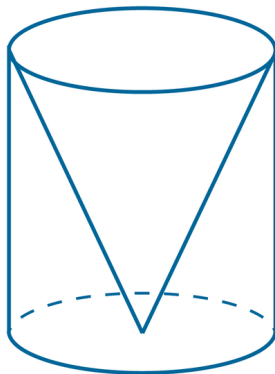
Powierzchnia boczna elementu składającego się ze stożka i walca (jak na rysunku) jest równa 135π . Promień podstawy walca jest równy 5, a tworząca stożka 13. Oblicz objętość elementu.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5

Do szklanki w kształcie walca wstawiono lejek w kształcie stożka. Naczynia mają równe wysokości i średnice.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- ☐ Pojemność części szklanki niezajętej przez lejek jest równa 8, zatem pojemność lejka jest równa 6.
- ☐ Suma pojemności szklanki i lejka jest równa a , zatem pojemność lejka jest równa $\frac{a}{4}$.
- ☐ Pojemność lejka wynosi 14 dm^3 , zatem pojemność szklanki jest równa $4,2 \text{ dm}^3$.

Ćwiczenie 6

Stożek przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy, dzieląc wysokość stożka w stosunku $1 : 2$, licząc od wierzchołka. Wysokość stożka wynosi 15 cm , a jego objętość $45\pi \text{ cm}^3$.
Oblicz objętość większej z tak otrzymanych brył (czyli stożka ściętego).
Oblicz pole powierzchni mniejszej z tak otrzymanych brył.

Ćwiczenie 7

Obracamy dwa przystające trójkąty prostokątne o przyprostokątnych długości 4 cm i 3 cm , jeden wokół krótszej przyprostokątnej, a drugi wokół dłuższej przyprostokątnej. Oblicz objętości otrzymanych stożków. Jaki jest ich stosunek?

Ćwiczenie 8

Obracamy dwa przystające trójkąty prostokątne o przyprostokątnych długości a cm i b cm. Jeden wokół jednej przyprostokątnej, a drugi wokół drugiej przyprostokątnej. Oblicz stosunek objętości otrzymanych stożków.

Ćwiczenie 9

Obracamy dwa przystające trójkąty prostokątne o przeciwprostokątnej długości $\sqrt{2}$ cm. Pierwszy wokół jednej przyprostokątnej, a drugi wokół drugiej przyprostokątnej. Otrzymane w ten sposób bryły mają równe objętości. Oblicz długości przyprostokątnych tych trójkątów.

Ćwiczenie 10

Dwa stożki są podobne w skali k . Oblicz stosunek objętości tych stożków.

Ćwiczenie 11

Wysokość trójkąta równobocznego jest równa $2\sqrt{3}$.
Oblicz objętość stożka powstałego w wyniku obrotu tego trójkąta wokół jego wysokości.

Ćwiczenie 12

Oblicz objętość stożka powstałego w wyniku obrotu trójkąta równoramiennego o podstawie długości 6 cm i ramieniu długości 5 cm wokół jego wysokości poprowadzonej do podstawy.

Ćwiczenie 13

Jak zmieni się objętość stożka, gdy jego wysokość zwiększymy dwukrotnie, a promień zmniejszymy dwukrotnie?

Ćwiczenie 14

Tworząca stożka długości 5 cm jest nachylona do podstawy stożka pod kątem 45° . Oblicz objętość tego stożka.

Ćwiczenie 15

Tworząca stożka ma długość 10 cm, a kąt rozwarcia stożka ma miarę 60° . Oblicz objętość tego stożka.

Ćwiczenie 16

Naszkicuj bryłę powstałą w wyniku obrotu

- a. trójkąta równoramiennego wokół jego podstawy
- b. kwadratu wokół jego przekątnej

Ćwiczenie 17

Oblicz objętość bryły powstałej w wyniku obrotu rombu o przekątnych 12 cm i 16 cm wokół jego krótszej przekątnej.

Ćwiczenie 18

Promień podstawy stożka jest równy r . Objętość stożka jest równa V . Wysokość tego stożka jest równa

☐ $\frac{3V}{\pi r^2}$

☐ $\frac{\pi r^2}{3V}$

☐ $\frac{V\pi}{r^2}$

☐ $3V + \pi r^2$

Ćwiczenie 19

Przyprostokątna trójkąta prostokątnego równoramiennego ma długość 2 cm. Oblicz objętość stożka otrzymanego w wyniku obrotu tego trójkąta wokół wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego.

Ćwiczenie 20

Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu na płaszczyźnie ma kształt wycinka kołowego o promieniu 4 cm, opartego na kącie środkowym o mierze 120° . Oblicz objętość tego stożka.

Kula i sfera

Elementy kuli

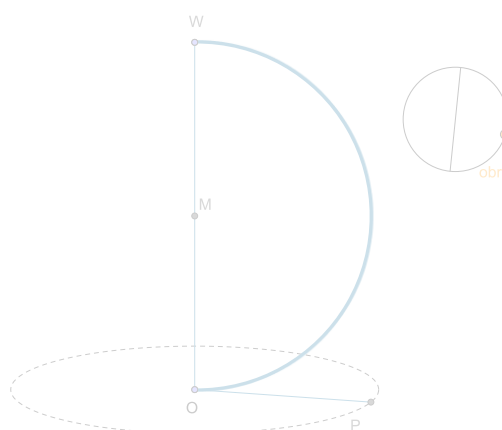
Krople rosy, bryłki gradu, ziarenka maku swoim kształtem przypominają kule.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 1

Jaka bryła powstanie w wyniku obrotu półkola wokół prostej, na której leży średnica tego półkola?



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1F7mMmuS>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

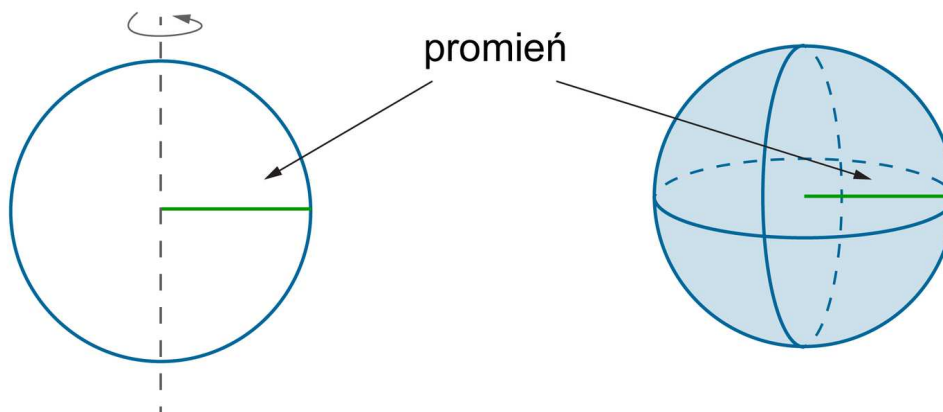
Kulę można otrzymać w wyniku obrotu półkola wokół prostej, na której leży jego średnica lub w wyniku obrotu koła wokół prostej przechodzącej przez jego środek.

Ważne!

Promień tego koła to promień kuli, a środek koła – środek kuli.
Kulę w przestrzeni definiujemy podobnie jak koło na płaszczyźnie.

Definicja: Kula

Kula to zbiór wszystkich punktów przestrzeni, których odległość od punktu, zwanego środkiem, jest nie większa od długości odcinka, zwanego promieniem kuli.

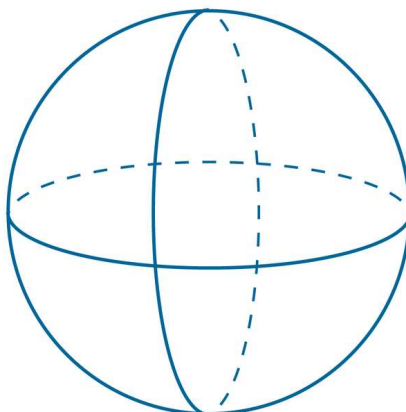


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

W przestrzeni odpowiednikiem okręgu jest sfera.

Definicja: Sfera

Sfera to zbiór wszystkich punktów przestrzeni, których odległość od punktu, zwanego środkiem, jest równa długości odcinka, zwanego promieniem sfery.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 2

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1F7mMmuS>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

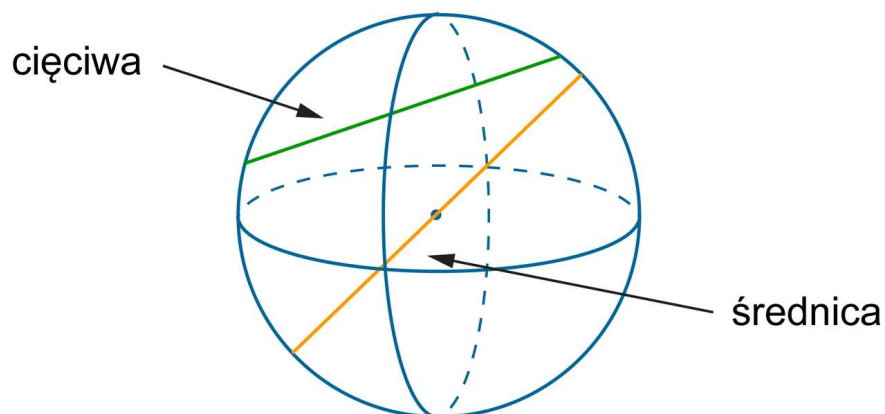
Przykład 3

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1F7mMmuS>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Definicja: Cięciwa sfery (kuli)

Cięciwa sfery (kuli) to odcinek o końcach leżących na sferze. Cięciwa przechodząca przez środek sfery (kuli), to średnica



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 1

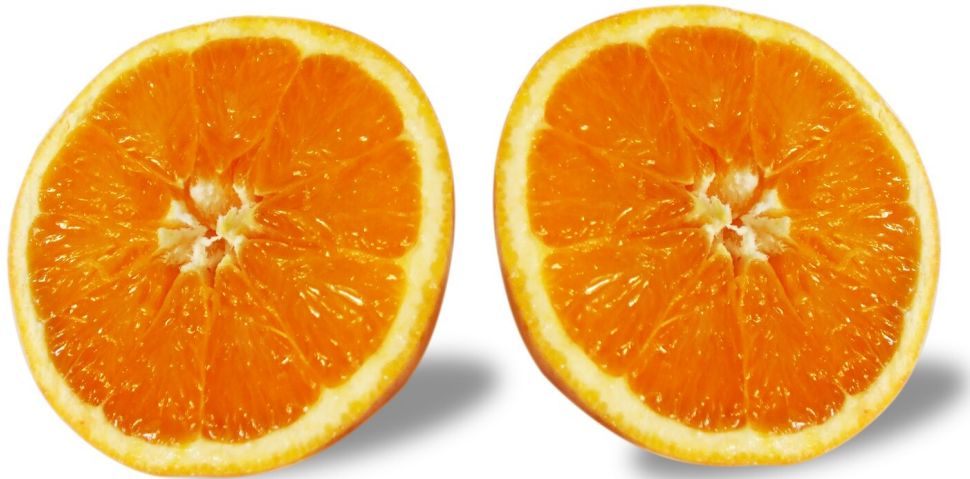
Promień kuli jest równy 8,5 dm.

- Określ długość średnicy kuli.
- Określ największą odległość dwóch punktów leżących na sferze tej kuli.
- Czy cięciwa tej kuli może mieć długość 16 cm, 17 cm, 18 cm?

Przekroje kuli

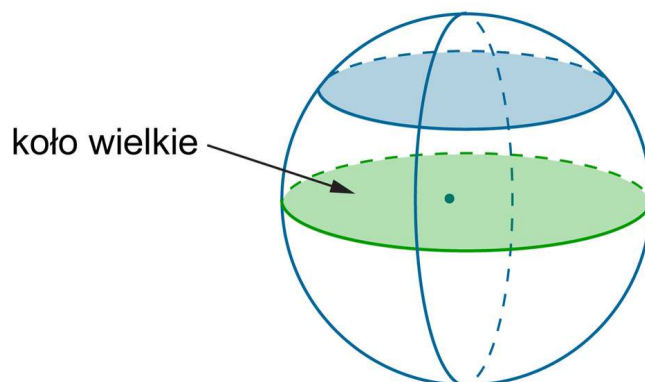
Przykład 4

Przetnij pomarańczę na dwie części. Jakie kształty mają tak otrzymane przekroje?



Tutaj wprowadź tekst związany z wersją klasyczną (atrybut opcjonalny).

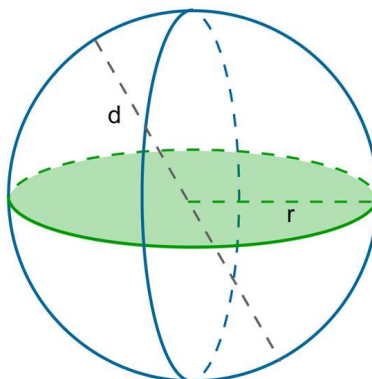
Przekrojem kuli jest koło (lub punkt). Jeśli płaszczyzna przecinająca kulę przechodzi przez jej środek, to otrzymany przekrój nazywamy kołem wielkim kuli. Płaszczyzna ta dzieli kulę na dwie półkule.



Tutaj wprowadź tekst związany z wersją klasyczną (atrybut opcjonalny).

Przykład 5

Pole koła wielkiego kuli jest równe $0,16\pi \text{ mm}^2$. Oblicz średnicę tej kuli.
Obliczamy promień r koła wielkiego kuli.



$$\pi r^2 = 0,16\pi$$

$$r^2 = 0,16$$

$$r = \sqrt{0,16}$$

$$r = 0,4 \text{ mm}$$

bo

$$r > 0$$

Średnica d kuli jest równa średnicy koła wielkiego.

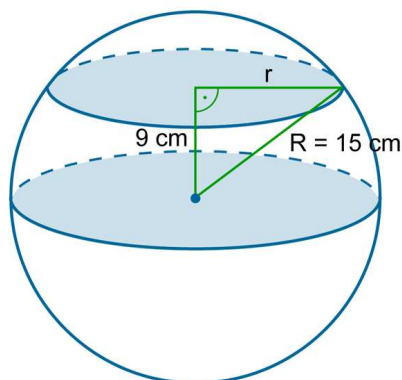
$$d = 2 \cdot 0,4$$

$$d = 0,8 \text{ mm}$$

Średnica kuli jest równa 0,8 mm.

Przykład 6

Promień kuli jest równy 15 cm. W odległości 9 cm od płaszczyzny koła wielkiego tej kuli poprowadzono przekrój. Oblicz obwód tego przekroju.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Aby obliczyć obwód przekroju, obliczymy najpierw jego promień r .

Zauważmy, że trójkąt utworzony przez promień kuli, promień przekroju i odcinek łączący przekroje kuli i prostopadły do nich, jest prostokątny.

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa.

$$r^2 + 9^2 = 15^2$$

$$r^2 = 225 - 81$$

$$r = \sqrt{144}$$

$$r = 12 \text{ cm}$$

Obliczamy teraz obwód przekroju.

$$2\pi r = 2\pi \cdot 12 = 24\pi$$

Obwód przekroju jest równy 24π cm.

Pole powierzchni kuli



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1F7mMmuS>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 7

Obierz pomarańczę. Czy możesz tak otrzymane skórki rozłożyć płasko na stole?

Ciekawostka

Archimedes (ok. 287 – 212 p.n.e.) był greckim filozofem, przyrodnikiem i matematykiem. Odkrył prawo wyporu, zwane dzisiaj prawem Archimidesa. Wynałazł między innymi organy wodne, wielokrążek, przenośnik śrubowy (urządzenie do przemieszczania materiałów sypkich lub cieczy).

Wyprowadził wzór na obliczenie pola powierzchni kuli, wykorzystując nowatorskie pomysły, które obecnie wchodzą w zakres rachunku różniczkowego i całkowego. Archimedes wykazał, że pole powierzchni kuli jest czterokrotnie większe od pola jej koła wielkiego.

Ważne!

Pole powierzchni kuli

Pole P powierzchni kuli o promieniu R jest równe

$$P = 4\pi R^2$$

Przykład 8

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1F7mMmuS>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Przykład 9

Na toczek w kształcie półkuli zużyto 450 cm^2 filcu. Jaki obwód ma głowa osoby, dla której go wykonano?

Obliczmy promień R półkuli, w kształcie której jest toczek.

$$2\pi R^2 = 450$$

$$\pi R^2 = 225$$

$$R = \sqrt{\frac{225}{\pi}} = \frac{15}{\sqrt{\pi}}$$

Obliczamy obwód głowy osoby, dla której wykonano toczek.

$$2\pi R = 2\pi \cdot \frac{15}{\sqrt{\pi}} = 30\sqrt{\pi} \approx 30\sqrt{3,14} \approx 53$$

Obwód głowy osoby, dla której wykonano toczek, jest równy około 53 cm.

Objętość kuli

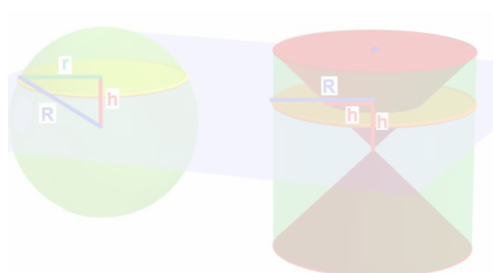
Objętość kuli



etap 7 z 13



Obliczmy pola, jakie mają oba te przekroje.



$$P_{\text{przekroju kuli}} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (R^2 - h^2)$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1F7mMmuS>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Przykład 10

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1F7mMmuS>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Ważne!

Objętość kuli

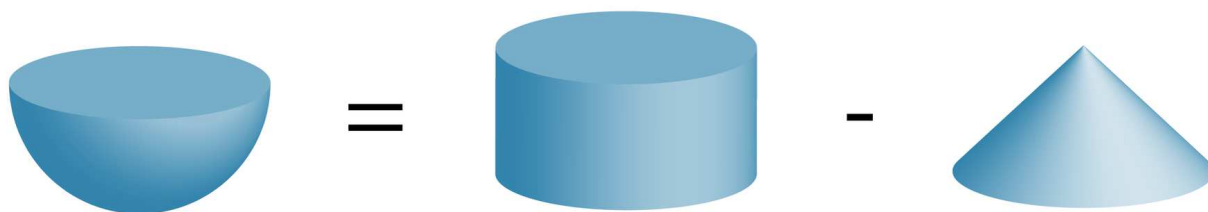
Objętość V kuli o promieniu R jest równa

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Ciekawostka

Objętość kuli można obliczyć zgodnie z zasadą siedemnastowiecznego matematyka włoskiego Bonaventury Cavalieriego.

Na podstawie rozważań Cavalieriego można wywnioskować, że objętość półkuli o promieniu R jest równa różnicy objętości walca o promieniu podstawy R oraz wysokości R i objętości stożka o promieniu podstawy R i wysokości R .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 11

Kula z ciasta ma promień 1,2 dm. Ile ciasteczek w kształcie kulek o promieniu 2 cm każde można otrzymać z tego ciasta?

Obliczamy najpierw objętość dużej kuli ciasta.

$$1,2 \text{ dm} = 12 \text{ cm}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 12^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 1728$$

$$V = 2304\pi \text{ cm}^3$$

Teraz obliczamy objętość ciasteczka.

$$V_C = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3$$

$$V_C = \frac{32}{3}\pi \text{ cm}^3$$

Obliczamy, ile ciasteczek można otrzymać z dużej kuli ciasta.

$$2304 : \frac{32}{3} = 2304 \cdot \frac{3}{32} = 216$$

Z ciasta można otrzymać 216 ciasteczek.

Przykład 12

Objętość kuli jest równa 288π . Oblicz pole powierzchni tej kuli.

Obliczamy najpierw promień R kuli.

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 288\pi / : \frac{4}{3}\pi$$

$$R^3 = 216$$

$$R = \sqrt[3]{216} = 6$$

Możemy już obliczyć pole powierzchni kuli.

$$P = 4\pi R^2$$

$$P = 4\pi \cdot 6^2$$

$$P = 144\pi$$

Pole powierzchni kuli jest równe 144π .

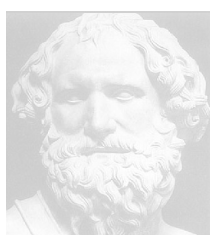
Ciekawostka

Nagrobek Archimedes

etap 1 z 7



Z wielu odkryć, które dokonał Archimedes, za najważniejsze uznał odkrycie zależności pomiędzy walcem a kulą wpisaną w niego.



Archimedes
287–212 p.n.e.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1F7mMmuS>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Ćwiczenie 2

Uzupełnij, wpisując odpowiednie liczby.

Tabela. Dane

Pole powierzchni kuli		
o promieniu 6 jest równe	o średnicy 10 jest równe	O promieniu 0,5 jest ró
..... π	 π	

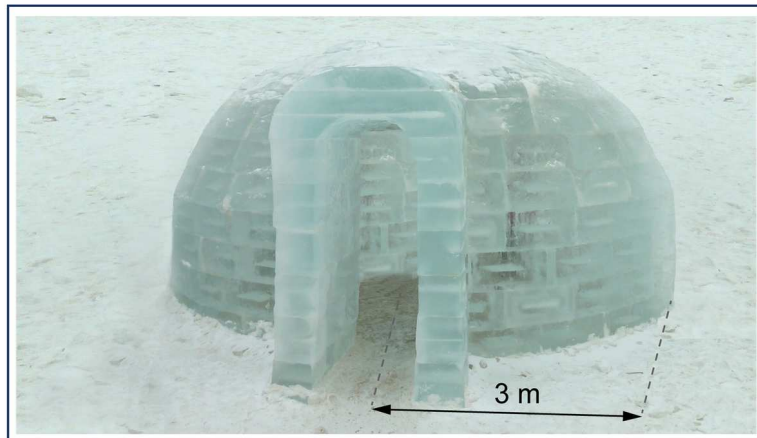
Ćwiczenie 3

Promień kuli jest równy $1\frac{1}{4}$.

- a. Pole koła wielkiego tej kuli jest równe ...
- b. Pole powierzchni kuli jest równe ...
- c. Objętość kuli jest równa ...

Ćwiczenie 4

Igloo ma kształt półkuli, której promień zewnętrzny jest równy 3 m .
Pole powierzchni zewnętrznej igloo jest równe



☐ $144\pi\text{ m}^2$

☐ $27\pi\text{ m}^2$

☐ $18\pi\text{ m}^2$

☐ $36\pi\text{ m}^2$

Ćwiczenie 5

Objętość jednej piłeczki do tenisa ziemnego wynosi $10\frac{2}{3}\pi \text{ cm}^3$.

Średnica tej piłeczki jest równa:

☐ 60 mm

☐ 40 mm

☐ 20 mm

☐ 80 mm

Ćwiczenie 6

Średnice wewnętrzne dwóch doniczek wynoszą odpowiednio: 42 cm i 60 cm. W której doniczce mieści się więcej ziemi i o ile cm^2 ?

Ćwiczenie 7

Pole powierzchni nadmuchanego balona jest równe 9856 cm^2 . Ile m^3 powietrza mieści się w tym balonie? Przyjmij $\pi = \frac{22}{7}$. Wynik podaj z dokładnością do 0,001 m^3 .

Ćwiczenie 8

Do pustego akwarium w kształcie półkuli wlano 4 l wody.

Akwarium wypełnione jest teraz w 90% wodą. Ile dm^2 szkła użyto na jego wykonanie?

Ćwiczenie 9

Zapisz, jak zmieni się objętość kuli, gdy jej promień

- a. zwiększono dwukrotnie
- b. zwiększono pięciokrotnie
- c. zmniejszono dwukrotnie
- d. zmniejszono trzykrotnie

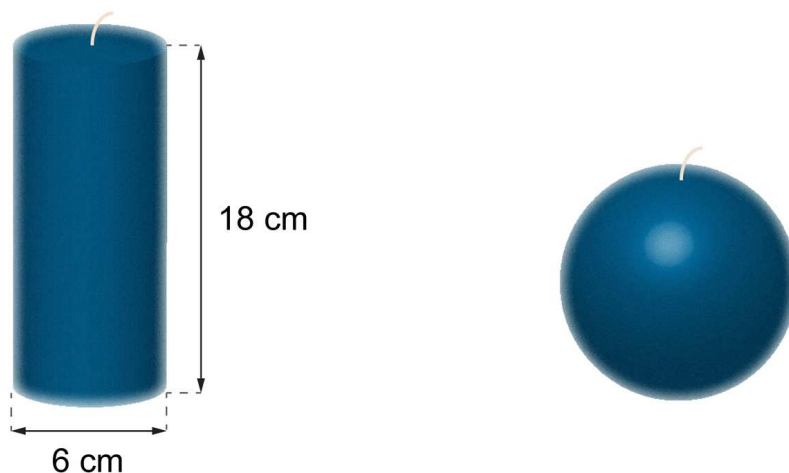
Ćwiczenie 10

Oblicz pole powierzchni i objętość kuli, gdy

- a. średnica kuli jest równa 10 cm
- b. pole koła wielkiego jest równe $81\pi \text{ dm}^2$

Ćwiczenie 11

Śweczkę w kształcie walca przetopiono na śweczkę w kształcie kuli. Oblicz promień tej kuli. Wynik podaj z dokładnością do 0,01 cm.



Ćwiczenie 12

Promień kuli jest równy 15 cm. W jakiej odległości od płaszczyzny koła wielkiego tej kuli poprowadzono jej przekrój, jeśli obwód tego przekroju wynosi 24π ?

Ćwiczenie 13

Pole powierzchni całkowitej półkuli wynosi 60π . Oblicz objętość i pole powierzchni całej kuli.

Ćwiczenie 14

Kulę o średnicy 10 cm przecięto na dwie jednakowe części. Jakie pole powierzchni ma każda z otrzymanych półkuli?

Ćwiczenie 15

Z kuli o promieniu 5 cm odcięto część w odległości 3 cm od środka kuli. Oblicz stosunek pola powierzchni otrzymanego przekroju do pola koła wielkiego.

Ćwiczenie 16

Przekrój osiowy kuli ma pole powierzchni równe 16π . Oblicz pole P powierzchni i objętość V tej kuli.

Ćwiczenie 17

Obwód koła wielkiego kuli jest równy 16π .

Jakie pole powierzchni ma ta kula?

☐ 256π

☐ $8\sqrt{3}\pi$

☐ $32\sqrt{3}\pi$

☐ $24\sqrt{3}\pi$

Ćwiczenie 18

Koło o obwodzie 20π obraca się wokół swojej średnicy. Jakie pole ma koło wielkie otrzymanej kuli?

Ćwiczenie 19

Jaką figurę otrzymamy, obracając okrąg wokół jego średnicy?

Ćwiczenie 20

Do pojemnika w kształcie sześcianu o krawędzi 10 cm włożono kulkę o średnicy 6 cm. Jaką część pojemności sześcianu zajmuje kula?

Ćwiczenie 21

Do menzurki w kształcie walca o średnicy podstawy równej 12 mm wrzucono metalową kulkę o promieniu 2 mm. Ile wody należy wlać do tej menzurki, aby kulka była zakryta?

Ćwiczenie 22

Niech V_K będzie objętością kuli o promieniu R , a V_S objętością stożka o promieniu podstawy R oraz wysokości też R . Oblicz stosunek $V_K : V_S$.

Ćwiczenie 23

Kula i stożek mają jednakowe objętości. Kula ma promień długości 6 cm. Promień podstawy stożka ma długość 8 cm. Oblicz wysokość stożka?

Ćwiczenie 24

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Każdy przekrój kuli jest okręgiem.

☐ Objętość kuli jest proporcjonalna do sześciangu promienia kuli.

☐ Przekrój kuli może być punktem.

Odczytywanie danych statystycznych



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Zbieraniem i udostępnianiem informacji na temat większości dziedzin życia publicznego i niektórych stron życia prywatnego zajmuje się Główny Urząd Statystyczny – GUS, którego główna siedziba znajduje się w Warszawie. W Polsce najważniejsze informacje o państwie, jego mieszkańcach, środowisku, gospodarce i zjawiskach społecznych są umieszczone w Roczniku Statystycznym, który wydawany jest przez GUS.

Ciekawostka

W życiu codziennym spotykamy się również z wieloma informacjami. Dane statystyczne mogą być uzyskiwane w różny sposób: poprzez sondaże, spisy, referenda, wywiady, badania. Przedstawiane są one za pomocą opisu słownego, tabel, wykresów, diagramów. Typ diagramu zależy od rodzaju informacji, jaką chcemy przedstawić.

Przykład 1

W pewnym gimnazjum dokonano zestawienia liczby uczniów wszystkich klas pierwszych, drugich oraz trzecich w podziale na dziewczęta i chłopów.

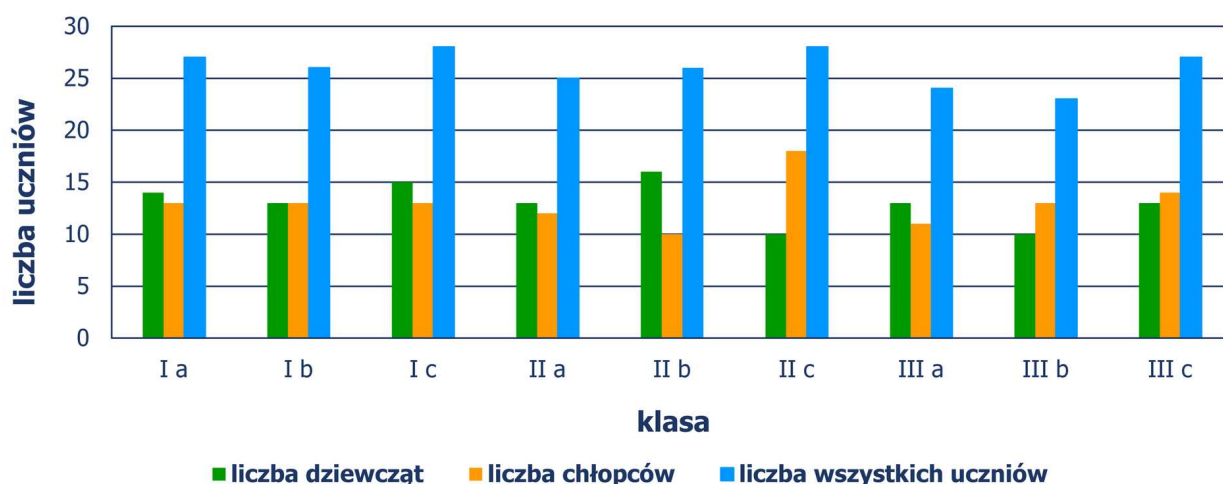
Przeanalizujemy tabelę, diagramy słupkowe oraz pierścieniowe, w których przedstawiono dane dotyczące liczebności poszczególnych grup klasowych.

TABELA

Klasa	Liczba dziewcząt	Liczba chłopców	Liczba wszystkich uczniów
I a	14	13	27
I b	13	13	26
I c	15	13	28
II a	13	12	25
II b	16	10	26
II c	10	18	28
III a	13	11	24
III b	10	13	23
III c	13	14	27

Z tabeli można odczytać:

- dokładną liczbę dziewcząt i chłopców w poszczególnych klasach,
- dokładną liczbę wszystkich uczniów w poszczególnych klasach,
- dokładną liczbę dziewcząt i chłopców w szkole,
- dokładną liczbę wszystkich uczniów w szkole,
- o ile więcej / o ile mniej jest dziewcząt lub chłopców w każdej klasie.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

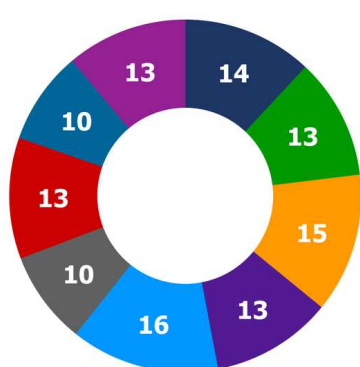
Z diagramu słupkowego pionowego można odczytać, że:

- w klasach Ia, Ic, IIa, IIb, IIIa liczba dziewcząt jest większa niż liczba chłopców,
- w klasach IIc, IIIb liczba chłopców jest większa niż liczba dziewcząt,

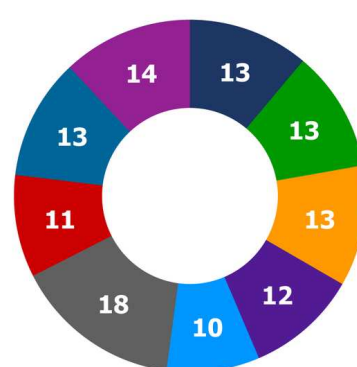
- w klasie Ib liczba dziewcząt jest równa liczbie chłopców,
- w klasie IIb liczba chłopców jest najmniejsza w szkole,
- w klasach IIc, IIIb liczba dziewcząt jest najmniejsza w szkole,
- w klasach Ic, IIc liczba wszystkich uczniów jest największa w szkole,
- w klasie IIIb liczba wszystkich uczniów jest najmniejsza w szkole,
- w klasach Ia, Ic, IIa, IIb, IIIa liczba dziewcząt jest większa niż liczba wyrażająca połowę uczniów tych klas,
- największa różnica między liczbą chłopców a liczbą dziewcząt jest w klasie IIc.

W diagramach pierścieniowych podano liczbę dziewcząt i liczbę chłopców w poszczególnych klasach.

liczba dziewcząt



liczba chłopców



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Z diagramów pierścieniowych można odczytać, że:

- w klasie IIb liczba dziewcząt jest największa,
- w klasie IIIb i IIc liczba dziewcząt jest najmniejsza,
- w klasie IIc liczba chłopców jest największa,
- w klasie IIb liczba chłopców jest najmniejsza,
- w czterech klasach uczy się jednakowa liczba dziewcząt i w czterech klasach uczy się jednakowa liczba chłopców.

Przykład 2

Przeanalizujemy tabelę i diagram słupkowy, w których przedstawiono dane dotyczące maksymalnej głębokości jezior w Polsce.

Źródło: Mały Rocznik Statystyczny Polski – 2013 rok

TABELA

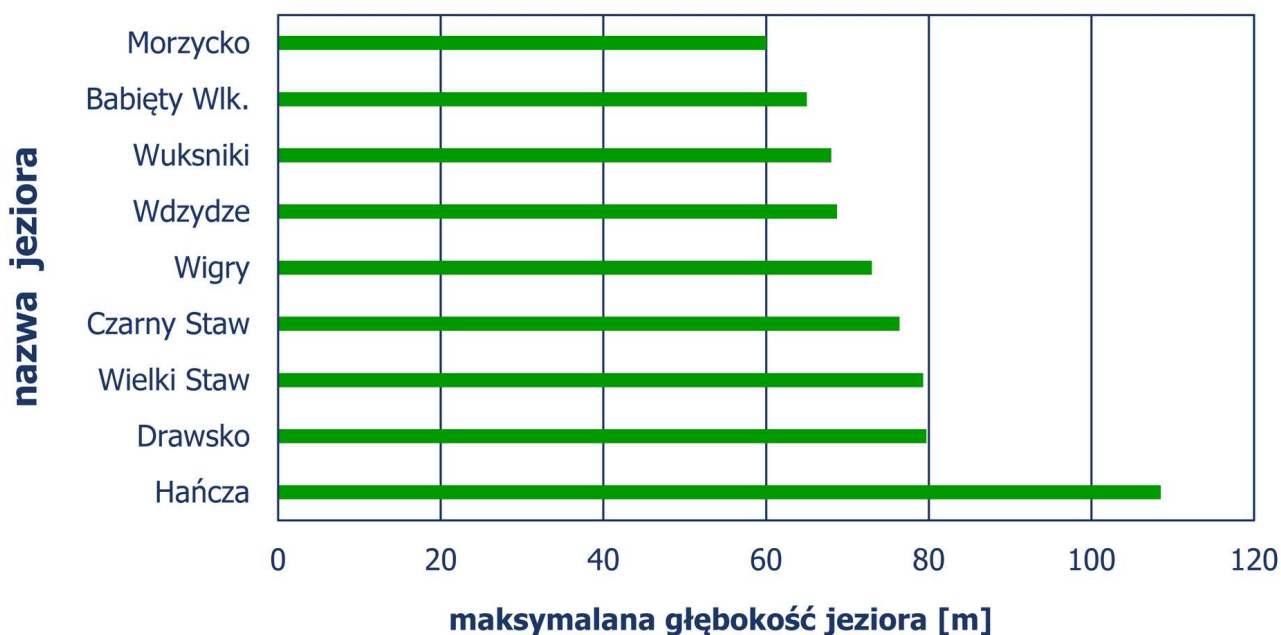
Nazwa jeziora (nazwa województwa)	Maksymalna głębokość w metrach
Hańcza (woj. podlaskie)	108,5
Drawsko (woj. zachodniopomorskie)	79,7

Wielki Staw (woj. małopolskie)	79,3
Czarny Staw (woj. małopolskie)	76,4
Wigry (woj. podlaskie)	73,0
Wdzydze (woj. pomorskie)	68,7
Wuksniki (woj. warmińsko-mazurskie)	68,0
Babięty Wlk. (woj. warmińsko-mazurskie)	65,0
Morzycko (woj. zachodniopomorskie)	60,0

Z tabeli można odczytać:

- dokładną maksymalną głębokość każdego z wymienionych jezior podaną w metrach,
- nazwę województwa, w którym dane jezioro się znajduje.

W diagramie słupkowym na osi pionowej zaznaczone zostały nazwy jezior, a na osi poziomej wartości liczbowe, które określają maksymalną głębokość jeziora wyrażoną w metrach.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Z diagramu słupkowego poziomego można odczytać, że:

- najgłębszym jeziorem w Polsce jest Hańcza,
- zbliżoną głębokość mają jeziora Drawsko i Wielki Staw oraz Wdzydze i Wuksniki,
- głębokość większą niż 70 metrów i mniejszą niż 80 metrów mają cztery jeziora: Drawsko, Wielki Staw, Czarny Staw, Wigry,
- głębokość większą niż maksymalna głębokość jeziora Wigry mają cztery jeziora: Hańcza, Drawsko, Wielki Staw, Czarny Staw.

Przykład 3

Przeanalizujemy tabelę łodygowo-listkową i diagramy procentowe, w których przedstawiono dane dotyczące wzrostu pewnej grupy osób.

TABELA

Wzrost uczniów w centymetrach	
15	2, 5, 6, 7, 7, 8, 9
16	0, 1, 2, 3, 6
17	1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 7

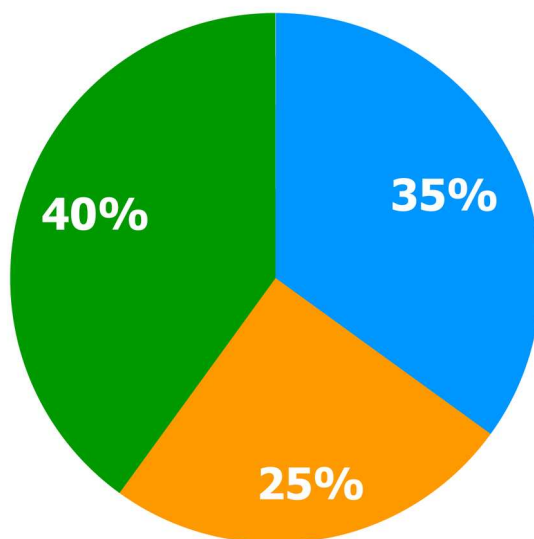
Podczas odczytywania danych z takiej tabeli dwie pierwsze cyfry z pierwszej kolumny traktujemy jako „łodygę”, natomiast cyfry z drugiej kolumny traktujemy jako „listki”.

W tabeli tej zapisano, że wśród badanej grupy osób są osoby o następującym wzroście: 152 cm, 155 cm, 156 cm, 157 cm, 157 cm, 158 cm, 159 cm, 160 cm, 161 cm, 162 cm, 163 cm, 166 cm, 171 cm, 171 cm, 171 cm, 172 cm, 173 cm, 174 cm, 176 cm, 177 cm.

Z tabeli łodygowo-listkowej można odczytać, że:

- grupa liczyła 20 osób,
- najniższa osoba ma 152 cm wzrostu, a najwyższa 177 cm,
- trzy osoby mają 171 cm wzrostu,
- dwie osoby mają 157 cm wzrostu.

W diagramie kołowym podano, jaki procent łącznej liczby badanej grupy stanowią osoby z następujących kategorii: 150 cm – 159 cm, 160 cm – 169 cm, 170 cm – 179 cm. Diagram kołowy, w którym zamiast wartości liczbowych występują wartości procentowe, nazywamy diagramem procentowym.



■ 150 cm - 159 cm ■ 160 cm - 169 cm ■ 170 cm - 179 cm

Z diagramu kołowego można odczytać, że:

- 25% wszystkich osób stanowią osoby, których wzrost należy do kategorii 160 cm – 169 cm,
- 35% wszystkich osób stanowią osoby, których wzrost należy do kategorii 150 cm – 159 cm,
- 40% wszystkich osób stanowią osoby, których wzrost należy do kategorii 170 cm – 179 cm,
- najliczniejszą grupą osób jest grupa, której wzrost należy do kategorii 170 cm – 179 cm,
- 60% wszystkich osób stanowią osoby, których wzrost należy do kategorii 150 cm – 169 cm.

Ćwiczenie 1

W tabeli przedstawiono dane dotyczące zbiorów owoców, wyrażone w tysiącach ton, w latach 2010 – 2012.

Źródło: Mały Rocznik Statystyczny Polski - 2013 rok

TABELA

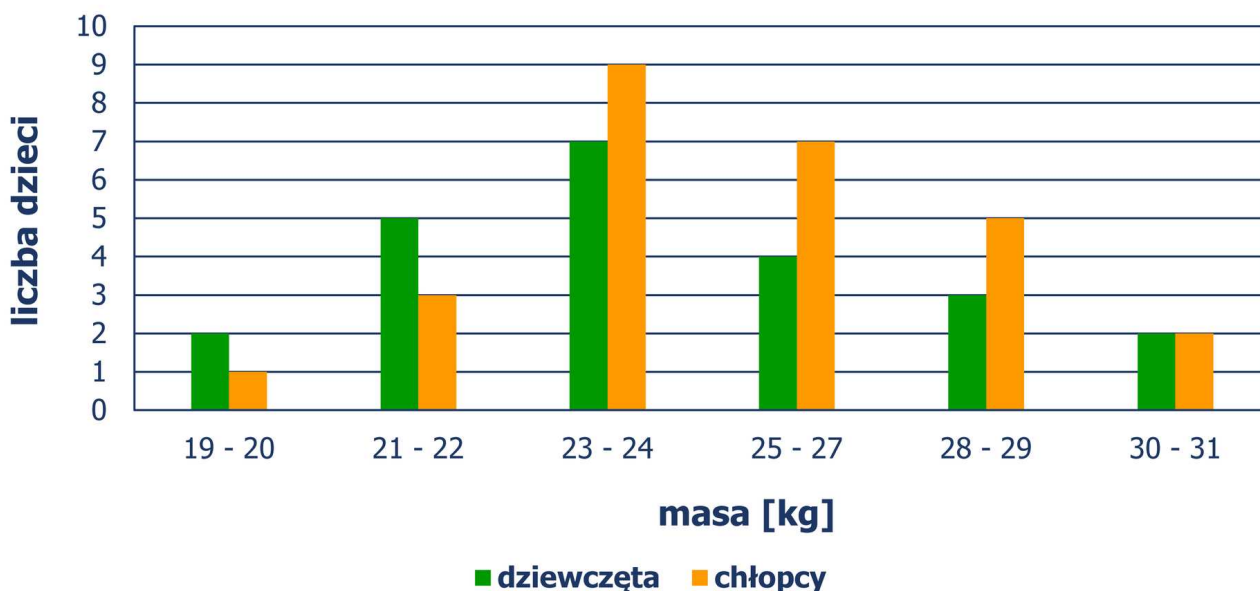
	2010	2011	2012
Zbiory owoców z drzew w tym:	2217	2884	3286
Jabłka	1878	2493	2877
Gruszki	46,5	62,8	64,7
Śliwki	83,8	91,8	102
Wiśnie	147	175	175
Czereśnie	40,1	38	41,1

- W przypadku których owoców pojawił się spadek w zbiorach w latach 2010 – 2012?
- W przypadku których owoców zaobserwowano największy, a w przypadku których najmniejszy wzrost w zbiorach w latach 2010 – 2011, oraz w latach 2011 – 2012?

- c. W przypadku których owoców oraz w jakich latach nie zaobserwowano zmian w zbiorach?
- d. Podaj największą i najmniejszą różnicę w zbiorach owoców w latach 2010 — 2012.

Ćwiczenie 2

Na diagramie przedstawiono wyniki pomiaru masy ciała pewnej liczby dziewcząt i chłopców w wieku 7 lat.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- Jak liczna była grupa dziewcząt, a jak liczna grupa chłopców?
- Jaka masa ciała występowała najczęściej i najrzadziej wśród dziewcząt?
- Jaka masa ciała występowała najczęściej i najrzadziej wśród chłopców?
- Ile osób wśród badanych siedmiolatków miało masę ciała poniżej 25 kg?
- Ilu chłopców miało masę ciała co najmniej równą 25 kg?
- Jaki procent wszystkich dziewcząt stanowiły dziewczęta, których masa ciała była mniejsza niż 28 kg?
- Jaki procent wszystkich osób stanowiły osoby, których masa ciała była większa niż 27 kg?
- O ile procent liczba chłopców o masie ciała większej niż 23 kg i mniejszej niż 24 kg była większa niż liczba dziewcząt o tej samej masie ciała?

Ćwiczenie 3

Na diagramie przedstawiono wyniki sondażu, który został przeprowadzony wśród przechodniów ulicy Spacerowej na temat znaków zodiaku.

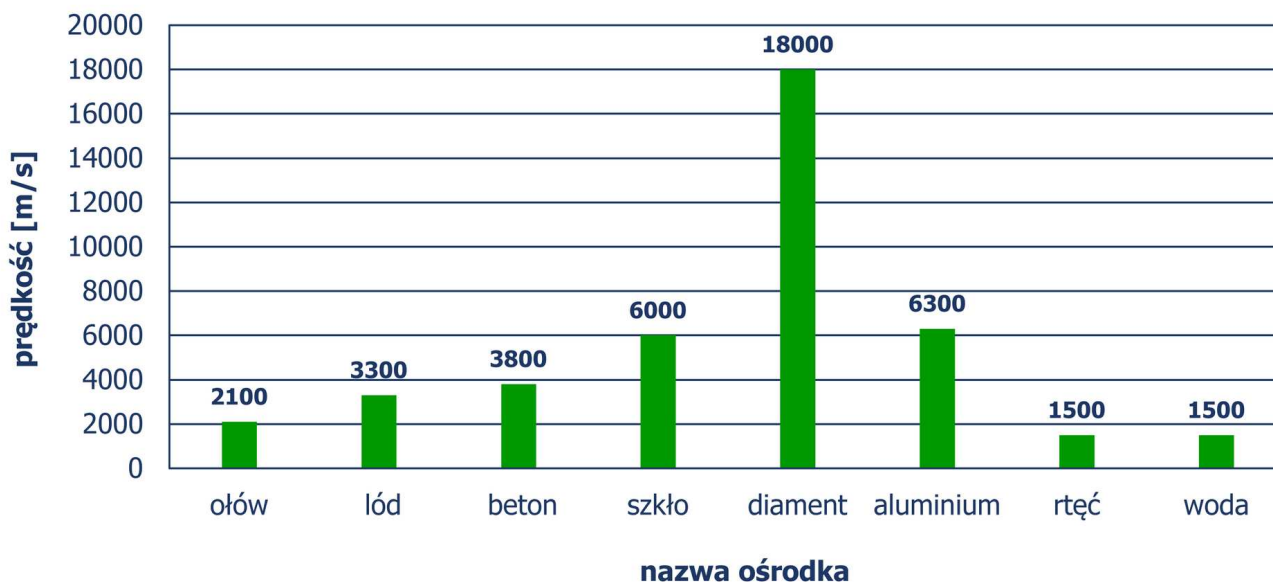


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- Ilu przechodniów wzięło udział w sondażu?
- Który znak zodiaku pojawiał się w odpowiedziach przechodniów najczęściej, a który najrzadziej?
- Które znaki zodiaku uzyskały jednakową liczbę odpowiedzi w sondażu?
- Jaki procent wszystkich przechodniów stanowią osoby spod znaku Panny, a jaki spod znaku Ryby? Wynik podaj z dokładnością do 1 %.
- Jaki procent odpowiedniego znaku zodiaku stanowi Twój znak zodiaku? Wynik podaj z dokładnością do 1 %.

Ćwiczenie 4

Na diagramie przedstawiono dane dotyczące prędkości rozchodzenia się dźwięku w różnych ośrodkach.

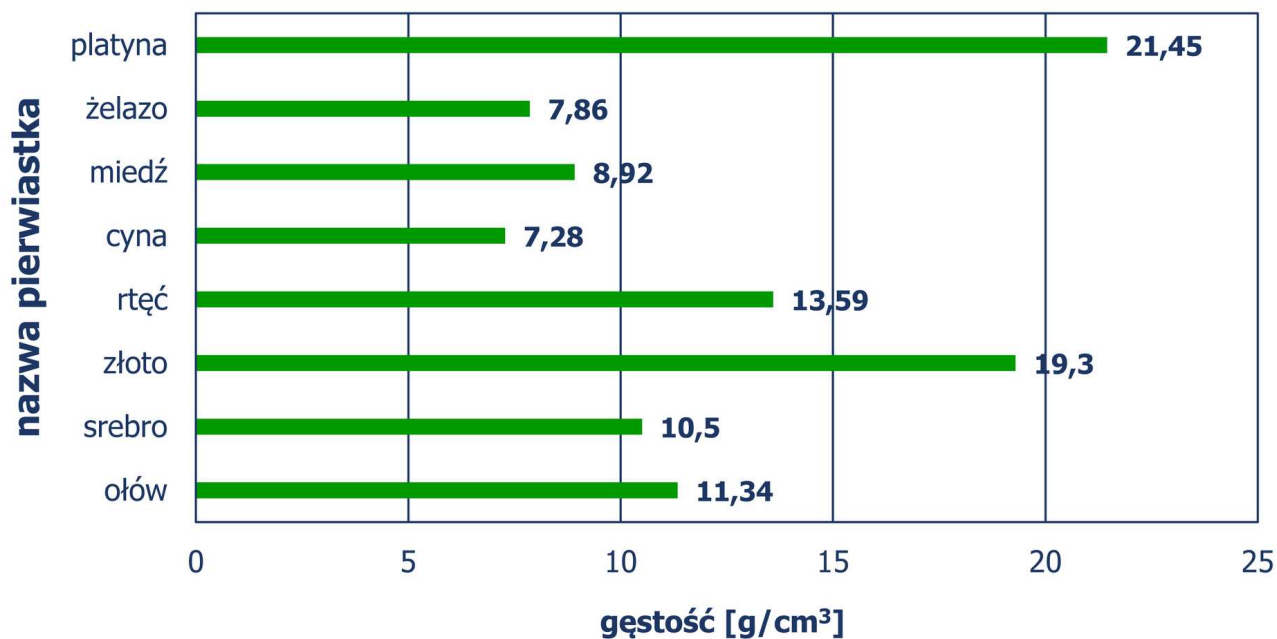


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- W którym ośrodku dźwięk rozchodzi się najszybciej, a w którym najwolniej?
- W których ośrodkach prędkość rozchodzenia się dźwięku jest około 3 razy mniejsza od prędkości, jaką osiąga w diamentcie?
- Ile razy mniejsza jest prędkość rozchodzenia się dźwięku w ołowiu w porównaniu z aluminium?
- O ile procent większa jest prędkość rozchodzenia się dźwięku w szkłe od prędkości rozchodzenia się dźwięku w betonie? Wynik zaokrąglij do 1 %.

Ćwiczenie 5

Na diagramie przedstawiono dane dotyczące gęstości różnych pierwiastków chemicznych.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Najmniejszą gęstość ma cyna.

☐ Gęstość cyny jest o około 66% większa niż gęstość platyny.

☐ Największą gęstość ma platyna.

☐ Gęstość ołowiu stanowi około 93% gęstości srebra.

☐ Gęstość złota jest większa niż 20 g/m³.

☐ Najmniejszą gęstość ma żelazo.

☐ Gęstość rtęci stanowi około 70% gęstości złota.

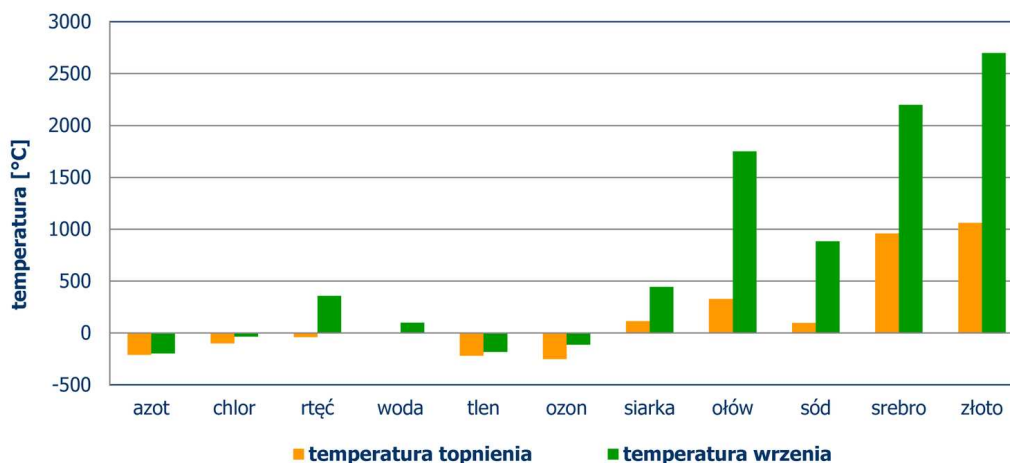
☐ Gęstość srebra i ołowiu jest około 2 razy mniejsza niż gęstość platyny.

☐ Gęstość żelaza, miedzi i cyny jest mniejsza niż 10 g/m^3 .

☐ Największą gęstość ma złoto.

Ćwiczenie 6

Na diagramie przedstawione są dane dotyczące temperatury topnienia i wrzenia niektórych substancji.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oceń, czy podane zdania są prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Największą różnicę między temperaturą topnienia i wrzenia ma azot.

☐ Najmniejszą dodatnią temperaturę wrzenia ma sód.

☐ Temperatura topnienia wody jest równa $0^{\circ}C$.

☐ Największą różnicę między temperaturą topnienia i wrzenia ma złoto.

☐ Największą różnicę między temperaturą topnienia i wrzenia ma złoto.

☐ Najmniejszą ujemną temperaturę topnienia ma rtęć.

☐ Temperatura wrzenia dla 4 substancji ma dodatnią wartość.

☐ Największą ujemną temperaturę wrzenia ma ozon.

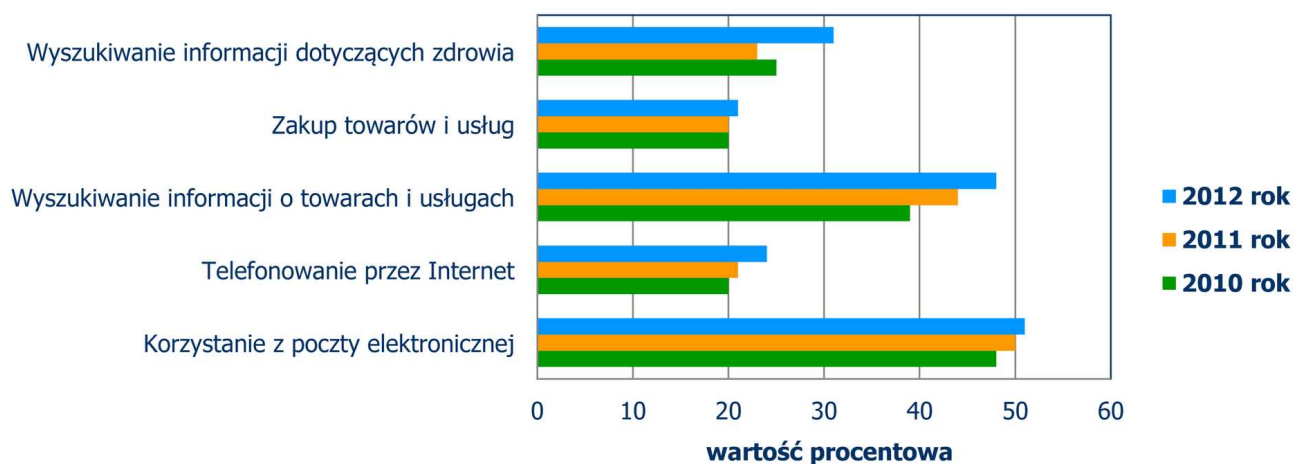
☐ Temperatura topnienia dla 5 substancji ma ujemną wartość.

- ☐ Największą dodatnią temperaturę topnienia ma woda.
- ☐ Najmniejszą różnicę między temperaturą topnienia i wrzenia ma azot.
- ☐ Najmniejszą różnicę między temperaturą topnienia i wrzenia ma tlen.
- ☐ Najmniejszą różnicę między temperaturą topnienia i wrzenia ma azot

Ćwiczenie 7

Na diagramie przedstawiono dane, wyrażone w procentach, które dotyczą sposobów wykorzystania Internetu przez osoby w wieku 17 – 74 lata.

Źródło: Mały Rocznik Statystyczny Polski - 2013 rok



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

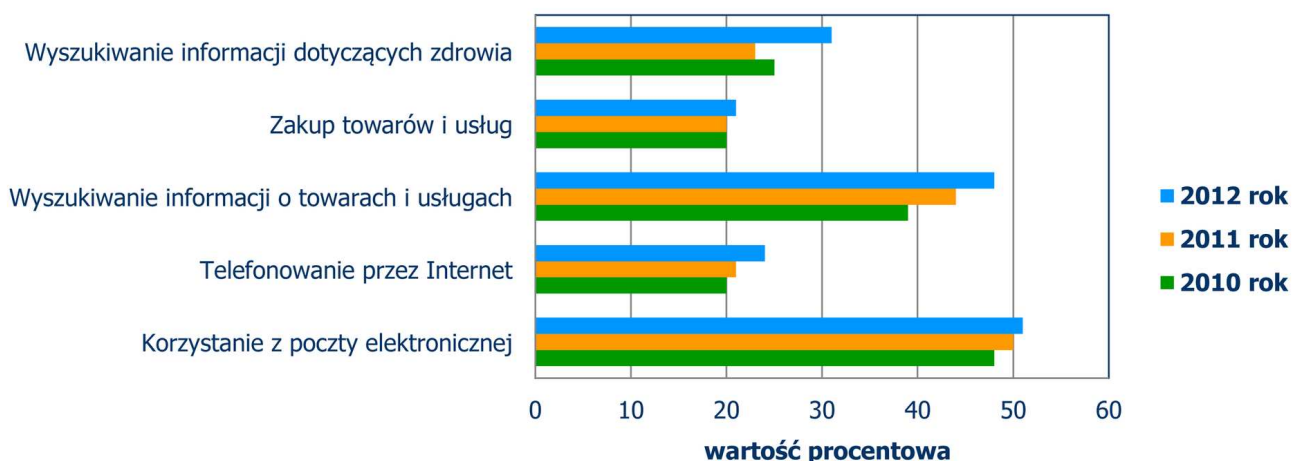
Ponad 50% osób w wieku 17 – 74 lata w 2012 roku wykorzystywało Internet do:

- ☐ wyszukiwania informacji dotyczących zdrowia, wyszukiwania informacji o towarach i usługach, zakupu towarów i usług
- ☐ korzystania z poczty elektronicznej

Ćwiczenie 8

Na diagramie przedstawiono dane, wyrażone w procentach, które dotyczą sposobów wykorzystania Internetu przez osoby w wieku 17 – 74 lata.

Źródło: Mały Rocznik Statystyczny Polski - 2013 rok



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

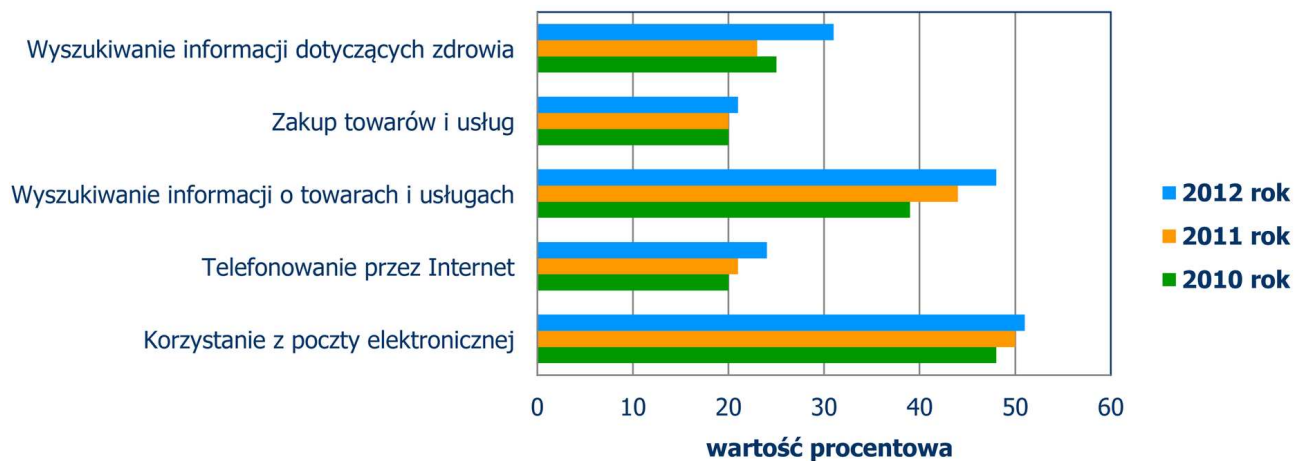
W latach 2010 – 2012 zaobserwowano najbardziej zauważalny wzrost dla

- ☐ telefonowania przez Internet, zakupu towarów i usług, korzystania z poczty elektronicznej
- ☐ wyszukiwania informacji o towarach i usługach

Ćwiczenie 9

Na diagramie przedstawiono dane, wyrażone w procentach, które dotyczą sposobów wykorzystania Internetu przez osoby w wieku 17 – 74 lata.

Źródło: Mały Rocznik Statystyczny Polski - 2013 rok



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

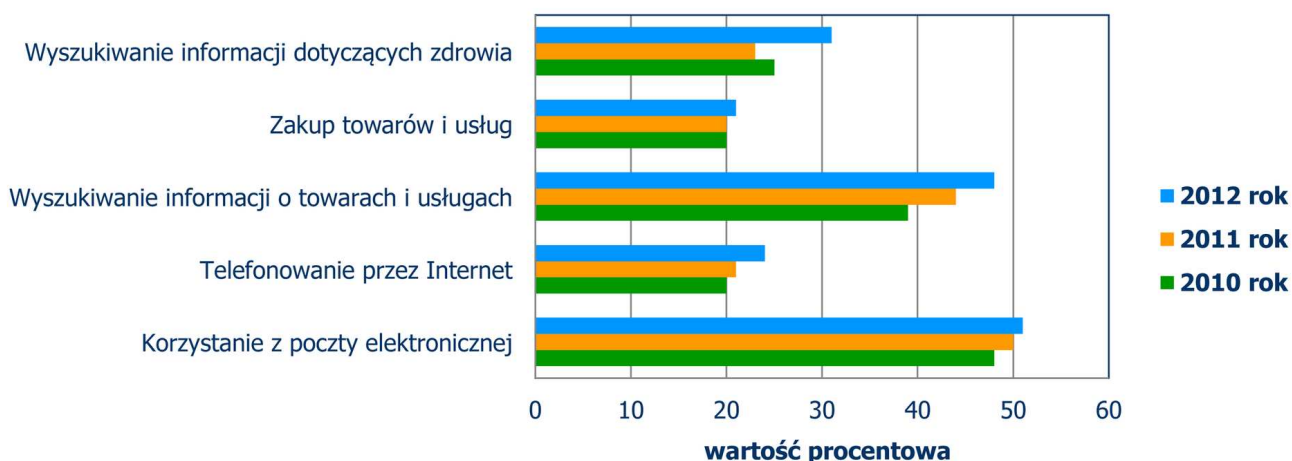
Korzystanie z poczty elektronicznej w 2011 roku było większe

- ☐ o 20% niż telefonowanie przez Internet
- ☐ o 20 punktów procentowych niż telefonowanie przez Internet
- ☐ o 30 punktów procentowych niż zakup towarów i usług
- ☐ o 30% niż zakup towarów i usług

Ćwiczenie 10

Na diagramie przedstawiono dane, wyrażone w procentach, które dotyczą sposobów wykorzystania Internetu przez osoby w wieku 17 – 74 lata.

Źródło: Mały Rocznik Statystyczny Polski - 2013 rok



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

W latach 2011 – 2012 zaobserwowano największy wzrost dla

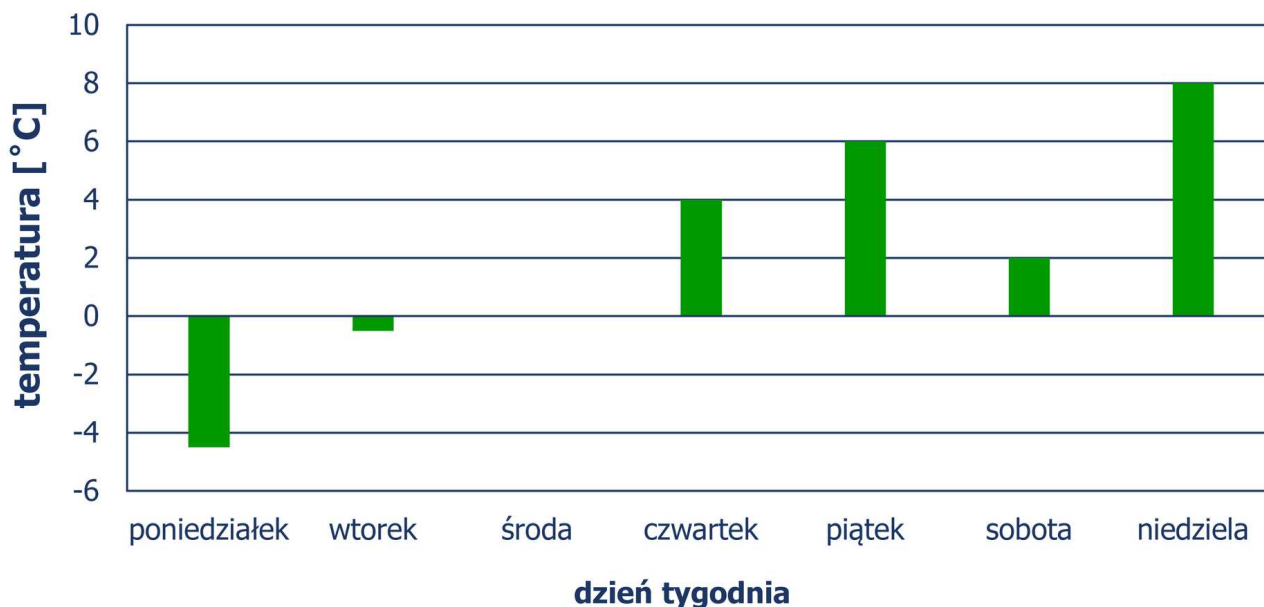
- ☐ korzystania z poczty elektronicznej
- ☐ wyszukiwania informacji dotyczących zdrowia
- ☐ telefonowania przez Internet
- ☐ wyszukiwania informacji o towarach i usługach

Ćwiczenie 11

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12

Na diagramie przedstawiono dane dotyczące średnich temperatur powietrza w ciągu pewnego tygodnia w marcu.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oceń, czy podane zdania są prawdziwe, czy fałszywe.

☐ W sobotę temperatura powietrza była o 300% niższa niż w niedzielę.

☐ W piątek temperatura powietrza wzrosła o 50% w porównaniu z temperaturą jaka była w czwartek.

☐ W niedzielę temperatura powietrza była o 6% wyższa niż poprzedniego dnia.

☐ Najniższa temperatura powietrza była w poniedziałek.

☐ Najwyższa temperatura powietrza była w niedzielę.

☐ Od środy temperatura powietrza była dodatnia.

☐ W czwartek temperatura powietrza była niższa niż w pozostałe dni tygodnia.

☐

☐ Różnica między najwyższą, a najniższą temperaturą powietrza wynosi $13^{\circ}C$.

☐ W sobotę temperatura powietrza zmalała o $4^{\circ}C$ w porównaniu z piątkiem.

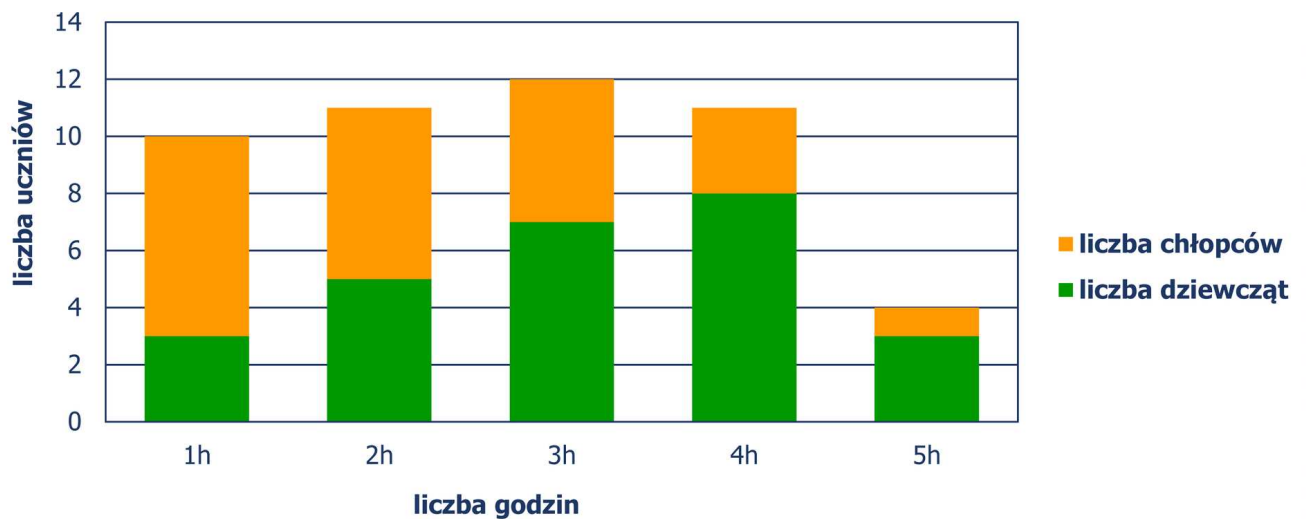
☐ We wtorek temperatura powietrza wzrosła o $4^{\circ}C$ w porównaniu z poniedziałkiem.

☐ Różnica między najwyższą, a najniższą dodatnią temperaturą powietrza wynosi $4^{\circ}C$.

☐ W ciągu całego tygodnia widoczny był wzrost temperatury powietrza

Ćwiczenie 13

Na diagramie przedstawiono wyniki ankiety, która została przeprowadzona wśród uczniów III klasy pewnego gimnazjum. Dotyczyła ona odpowiedzi na pytanie „Ile godzin dziennie przeznaczasz na odrabianie prac domowych?”



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ilu uczniów wzięło udział w ankiecie?

☐ 26

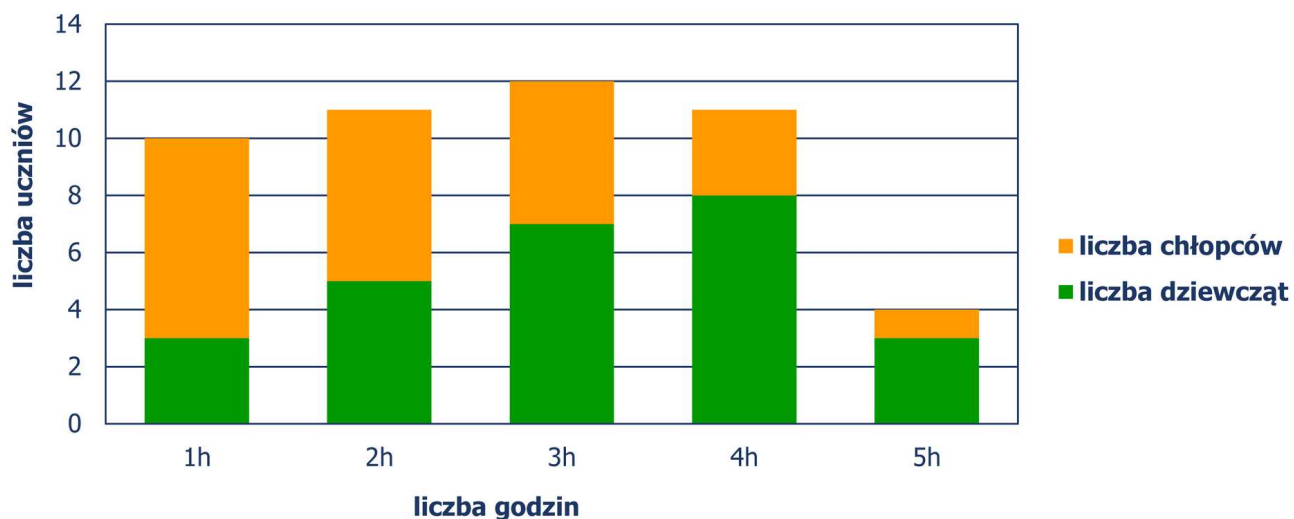
☐ 22

☐ 46

☐ 48

Ćwiczenie 14

Na diagramie przedstawiono wyniki ankiety, która została przeprowadzona wśród uczniów III klasy pewnego gimnazjum. Dotyczyła ona odpowiedzi na pytanie „Ile godzin dziennie przeznaczasz na odrabianie prac domowych?”



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ile dziewcząt wzięło udział w ankiecie?

☐ 28

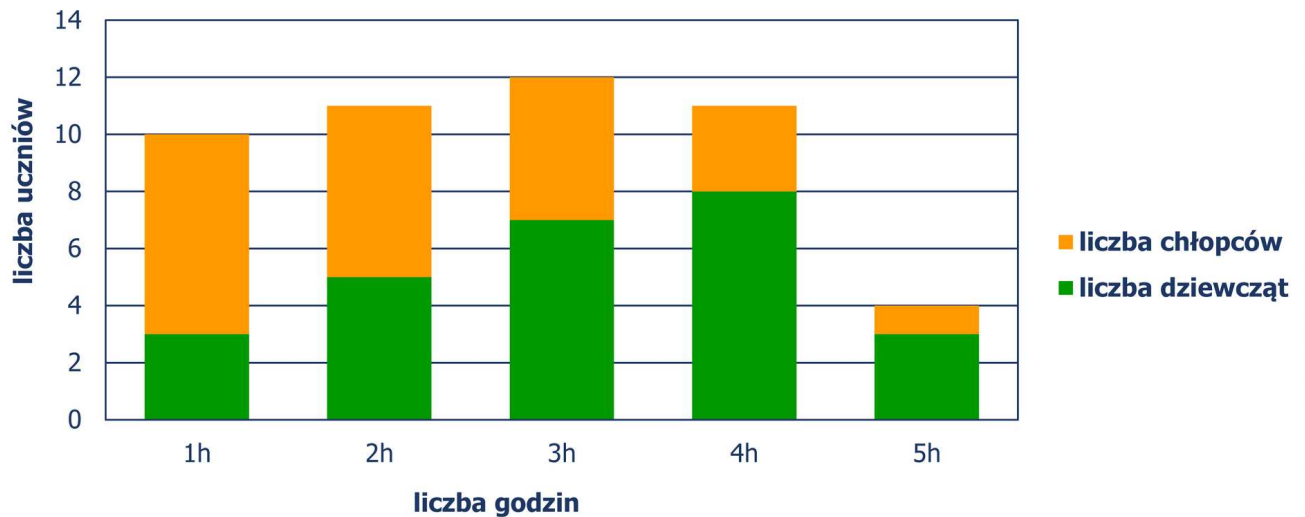
☐ 24

☐ 26

☐ 22

Ćwiczenie 15

Na diagramie przedstawiono wyniki ankiety, która została przeprowadzona wśród uczniów III klasy pewnego gimnazjum. Dotyczyła ona odpowiedzi na pytanie „Ile godzin dziennie przeznaczasz na odrabianie prac domowych?”



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ilu chłopców wzięło udział w ankiecie?

☐ 28

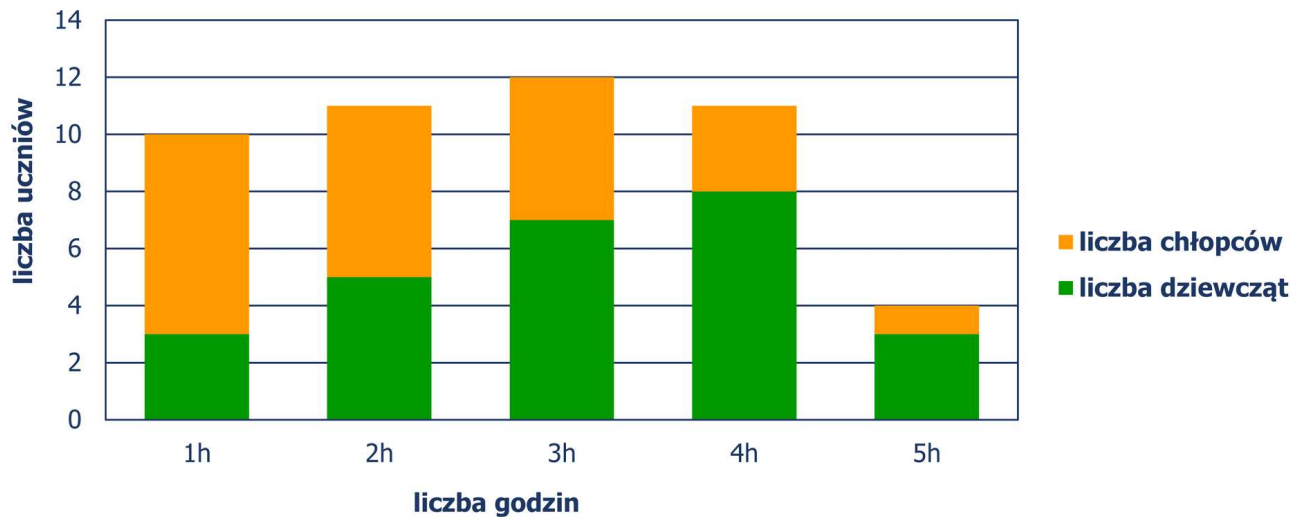
☐ 22

☐ 26

☐ 24

Ćwiczenie 16

Na diagramie przedstawiono wyniki ankiety, która została przeprowadzona wśród uczniów III klasy pewnego gimnazjum. Dotyczyła ona odpowiedzi na pytanie „Ile godzin dziennie przeznaczasz na odrabianie prac domowych?”



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ile godzin dziennie na odrabianie prac domowych przeznaczają najliczniejsza grupa uczniów?

☐ 5 h

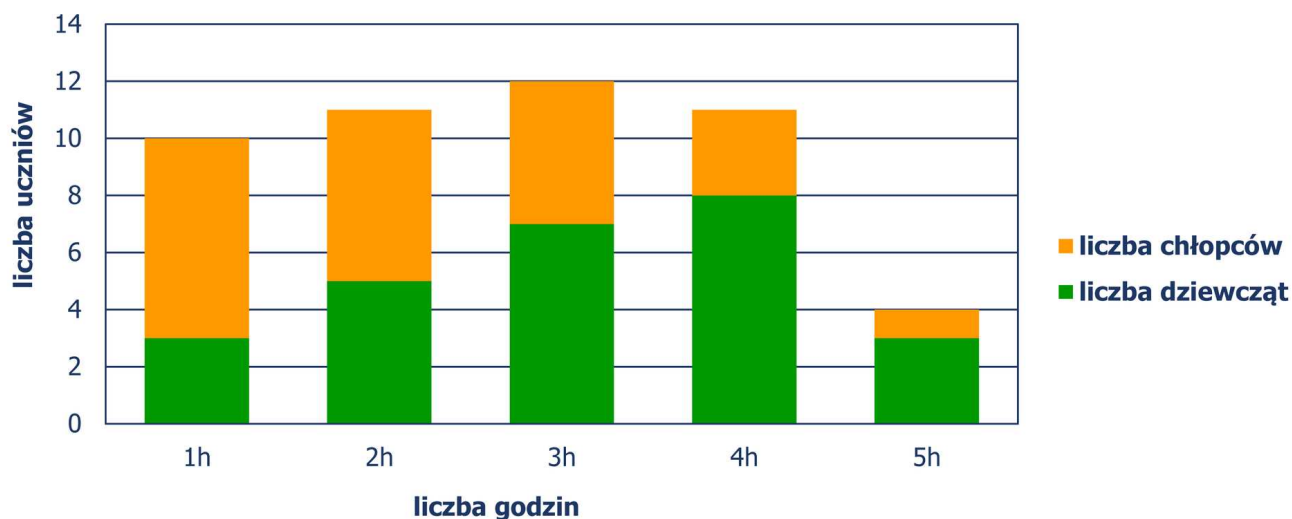
☐ 3 h

☐ 4 h

☐ 2 h

Ćwiczenie 17

Na diagramie przedstawiono wyniki ankiety, która została przeprowadzona wśród uczniów III klasy pewnego gimnazjum. Dotyczyła ona odpowiedzi na pytanie „Ile godzin dziennie przeznaczasz na odrabianie prac domowych?”



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ile godzin dziennie na odrabianie prac domowych przeznaczą grupa uczniów, w której liczba dziewcząt jest trzy razy większa od liczby chłopców?

☐ 4 h

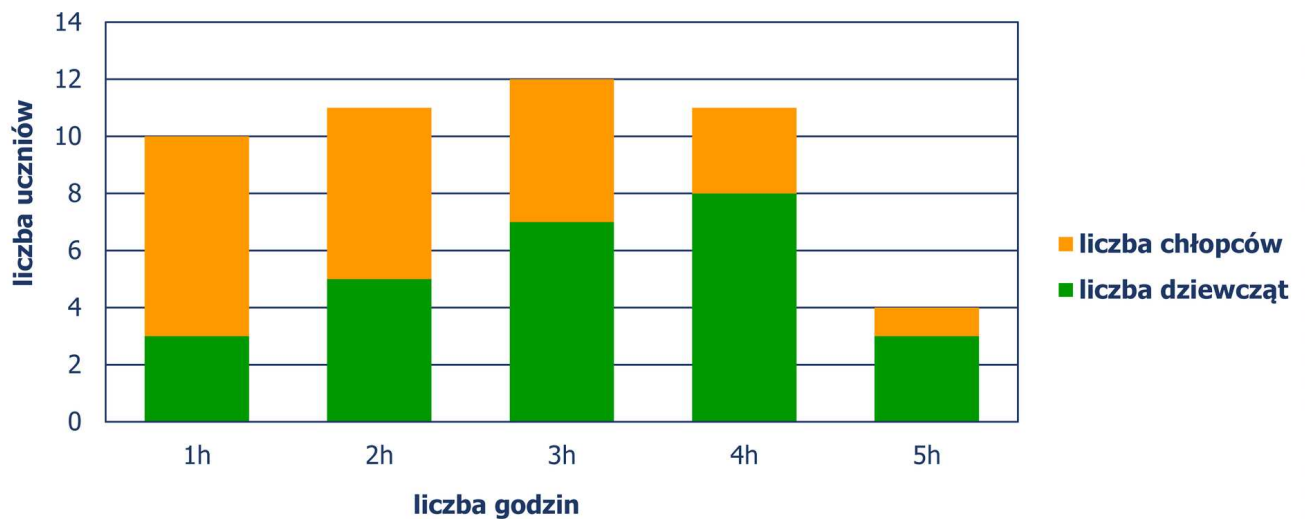
☐ 5 h

☐ 1 h

☐ 3 h

Ćwiczenie 18

Na diagramie przedstawiono wyniki ankiety, która została przeprowadzona wśród uczniów III klasy pewnego gimnazjum. Dotyczyła ona odpowiedzi na pytanie „Ile godzin dziennie przeznaczasz na odrabianie prac domowych?”



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ile godzin dziennie na odrabianie prac domowych przeznaczą grupa uczniów, w której liczba chłopców jest o jeden większa od liczby dziewcząt?

☐ 3 h

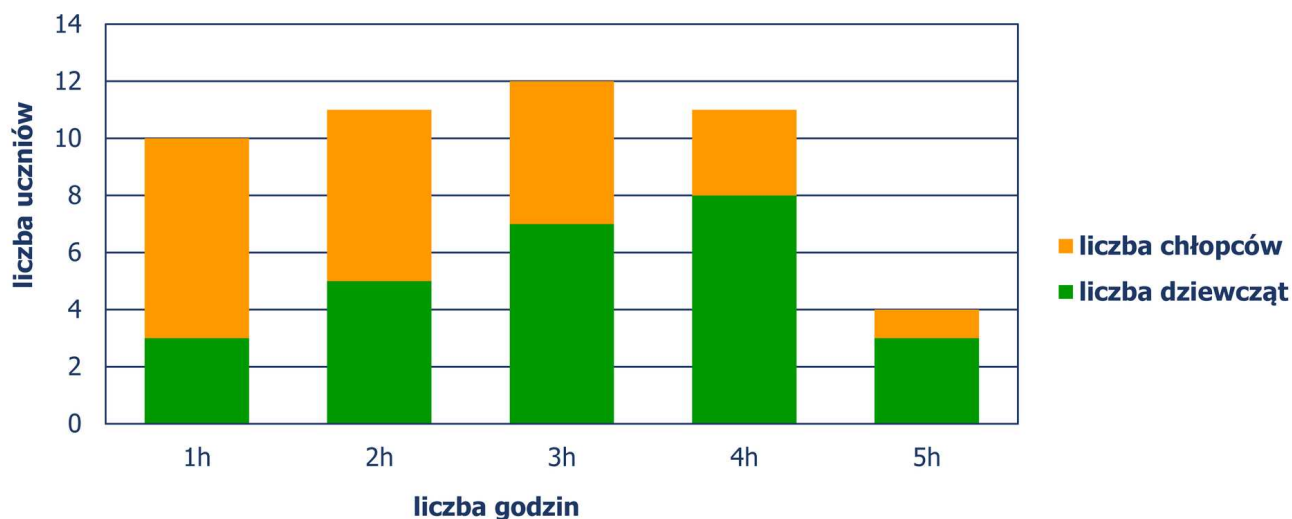
☐ 5 h

☐ 2 h

☐ 1 h

Ćwiczenie 19

Na diagramie przedstawiono wyniki ankiety, która została przeprowadzona wśród uczniów III klasy pewnego gimnazjum. Dotyczyła ona odpowiedzi na pytanie „Ile godzin dziennie przeznaczasz na odrabianie prac domowych?”



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

O ile procent mniej chłopców niż dziewcząt przeznaczają na odrabianie prac domowych cztery godziny dziennie?

☐ 37,5 %

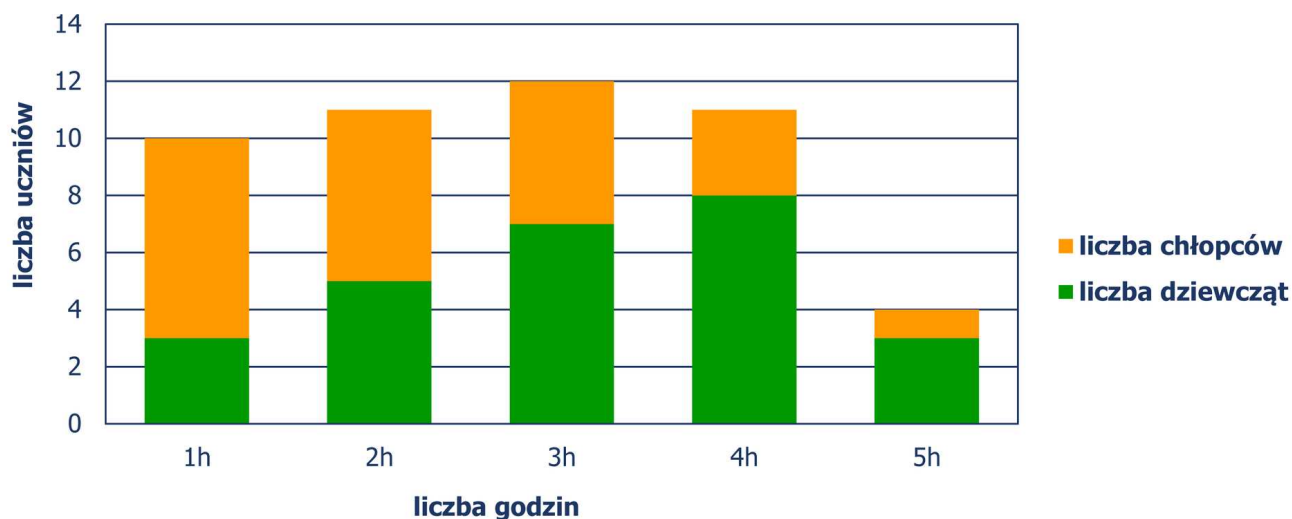
☐ 62,5 %

☐ 67 %

☐ 60 %

Ćwiczenie 20

Na diagramie przedstawiono wyniki ankiety, która została przeprowadzona wśród uczniów III klasy pewnego gimnazjum. Dotyczyła ona odpowiedzi na pytanie „Ile godzin dziennie przeznaczasz na odrabianie prac domowych?”



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

O ile procent więcej dziewcząt niż chłopców wzięło udział w ankiecie?

☐ około 15%

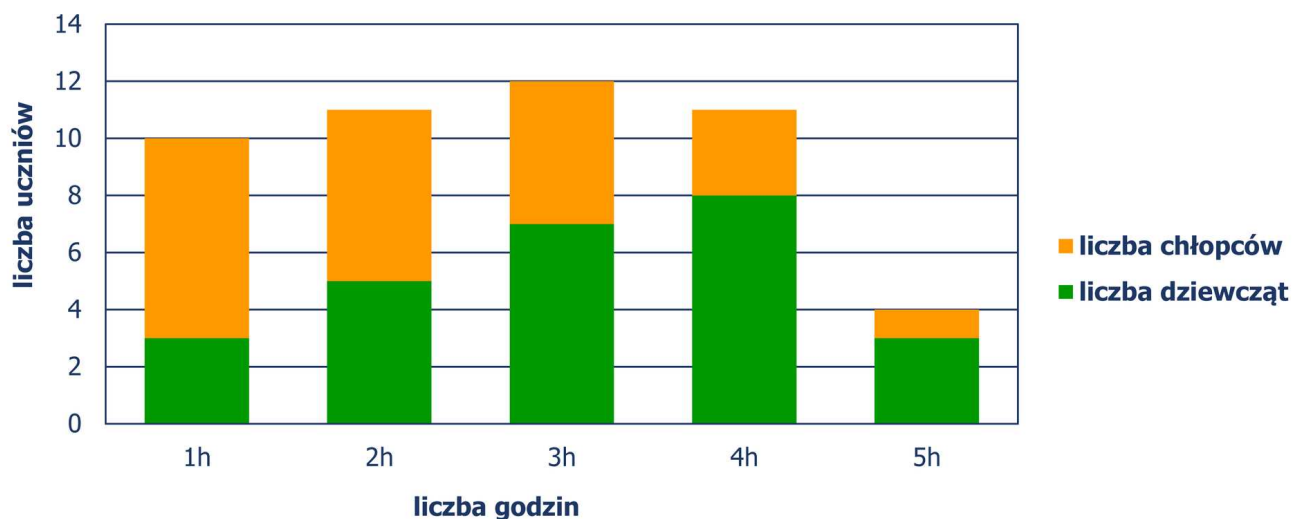
☐ 18%

☐ 15%

☐ około 18%

Ćwiczenie 21

Na diagramie przedstawiono wyniki ankiety, która została przeprowadzona wśród uczniów III klasy pewnego gimnazjum. Dotyczyła ona odpowiedzi na pytanie „Ile godzin dziennie przeznaczasz na odrabianie prac domowych?”



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Jaki procent łącznej liczby dziewcząt stanowi łączna liczba chłopców w grupach, gdzie liczba dziewcząt jest mniejsza niż liczba chłopców?

☐ 260 %

☐ 61,5 %

☐ 162,5 %

☐ 62,5 %

Ćwiczenie 22

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 23

W tabeli przedstawiono dane dotyczące liczby lokatorów i mieszkań w pewnym bloku.

TABELA

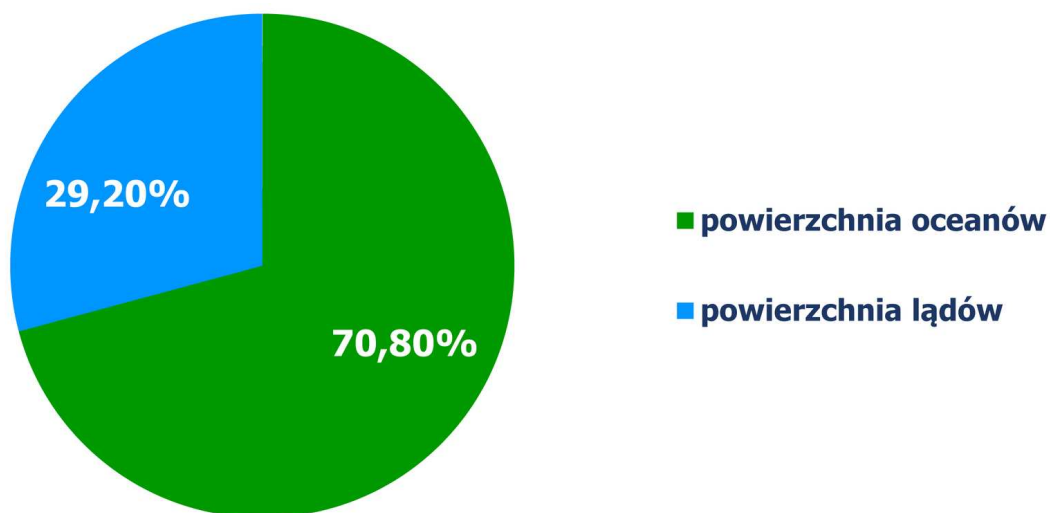
Liczba mieszkań	3	6	11	5	4	1
Liczba lokatorów	1	2	3	4	5	6
w tym dzieci	—	—	1	—	2	4

- Ile jest wszystkich mieszkań w tym bloku?
- Ile jest mieszkań zajmowanych przez 4 lokatorów?
- Ile osób dorosłych mieszka w tym bloku?
- Ile jest mieszkań zamieszkiwanych również przez dzieci?
- Ile dzieci mieszka w tym bloku?

Ćwiczenie 24

Diagram kołowy przedstawia procentowy podział powierzchni lądów i oceanów na Ziemi.

Źródło: Świat w liczbach 2008/2009

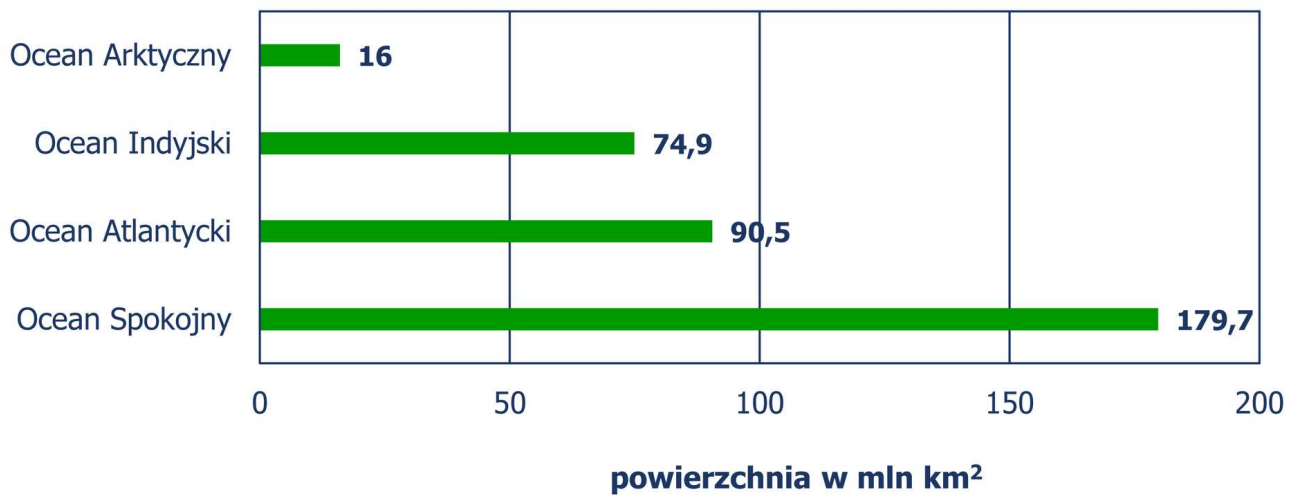


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Na diagramach słupkowych przedstawiono dane dotyczące powierzchni poszczególnych kontynentów i oceanów wyrażone w milionach kilometrów kwadratowych.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- Jaką łączną powierzchnię zajmują kontynenty na Ziemi?
- Jaką łączną powierzchnię zajmują oceany na Ziemi?
- Jaki procent powierzchni lądów na Ziemi stanowi powierzchnia Afryki, a jakim Europy? Wynik podaj z dokładnością do 0,1 %.
- O ile procent powierzchnia Azji jest większa niż powierzchnia Antarktyki? Wynik podaj z dokładnością do 1 %.
- Jaki procent powierzchni oceanów na Ziemi stanowi powierzchnia Oceanu Arktycznego? Wynik podaj z dokładnością do 0,01 %.
- O ile procent powierzchnia Oceanu Atlantyckiego jest mniejsza niż powierzchnia Oceanu Spokojnego? Wynik podaj z dokładnością do 0,1 %.

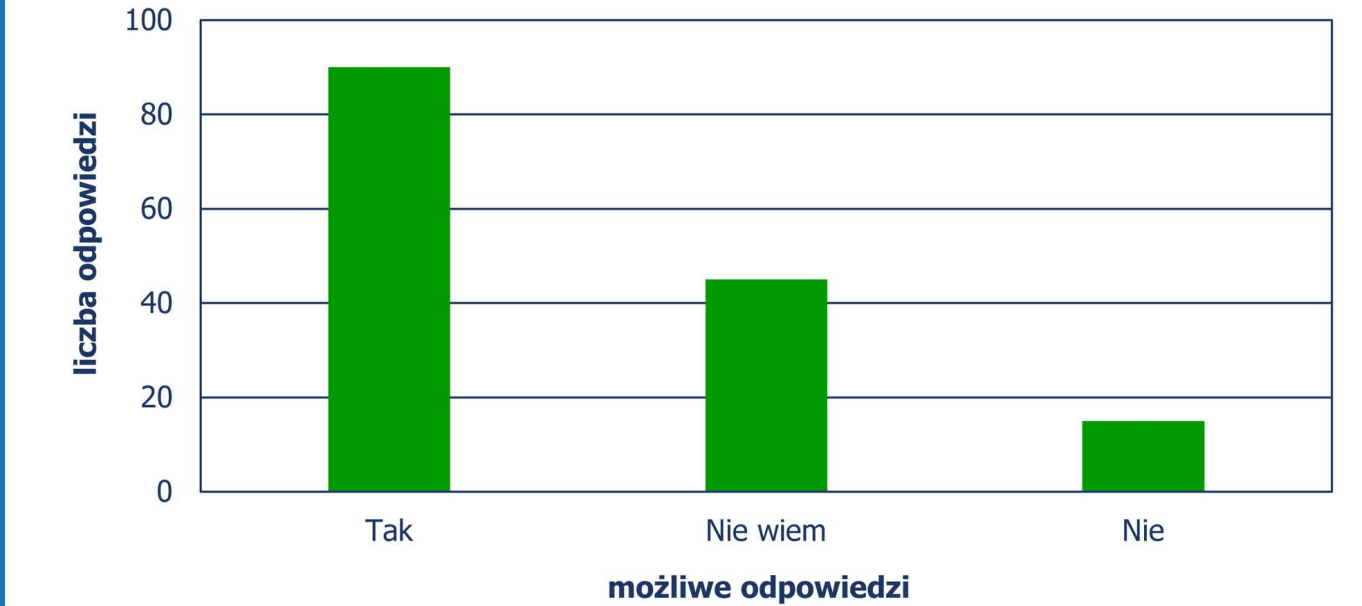
Przedstawianie danych statystycznych

Przykład 1

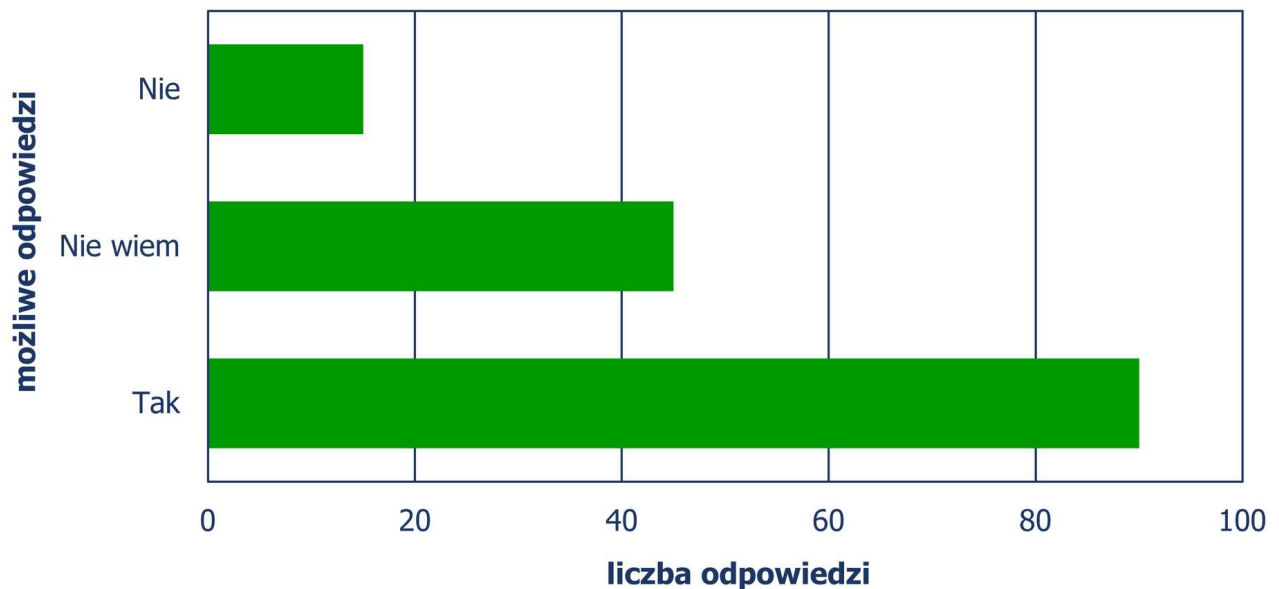
Wśród wszystkich pracowników firmy została przeprowadzona ankieta, która dotyczyła wyrażenia opinii na temat wyjazdu na wycieczkę pracowniczą w góry. Do wyboru były trzy możliwe odpowiedzi: tak, nie wiem, nie. Uzyskane odpowiedzi zostały przedstawione w poniższej tabeli.

tabela	
Możliwe odpowiedzi	Liczba odpowiedzi
Tak	90
Nie wiem	45
Nie	15

Przedstawmy te dane na diagramach słupkowych.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przedstawmy te dane na diagramie kołowym procentowym.
W tym celu obliczmy liczbę wszystkich pracowników firmy.

$$90 + 45 + 15 = 150$$

W tej firmie pracuje 150 osób.

Następnie obliczmy, jakim procentem wszystkich osób pracujących w tej firmie są osoby, które udzieliły poszczególnych odpowiedzi w ankiecie.

- Odpowiedź: Tak

$$\frac{90}{150} \cdot 100\% = 60\%$$

- Odpowiedź: Nie wiem

$$\frac{45}{150} \cdot 100\% = 30\%$$

- Odpowiedź: Nie

$$\frac{15}{150} \cdot 100\% = 10\%$$

Zatem 60 % osób odpowiedziało Tak, 30 % osób - Nie wiem, 10 % osób - Nie.

Następnie obliczmy miarę kątów środkowych, które odpowiadają poszczególnym wycinkom kołowym odpowiadającym poszczególnym rodzajom odpowiedzi.

- Odpowiedź: Tak

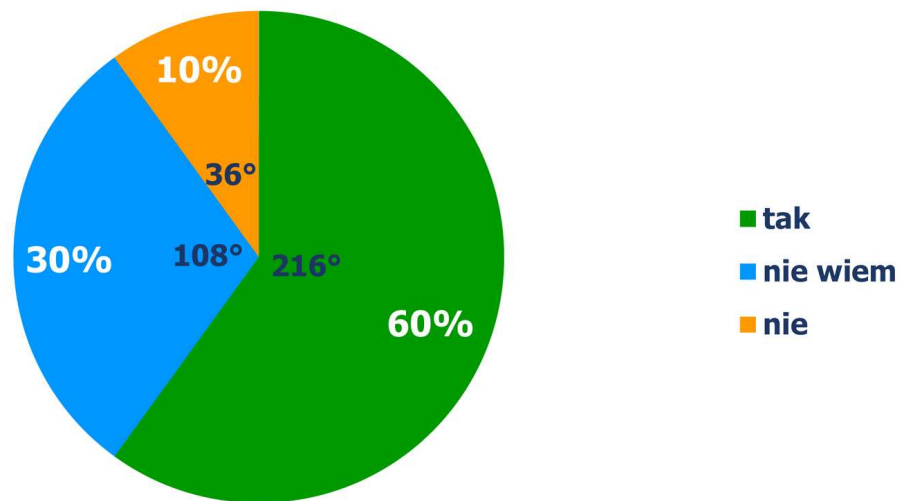
$$\frac{90}{150} \cdot 360^\circ = 216^\circ$$

- Odpowiedź: Nie wiem

$$\frac{45}{150} \bullet 360^\circ = 108^\circ$$

- Odpowiedź: Nie

$$\frac{15}{150} \bullet 360^\circ = 36^\circ$$

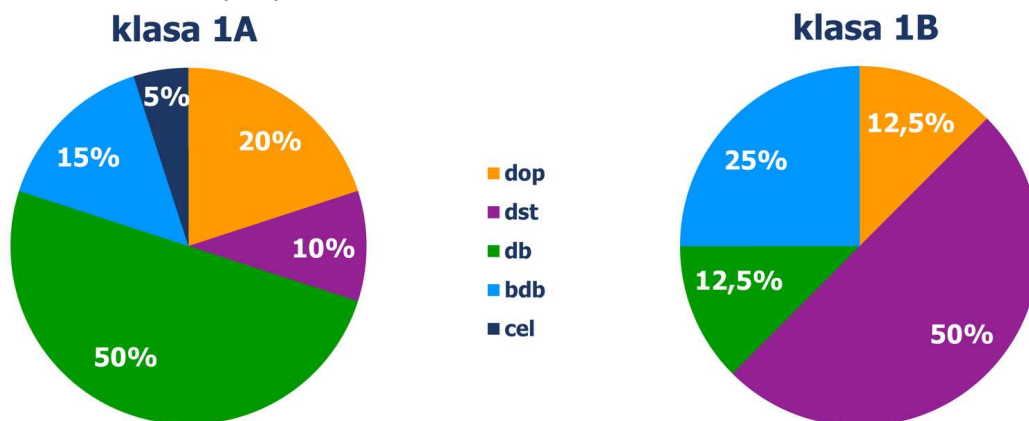


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 2

Na zakończenie pierwszego półrocza uczniowie dwóch klas pierwszych napisali test sprawdzający wiedzę i umiejętności z języka angielskiego. Uzyskane przez nich wyniki, w podziale na klasy, zostały przedstawione na diagramach kołowych.

W klasie 1A do testu przystąpiło 20 uczniów, w klasie 1B – 24 uczniów.

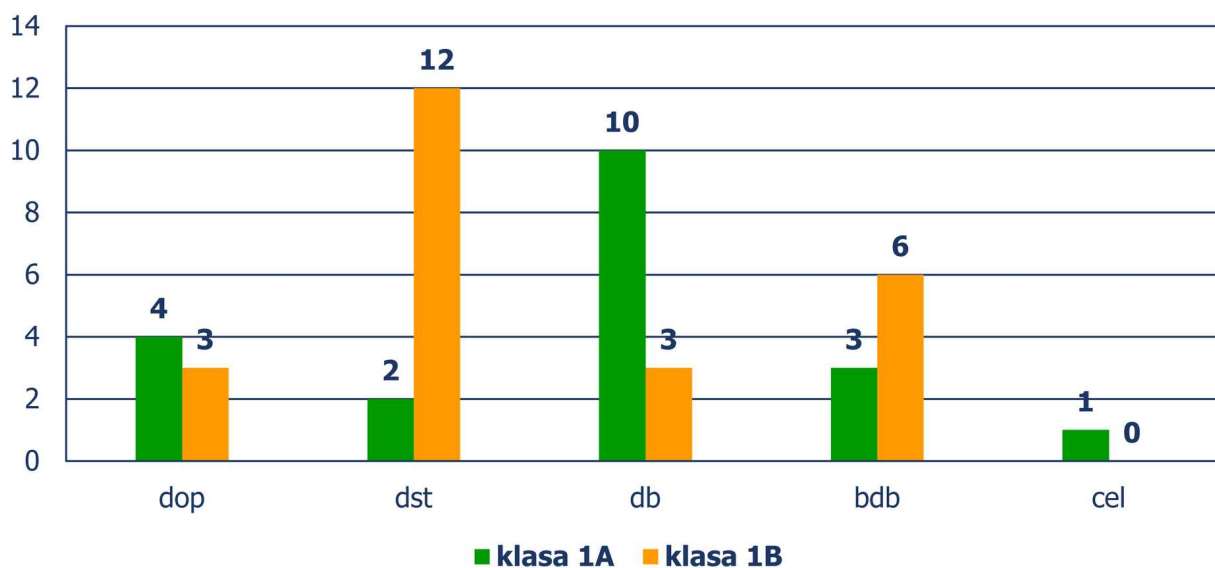


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przedstawmy te dane na jednym diagramie słupkowym pionowym. Obliczmy, ile osób otrzymało poszczególne oceny w każdej klasie.

- Klasa 1a:
 - ocena dopuszczająca: $20\% \bullet 20 = 0,2 \bullet 20 = 4$
 - ocena dostateczna: $10\% \bullet 20 = 0,1 \bullet 20 = 2$
 - ocena dobra: $50\% \bullet 20 = 0,5 \bullet 20 = 10$
 - ocena bardzo dobra: $15\% \bullet 20 = 0,15 \bullet 20 = 3$

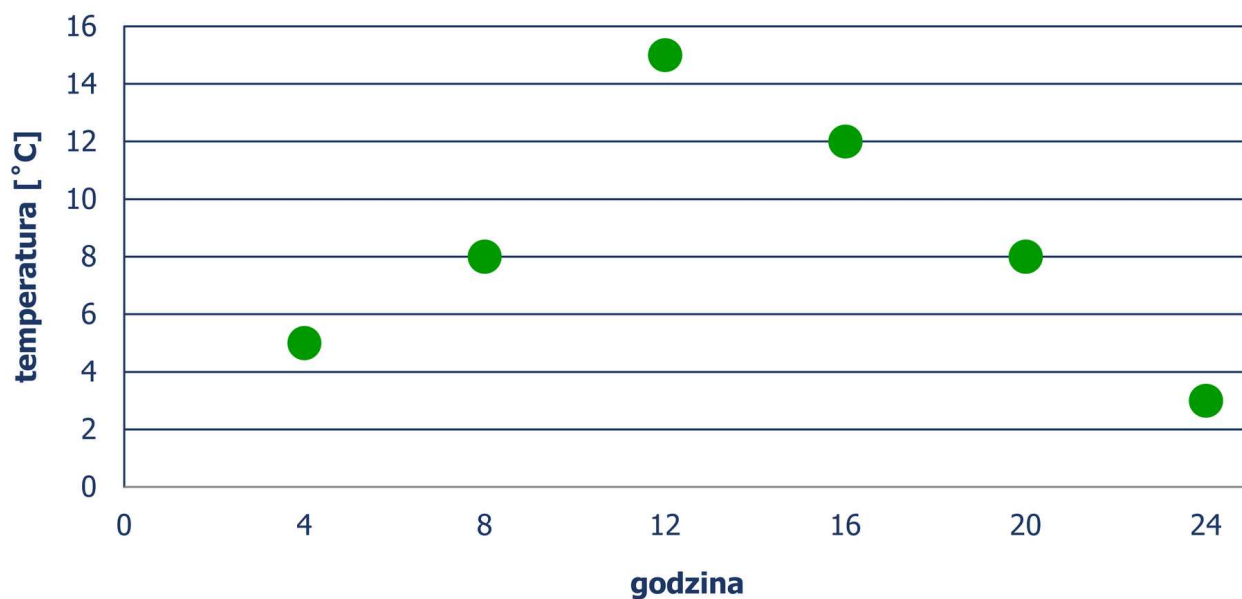
- ocena celująca: $5\% \cdot 20 = 0,05 \cdot 20 = 1$
- Klasa 1b:
- ocena dopuszczająca: $12,5\% \cdot 24 = 0,125 \cdot 24 = 3$
- ocena dostateczna: $50\% \cdot 24 = 0,5 \cdot 24 = 12$
- ocena dobra: $12,5\% \cdot 24 = 0,125 \cdot 24 = 3$
- ocena bardzo dobra: $25\% \cdot 24 = 0,25 \cdot 24 = 6$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 1

Na diagramie przedstawiono dane dotyczące zmian temperatury powietrza w ciągu doby.

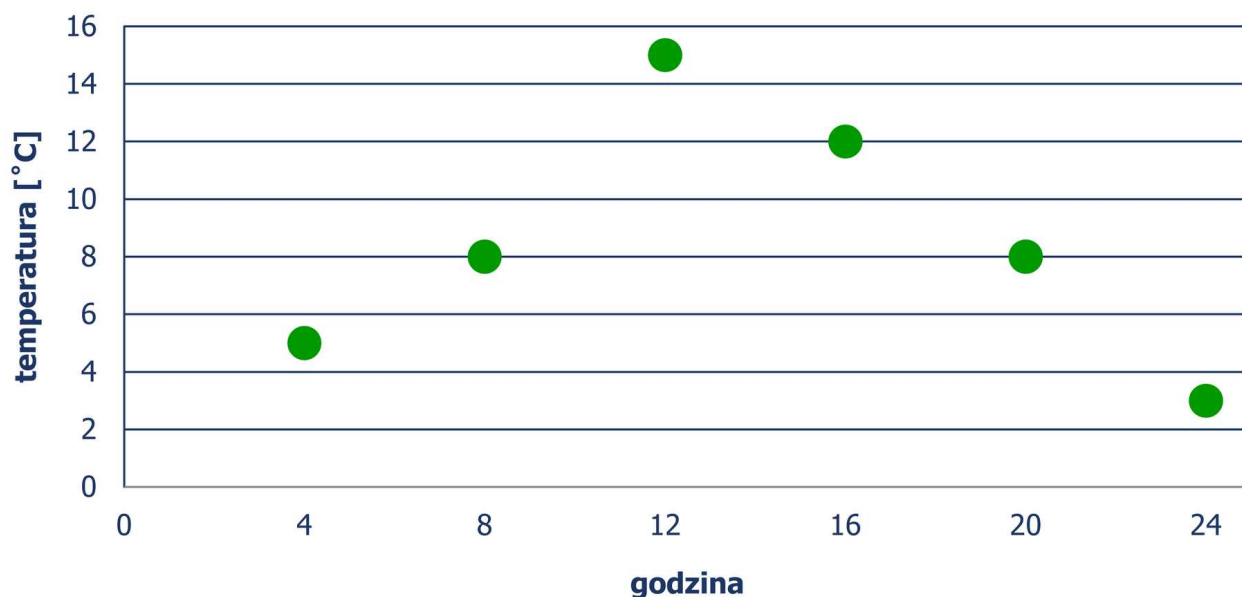


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przedstaw te dane w postaci tabeli.

Ćwiczenie 2

Na diagramie przedstawiono dane dotyczące zmian temperatury powietrza w ciągu doby.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Rozstrzygnij, czy podane zdania są prawdziwe, czy fałszywe

- ☐ O godzinie 8 i 20 zanotowano taką samą temperaturę powietrza.
- ☐ Najniższą temperaturę powietrza zanotowano o godzinie 4.
- ☐ W godzinach 4 – 8 temperatura powietrza wzrosła o 4°C .
- ☐ Największy spadek temperatury zanotowano w godzinach 20 – 24.
- ☐ Spadek temperatury nastąpił dopiero po godzinie 16.
- ☐ Różnica między najwyższą a najniższą temperaturą powietrza wynosi 12°C .
- ☐ W godzinach 16 – 20 temperatura powietrza zmalała o 2°C .
- ☐ Najniższą temperaturę powietrza zanotowano o północy.

☐ Najwyższą temperaturę powietrza zanotowano o godzinie 12.

☐ Najwyższą temperaturę powietrza zanotowano o godzinie 16.

☐ W ciągu doby zanotowano pomiar temperatury powietrza 7 razy.

☐ Największy wzrost temperatury zanotowano w godzinach 8 – 12.

Ćwiczenie 3

W pewnej szkole zorganizowano zbiórkę makulatury. Wszystkie klasy rywalizowały między sobą. Po zakończonej akcji organizatorzy przygotowali zestawienie wyników w tabeli oraz wyłonili zwycięzców.

TABELA

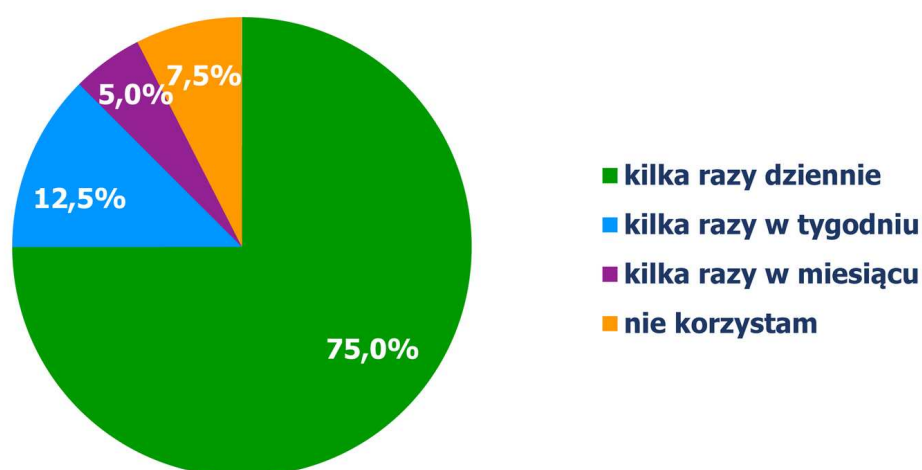
Klasa	Liczba kilogramów makulatury	Uwagi
I a	380 kg	
I b	620 kg	I miejsce
I c	152 kg	
II a	510 kg	III miejsce
II b	448 kg	
II c	530 kg	II miejsce
III a	503 kg	
III b	283 kg	
III c	175 kg	

- Przedstaw te dane na diagramie słupkowym pionowym w podziale na wszystkie klasy.
- Przedstaw te dane na diagramie słupkowym poziomym w podziale na klasy pierwsze, drugie, trzecie.
- Ile kilogramów makulatury zebrano podczas tej zbiórki w całej szkole?

- d. Które klasy spośród każdego poziomu klas przyniosły najmniej makulatury?
- e. Czy klasy pierwsze i trzecie przyniosły łącznie więcej makulatury niż połowa całej makulatury zebranej w szkole?
- f. O ile więcej kilogramów makulatury zebrała klasa I b w porównaniu z każdą z klas, które zajęły drugie i trzecie miejsce?
- g. Jaki procent makulatury zebranej w całej szkole stanowi makulatura zebrana przez klasę III a? Wynik zaokrąglaj do 1 %.

Ćwiczenie 4

Na diagramie kołowym przedstawiono wyniki ankiety, która została przeprowadzona wśród 80 studentów. Dotyczyła ona odpowiedzi na pytanie „Jak często korzystasz z Internetu?”



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ilu studentów korzysta z Internetu?

☐ 6

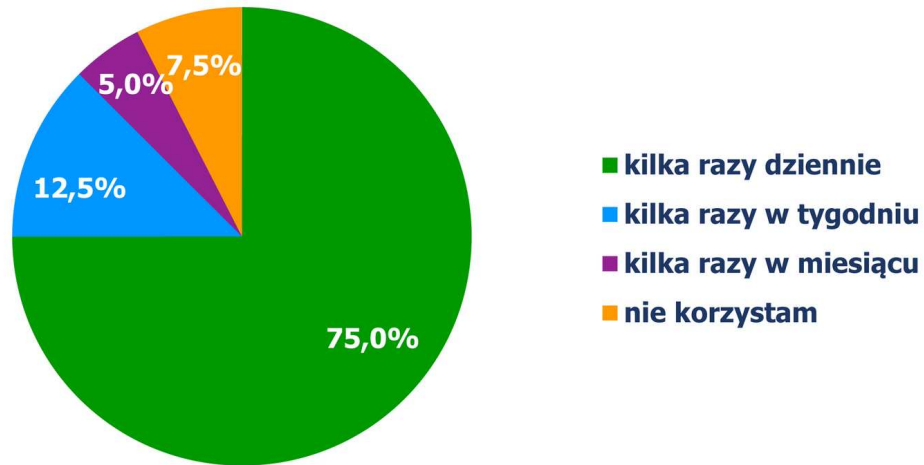
☐ 5

☐ 65

☐ 74

Ćwiczenie 5

Na diagramie kołowym przedstawiono wyniki ankiety, która została przeprowadzona wśród 80 studentów. Dotyczyła ona odpowiedzi na pytanie „Jak często korzystasz z Internetu?”



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ile razy więcej studentów korzysta z Internetu kilka razy dziennie niż nie korzysta?

☐ 12 razy

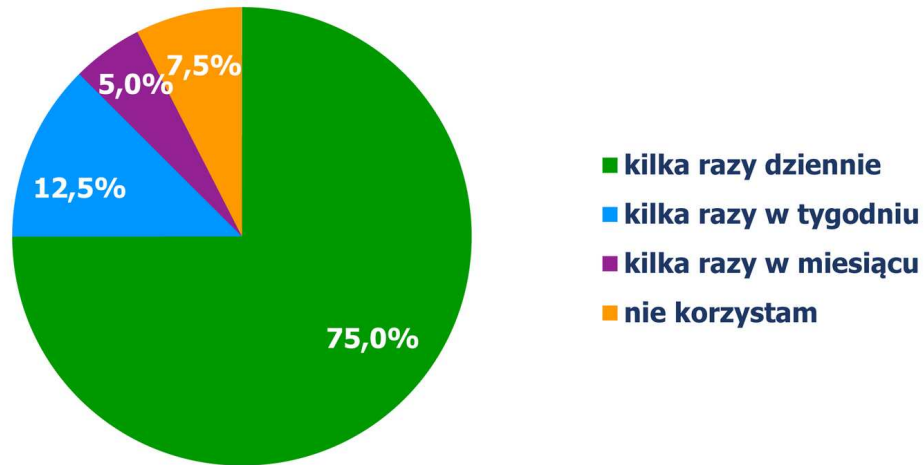
☐ 10 razy

☐ 6 razy

☐ 8 razy

Ćwiczenie 6

Na diagramie kołowym przedstawiono wyniki ankiety, która została przeprowadzona wśród 80 studentów. Dotyczyła ona odpowiedzi na pytanie „Jak często korzystasz z Internetu?”



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

O ilu więcej studentów korzysta z Internetu kilka razy w tygodniu niż kilka razy w miesiącu?

☐ 4

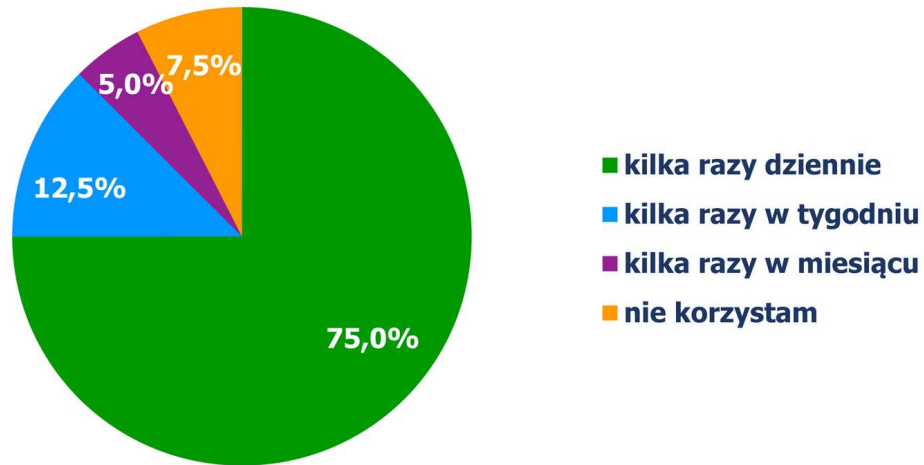
☐ 10

☐ 2

☐ 6

Ćwiczenie 7

Na diagramie kołowym przedstawiono wyniki ankiety, która została przeprowadzona wśród 80 studentów. Dotyczyła ona odpowiedzi na pytanie „Jak często korzystasz z Internetu?”



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

O ile procent więcej studentów korzysta z Internetu kilka razy dziennie niż nie korzysta wcale?

☐ 90 %

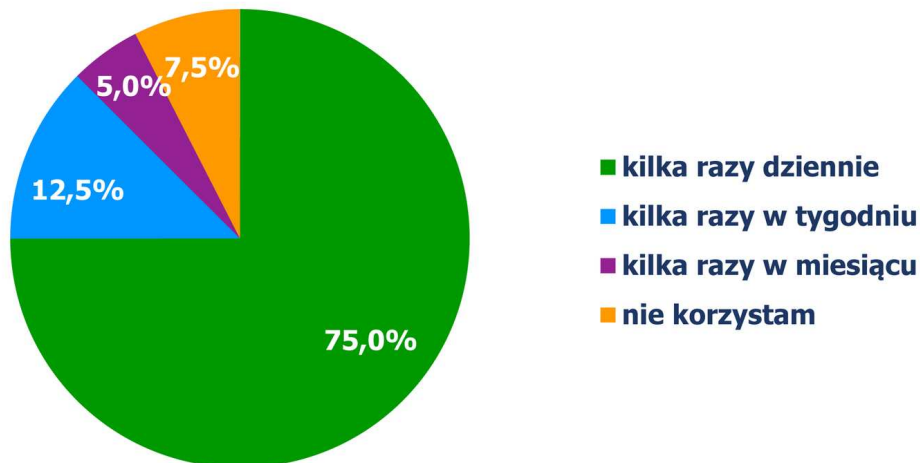
☐ 575 %

☐ 57,5 %

☐ 900 %

Ćwiczenie 8

Na diagramie kołowym przedstawiono wyniki ankiety, która została przeprowadzona wśród 80 studentów. Dotyczyła ona odpowiedzi na pytanie „Jak często korzystasz z Internetu?”



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Jaki procent studentów korzystających z Internetu stanowią studenci korzystający z Internetu kilka razy w tygodniu? Wynik zaokrąglaj do 0,1 %.

☐ 87,5 %

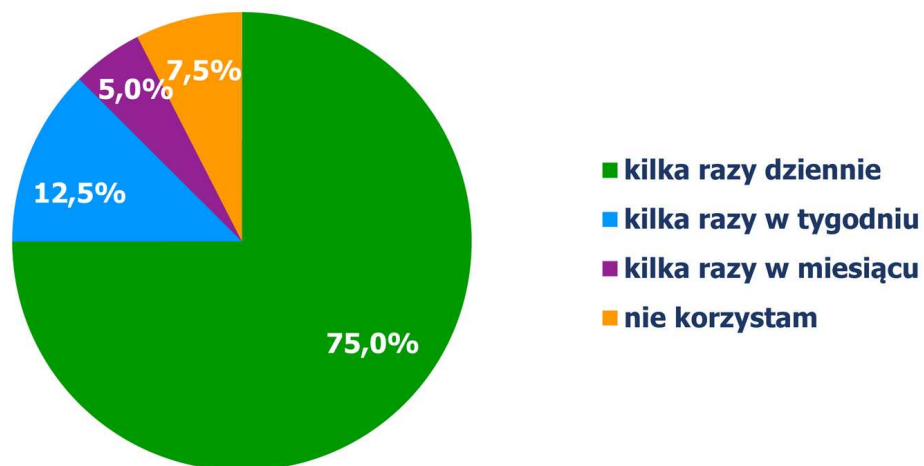
☐ 13,5 %

☐ 12,5 %

☐ 74 %

Ćwiczenie 9

Na diagramie kołowym przedstawiono wyniki ankiety, która została przeprowadzona wśród 80 studentów. Dotyczyła ona odpowiedzi na pytanie „Jak często korzystasz z Internetu?”



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przedstaw te dane na diagramie słupkowym poziomym

Ćwiczenie 10

W tabeli łodygowo-listkowej przedstawiono dane dotyczące pomiarów masy ciała pewnej grupy osób.

TABELA

Masa ciała w kilogramach	
4	0, 1, 3, 6, 6, 8, 8
5	1, 1, 4, 5, 8, 9
6	0, 2, 5, 6, 7, 7, 7, 9
7	1, 3, 3, 4

- Przedstaw te dane na diagramie słupkowym pionowym oraz na diagramie kołowym, dzieląc masę ciała badanej grupy osób na poszczególne kategorie:
40 kg – 49 kg ; 50 kg – 59 kg ; 60 kg – 69 kg ; 70 kg – 79 kg.
- Jakie wartości masy ciała się powtarzały? Która z nich wystąpiła największą liczbę razy?
- Ile osób zostało poddanych badaniu masy ciała?
- Jaki procent badanej grupy osób stanowią osoby, których masa ciała jest liczbą parzystą?
- Ile procent mniej jest osób o masie ciała w kategorii 50 kg – 59 kg niż w kategorii 60 kg – 79 kg?

Ćwiczenie 11

W tabeli przedstawiono dane dotyczące liczby obejrzanych filmów przez cztery koleżanki: Anię, Basię, Martę oraz Zosię w okresie trzech miesięcy.

TABELA

	maj	czerwiec	lipiec
Ania	6	8	13
Basia	4	10	15
Marta	10	13	7
Zosia	5	7	16

- Przedstaw te dane na jednym diagramie słupkowym pionowym.
- Przedstaw na diagramie kołowym dane dotyczące liczby obejrzanych filmów w okresie tych trzech miesięcy.

Ćwiczenie 12

W tabeli przedstawiono dane dotyczące liczby obejrzanych filmów przez cztery koleżanki: Anię, Basię, Martę oraz Zosię w okresie trzech miesięcy.

TABELA			
	maj	czerwiec	lipiec
Ania	6	8	13
Basia	4	10	15
Marta	10	13	7
Zosia	5	7	16

- ☐ Liczba filmów obejrzanych przez wszystkie koleżanki w czerwcu stanowi około 33 % liczby wszystkich obejrzanych filmów.
- ☐ Najwięcej filmów obejrzała Marta.
- ☐ Liczba filmów obejrzanych przez Anię stanowi około 26 % liczby wszystkich obejrzanych filmów.
- ☐ Każda z koleżanek obejrzała najmniej filmów w maju.
- ☐ Liczba filmów obejrzanych przez Anię jest o 10 % mniejsza niż liczba filmów obejrzanych przez Martę.
- ☐

☐ Najmniej filmów obejrzały wszystkie koleżanki razem w maju.

☐ Każda z koleżanek obejrzała najwięcej filmów w lipcu.

☐ Najmniej filmów obejrzała Ania.

☐ Najwięcej filmów obejrzały wszystkie koleżanki razem w lipcu.

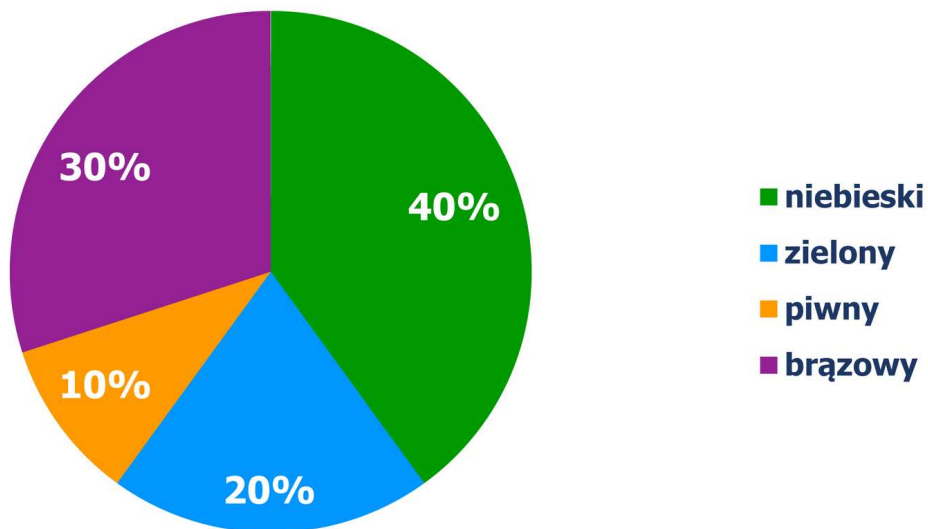
☐ Liczba filmów obejrzanych przez Anię i Basię jest równa liczbie filmów obejrzanych przez Martę i Zosię.

☐ Liczba filmów obejrzanych przez Anię i Martę nie jest równa liczbie filmów obejrzanych przez Basię i Zosię.

☐ Liczba filmów obejrzanych przez wszystkie koleżanki w maju i czerwcu jest mniejsza niż liczba filmów obejrzanych w lipcu.

Ćwiczenie 13

Na diagramie przedstawiono dane dotyczące koloru oczu wśród wszystkich uczniów 30-osobowej klasy.

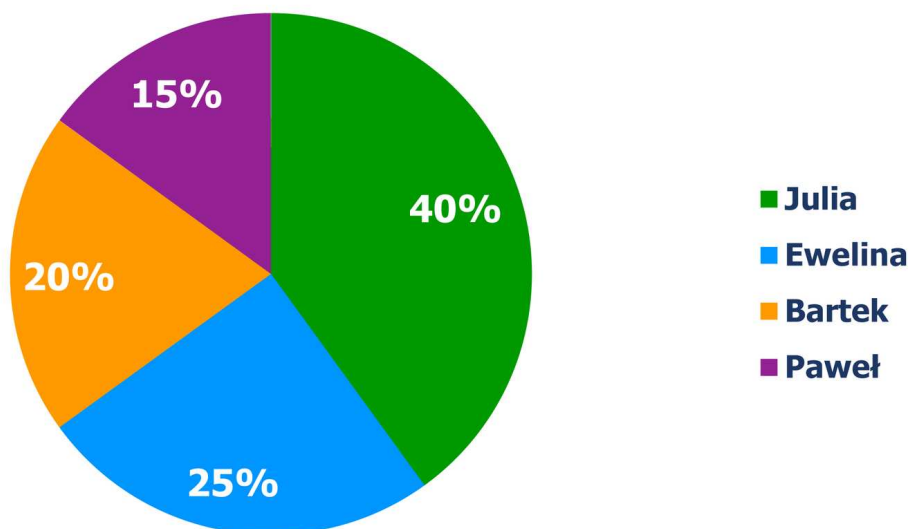


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- Ilu jest w tej klasie uczniów, którzy mają brązowe oczy?
- O ile procent więcej uczniów ma oczy niebieskie niż zielone?
- O ile procent mniej uczniów ma oczy piwne niż brązowe?

Ćwiczenie 14

Na diagramie kołowym przedstawiono dane dotyczące wyników wyborów na przewodniczącego szkoły, w których wzięło udział 400 uczniów.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

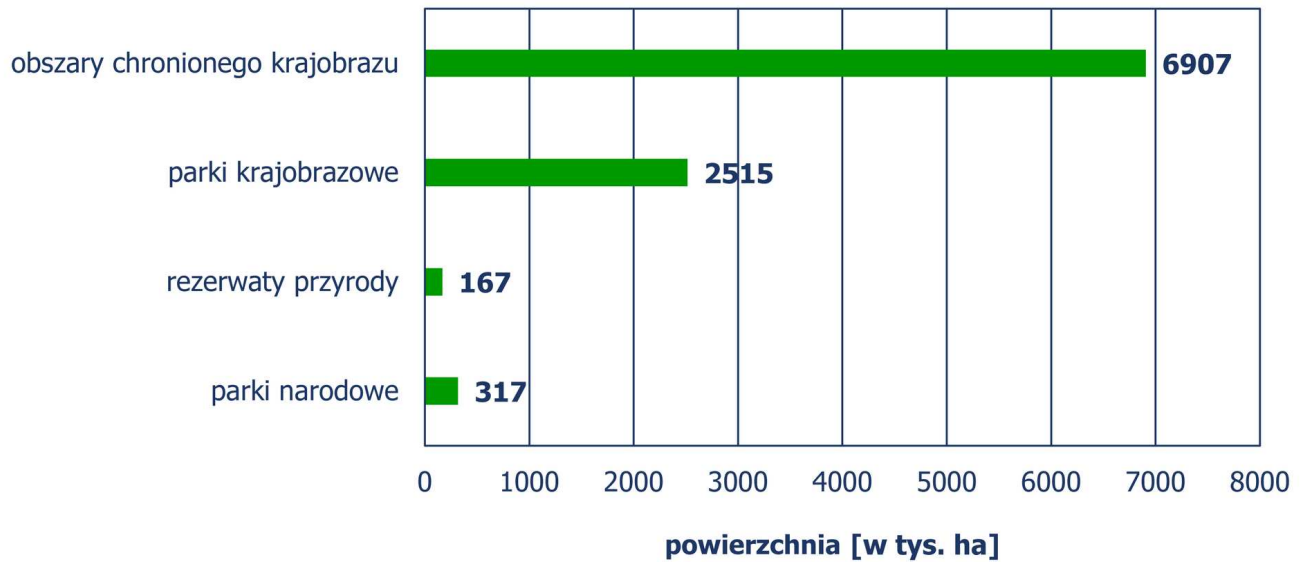
Przedstaw te dane na diagramie słupkowym poziomym.

Ćwiczenie 15

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16

Na diagramie słupkowym poziomym przedstawiono dane dotyczące powierzchni obszarów o szczególnych walorach przyrodniczych prawnie chronionych w Polsce w 2006 roku.

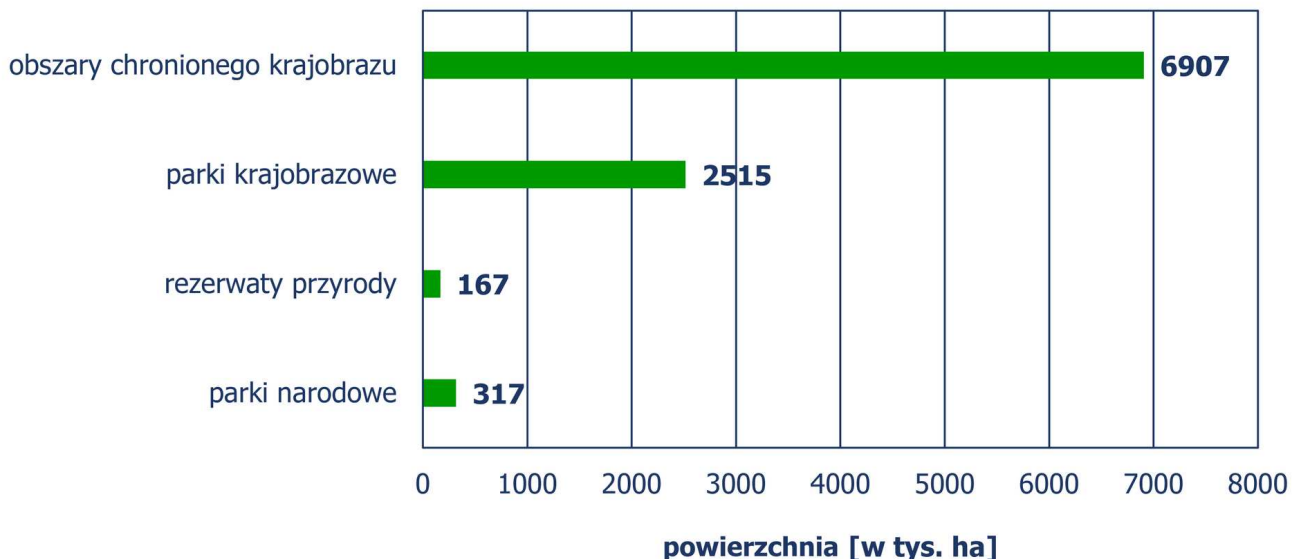


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przedstaw te dane na diagramie kołowym.

Ćwiczenie 17

Na diagramie słupkowym poziomym przedstawiono dane dotyczące powierzchni obszarów o szczególnych walorach przyrodniczych prawnie chronionych w Polsce w 2006 roku.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Rozstrzygnij, czy podane zdania są prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Powierzchnia obszarów chronionego krajobrazu jest mniejsza niż 7000000 ha.

☐ Powierzchnia rezerwatów przyrody i parków narodowych stanowi około 7% powierzchni obszarów chronionego krajobrazu.

☐ Powierzchnia parków krajobrazowych jest o około 74% mniejsza niż obszarów chronionego krajobrazu.

☐ Powierzchnia parków krajobrazowych jest około 8 razy większa niż powierzchnia parków narodowych.

☐ Powierzchnia parków krajobrazowych stanowi mniej niż 36% powierzchni obszarów chronionego krajobrazu.

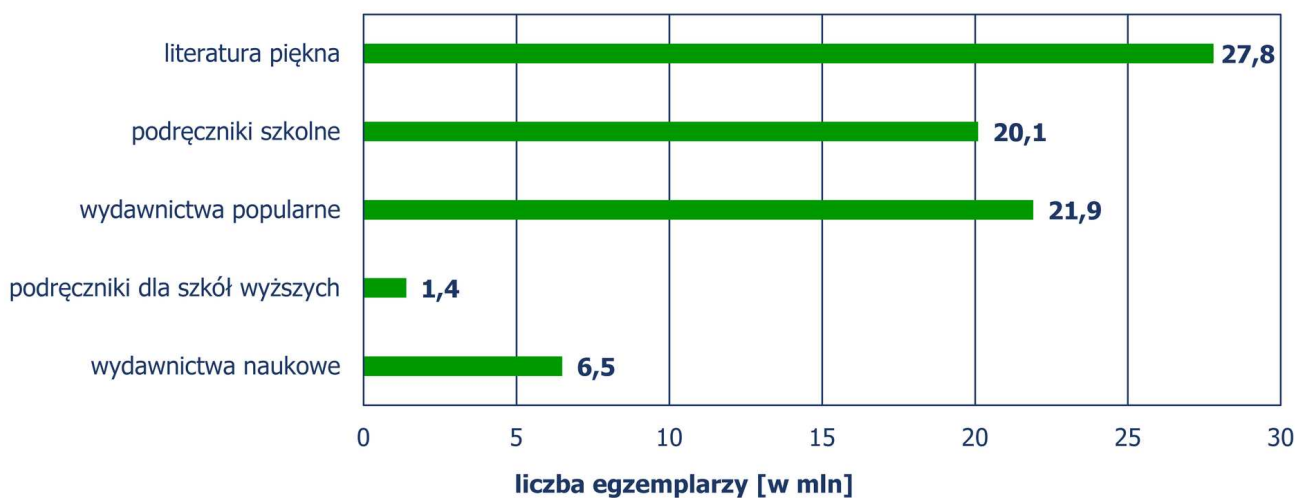
☐ Powierzchnia parków narodowych stanowi około 13% powierzchni parków krajobrazowych.

- ☐ Powierzchnia parków narodowych jest o 90 % większa niż powierzchnia rezerwatów przyrody.
- ☐ Łączna powierzchnia obszarów o szczególnych walorach przyrodniczych jest mniejsza niż 9900000 ha.
- ☐ Łączna powierzchnia rezerwatów przyrody i parków narodowych stanowi 5 % powierzchni obszarów o szczególnych walorach przyrodniczych.
- ☐ Powierzchnia parków narodowych jest około dwa razy większa niż powierzchnia rezerwatów przyrody.

Ćwiczenie 18

Na diagramie słupkowym poziomym przedstawiono dane dotyczące nakładu książek i broszur w 2006 roku.

Źródło: Świat w liczbach 2008/2009



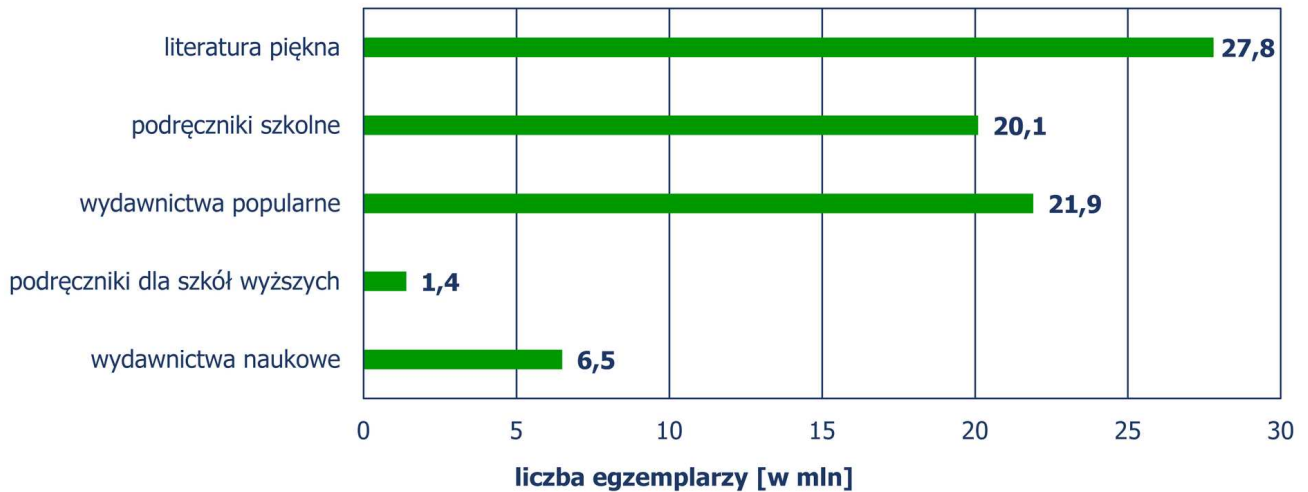
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przedstaw te dane na diagramie kołowym.

Ćwiczenie 19

Na diagramie słupkowym poziomym przedstawiono dane dotyczące nakładu książek i broszur w 2006 roku.

Źródło: Świat w liczbach 2008/2009



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ile milionów egzemplarzy wynosił nakład książek i broszur ?

☐ 76,3

☐ 80

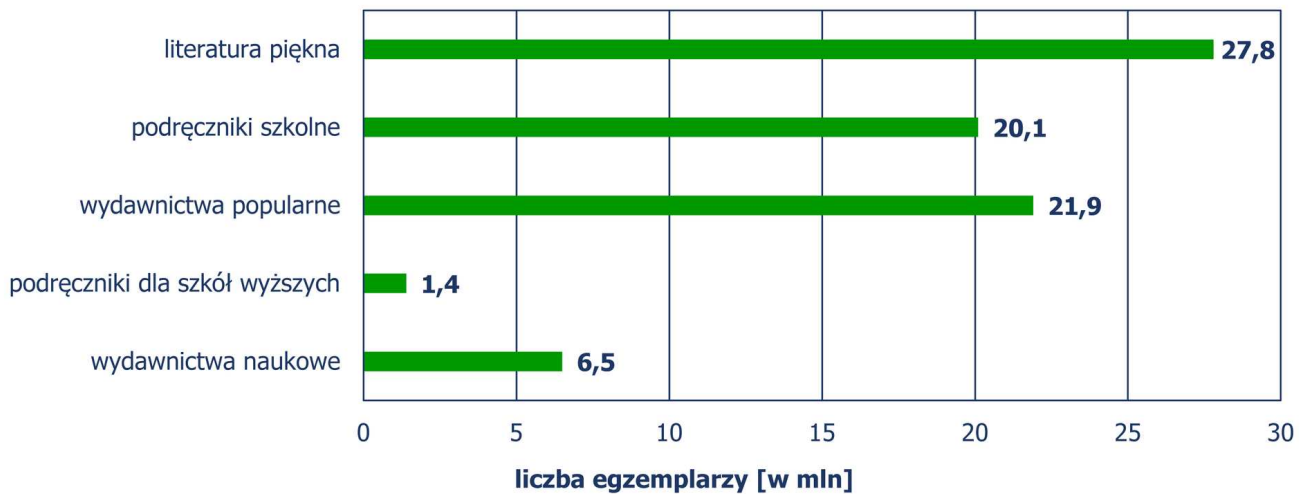
☐ 87,7

☐ 77,7

Ćwiczenie 20

Na diagramie słupkowym poziomym przedstawiono dane dotyczące nakładu książek i broszur w 2006 roku.

Źródło: Świat w liczbach 2008/2009



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

O ile milionów większy był nakład książek wydanych przez wydawnictwa popularne niż naukowe?

☐ 7,7

☐ 15,4

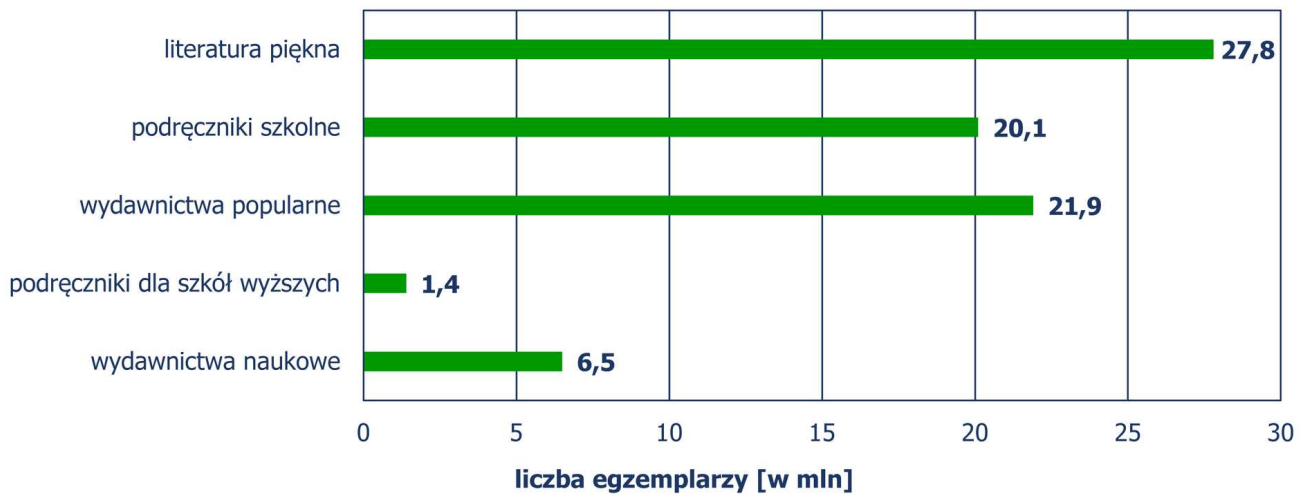
☐ 21,3

☐ 20,5

Ćwiczenie 21

Na diagramie słupkowym poziomym przedstawiono dane dotyczące nakładu książek i broszur w 2006 roku.

Źródło: Świat w liczbach 2008/2009



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

O ile procent większy jest nakład podręczników szkolnych niż podręczników dla szkół wyższych?

☐ około 1436 %

☐ około 1136 %

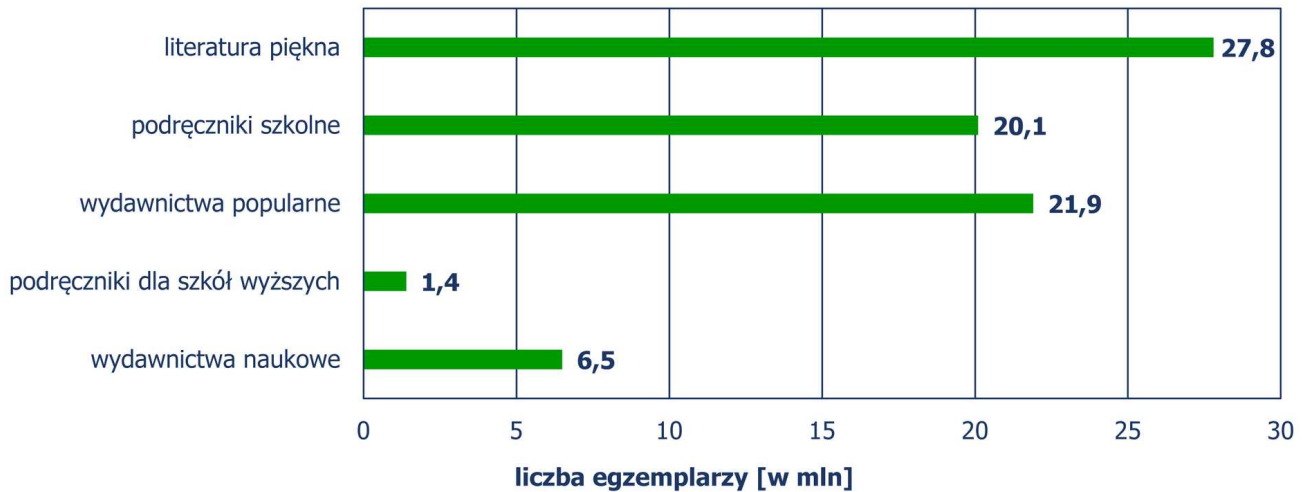
☐ około 930 %

☐ około 1336 %

Ćwiczenie 22

Na diagramie słupkowym poziomym przedstawiono dane dotyczące nakładu książek i broszur w 2006 roku.

Źródło: Świat w liczbach 2008/2009



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Jaki procent wszystkich książek stanowią książki z literatury pięknej?

☐ około 25 %

☐ około 32 %

☐ około 36 %

☐ około 8,37 %

Średnia arytmetyczna i mediana zestawu danych

Zapamiętaj!

1. Aby obliczyć średnią arytmetyczną zestawu danych, należy je do siebie dodać i otrzymaną sumę podzielić przez ich liczbę.
2. Jeżeli w zestawie znajduje się nieparzysta liczba wyników, to medianą jest wyraz znajdujący się na środku uporządkowanego rosnąco zestawu.
3. Jeżeli w zestawie jest parzysta liczba danych, to mediana jest równa średniej arytmetycznej dwóch środkowych wyrazów uporządkowanego rosnąco zestawu.

Przykład 1

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D11Tkzbgm>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D11Tkzbgm>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D11Tkzbgm>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Przykład 2

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D11Tkzbgm>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D11Tkzbgm>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Przykład 3

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D11Tkzbgm>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Przykład 4

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D11Tkzbgm>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Przykład 5

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D11Tkzbgm>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D11Tkzbgm>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Przykład 6

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D11Tkzbgm>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Przykład 7

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D11Tkzbgm>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Ćwiczenie 1

W zestawie danych znajduje się 11 wyników. Medianą uporządkowanego rosnąco zestawu jest:

☐ Średnia wyrazów: czwartego, piątego i szóstego

☐ Średnia wyrazów: piątego i szóstego

☐ Wyraz piąty

☐ Wyraz szósty

Ćwiczenie 2

Rozstrzygnij, które zdanie jest prawdziwe, a które fałszywe.

☐ Jeżeli zawartość jednego z czterech naczyń, w których znajduje się jednakowa ilość płynu, rozlejemy do trzech pozostałych, to średnia arytmetyczna ilości płynu w naczyniach zmieni się.

☐ Jeżeli średni wiek rodziny Tomka składającej się z rodziców, Tomka i dwójki rodzeństwa Tomka wynosi 20 lat, to średnia wieku rodziny Tomka wraz z mającą 65 lat babcią będzie większa niż 20 lat.

☐ Jeżeli jeden z pięciu wyrazów zestawu danych zwiększymy o 1, drugi zwiększymy o 2, trzeci i czwarty pozostawimy bez zmian, a piąty zmniejszymy o 3, to średnia arytmetyczna tego zestawu nie zmieni się.

☐ Jeżeli płacę pani Kowalskiej zwiększymy o 10 %, a płacę pana Kowalskiego zmniejszymy o 10 %, to średnia płaca państwa Kowalskich nie ulegnie zmianie.

Ćwiczenie 3

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4

Uczniowie klasy III a otrzymali na koniec roku szkolnego następujące oceny z matematyki: 2, 3, 4, 4, 5, 3, 2, 2, 4, 5, 5, 3, 3, 2, 6, 3, 3, 4, 5, 4.

Oblicz średnią arytmetyczną i medianę ocen uzyskanych przez uczniów tej klasy.

Ćwiczenie 5

W klasie Krysi jest 20 uczniów. Pięciu z nich uzyskało z egzaminu po 30 punktów, siedmiu po 24 punkty, czterech po 15 punktów, dwóch po 10 punktów i dwóch po 8 punktów. W klasie Zuzi jest 30 uczniów. Trzech uzyskało z tego egzaminu po 30 punktów, ośmiu po 25 punktów, pięciu po 20 punktów, sześciu po 15 punktów, czterech po 12 punktów, dwóch po 8 punktów i dwóch po 4 punkty. Wyznacz średnią arytmetyczną i medianę liczby punktów uzyskanych z egzaminu przez uczniów każdej z klas oraz grupy składającej się ze wszystkich uczniów obu klas.

Ćwiczenie 6

Medianą zestawu danych 4, 7, 2, 8, 8, 12, 4, 3, 2, x jest liczba 5. Wobec tego:

☐ $x = 7$

☐ $x = 4$

☐ $x = 5$

☐ $x = 6$

Ćwiczenie 7

W tabeli podano liczby książek znajdujących się na półkach w szkolnej bibliotece.

tabela										
Liczba książek na półce	25	30	32	40	42	45	47	50	52	64
Liczba półek	5	7	9	13	6	8	10	12	2	1

Oblicz średnią arytmetyczną i medianę liczby książek znajdujących się na półce.

Ćwiczenie 8

Zapytano uczniów dwóch klas pierwszych, ile książek czytają w ciągu miesiąca. Otrzymane odpowiedzi umieszczono w tabelach:

Klasa I a

tabela

Liczba książek	1	2	3	4
Liczba uczniów	14	7	2	2

Klasa I b

tabela

Liczba książek	0	1	2	3	4
Liczba uczniów	4	11	5	3	2

Oblicz średnią arytmetyczną i medianę ilości książek czytanych w ciągu miesiąca :

a. dla każdej z klas

b. dla grupy złożonej z uczniów obu klas

Ćwiczenie 9

Wykres przedstawia wyniki biegu, który odbył się w czasie szkolnych zawodów



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- Jaki był średni czas uzyskany w tym biegu?
- Jaka jest mediana uzyskanych czasów?

Ćwiczenie 10

Połącz w pary zestawy liczb z pojedynczymi liczbami tak, aby średnia arytmetyczna nowego zestawu wyniosła 10.

5, 5, 6, 8, 10, 15, 17, 20

9

5, 7, 7, 8, 9, 9, 13, 15, 17, 19

1

3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 10, 12, 14, 15, 18

39

4, 5, 7, 8, 8, 9, 12, 14, 16, 18

2

5, 6, 6, 7, 8, 9, 9, 10, 14, 16, 18, 20

4

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11

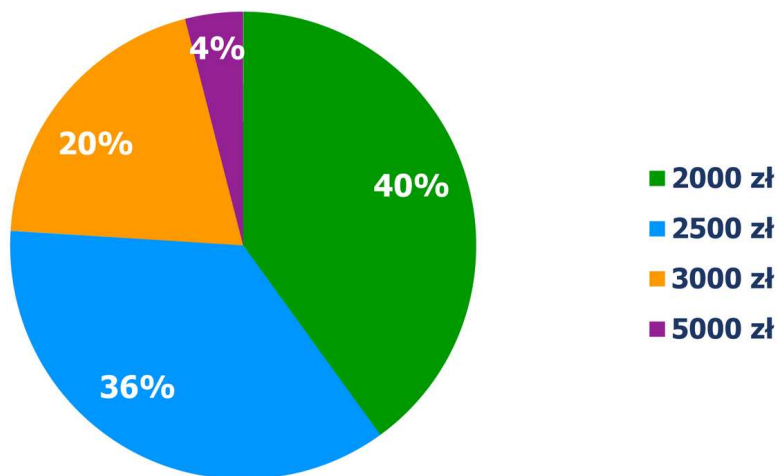
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13

Na wykresie przedstawiono podział pracowników 50– osobowej firmy w zależności od wysokości pensji, jaką otrzymują.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oblicz średnią arytmetyczną i medianę wynagrodzenia w tej firmie.

Ćwiczenie 14

Średnia wieku grupy harcerzy liczącej 15 osób wynosi 10 lat. Średnia wieku grupy wraz z opiekunem wynosi 11 lat. Opiekun grupy ma:

☐ 26 lat

☐ 27lat

☐ 30 lat

☐ 25 lat

Ćwiczenie 15

Średnia arytmetyczna zestawu danych: 3, 4, 4, 6, 7, 7, 8, 10, 12, 12, 15, x wynosi 8,25.
Medianą tego zestawu jest więc liczba:

☐ 9

☐ 7

☐ 8

☐ 7,5

Ćwiczenie 16

Średnia wzrostu uczniów klasy II a liczącej 26 osób wynosi 160 cm, a średnia wzrostu uczniów klasy II b liczącej 24 osoby wynosi 158 cm. Jaka jest średnia wzrostu uczniów grupy składającej się ze wszystkich uczniów obu klas?

Ćwiczenie 17

Ania, Paweł i Jacek przeprowadzali codzienne pomiary temperatury w ciągu trzech miesięcy: marca, kwietnia i maja, odczytując temperaturę o godzinie 12 w południe. Średnia temperatura w marcu wynosiła 10°C , w kwietniu 15°C , a w maju 20°C . Jaka była średnia temperatura w ciągu tych trzech miesięcy?

Ćwiczenie 18

W pięciu pojemnikach znajduje się średnio po 150g cukru. Połącz w pary zdania z liczbami odpowiadającymi średniej arytmetycznej ilości cukru w pojemnikach.

Do każdego pojemnika dosypano po 40g cukru.

190g

Do dwóch pojemników dosypano po 30g, a z jednego odsypano 45g cukru.

150g

Do trzech pojemników dosypano po 20g cukru.

153g

Do zestawu dołączono jeszcze jeden pojemnik, w którym jest 180g cukru.

155g

Z jednego pojemnika przesypiano do pozostałych 100g cukru.

162g

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 19

Julka ma na świadectwie trójki, czwórki i piątki. Średnia ocen na świadectwie Julki wynosi 4,3. Ile czwórek otrzymała Julka, jeżeli na jej świadectwie jest pięć piątek i dwie trójki?

Prawdopodobieństwo zdarzenia losowego

Przykład 1

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DuzPBrfYG>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DuzPBrfYG>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Przykład 2

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DuzPBrfYG>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Przykład 3

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DuzPBrfYG>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Przykład 4

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DuzPBrfYG>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Przykład 5

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DuzPBrfYG>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DuzPBrfYG>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DuzPBrfYG>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DuzPBrfYG>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DuzPBrfYG>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Ćwiczenie 1

Prawdopodobieństwo zdarzenia, że podczas jednokrotnego rzutu sześcienną kostką do gry wyrzucimy liczbę oczek większą niż 3, wynosi:

☐ $\frac{1}{2}$

☐ $\frac{1}{6}$

☐ $\frac{2}{3}$

☐ $\frac{1}{3}$

Ćwiczenie 2

Rzucamy jednokrotnie sześcienną kostką do gry. Połącz w pary nazwy zdarzeń z ich prawdopodobieństwami.

E: Wyrzucimy liczbę oczek nie większą niż 1

$\frac{1}{3}$

A: Wyrzucimy nie mniej niż trzy oczka

$\frac{1}{6}$

B: Wyrzucimy liczbę oczek podzielną przez trzy

$\frac{1}{2}$

C: Wyrzucimy liczbę oczek będącą liczbą pierwszą

1

D: Wyrzucimy liczbę oczek nie większą niż sześć

$\frac{2}{3}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3

Rozstrzygnij, które zdanie jest prawdziwe, a które fałszywe, wiedząc, że dotyczą one zdarzenia polegającego na dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry:

☐

Prawdopodobieństwo zdarzenia, że liczba oczek na pierwszej kostce jest większa niż na drugiej kostce, wynosi $\frac{1}{2}$.

☐

Prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma oczek na obu kostkach będzie liczbą większą od 8, wynosi $\frac{5}{18}$.

☐

Prawdopodobieństwo zdarzenia, że liczba oczek na pierwszej kostce będzie parzysta, a liczba oczek na drugiej kostce będzie podzielna przez trzy, wynosi $\frac{1}{6}$.

☐

Prawdopodobieństwo zdarzenia, że iloczyn oczek na obu kostkach będzie liczbą podzielną przez 3, wynosi $\frac{7}{12}$.

Ćwiczenie 4

Prawdopodobieństwo zdarzenia, że podczas dwukrotnego rzutu monetą wyrzucimy co najwyżej jednego orła wynosi:

☐

$\frac{1}{2}$

☐

$\frac{3}{4}$

☐

1

☐

$\frac{1}{4}$

Ćwiczenie 5

W urnie znajduje się 20 kul: 6 białych, 7 czarnych, 4 zielone i 3 niebieskie. Kamila, Bartek, Kinga i Maciek sprzeczą się o to, kto z nich mówi prawdę.

Kamila: „Prawdopodobieństwo, że podczas losowania z urny dwóch kul wylosujemy kulę białą lub niebieską, wynosi $\frac{1}{2}$ ”.

Bartek: „Prawdopodobieństwo, że za drugim razem wylosujemy kulę białą jest mniejsze lub równe prawdopodobieństwu, że wylosujemy kulę czarną”.

Kinga: „Prawdopodobieństwo, że za drugim razem wylosujemy kulę czarną, jeżeli za pierwszym razem wylosowaliśmy kulę zieloną, wynosi $\frac{7}{20}$ ”.

Maciek: „Prawdopodobieństwo, że wylosujemy kulę czarną jest większe od tego, że wylosujemy kulę zieloną lub niebieską”.

Które z dzieci ma rację?

☐ Maciek

☐ Kinga

☐ Kamila

☐ Bartek

Ćwiczenie 6

W dwóch pudełkach znajdują się czekoladki o różnych smakach. W pierwszym pudełku jest 15 czekoladek o smaku orzechowym i 25 czekoladek o smaku toffi. W drugim pudełku jest 30 czekoladek o smaku toffi i 20 czekoladek o smaku orzechowym. Marysia lubi czekoladki o smaku toffi. Z którego pudełka powinna wybrać czekoladkę, aby prawdopodobieństwo, że trafi na ulubiony smak było większe?

Ćwiczenie 7

Rzucamy trzy razy monetą. Przeciągnij zdarzenia A_n , $n = 1 \dots 6$ z dolnej sekcji do górnej, określając ich prawdopodobieństwa.

$$P(A_n) \geq \frac{1}{2}$$

$$P(A_n) < \frac{1}{2}$$

A_5 – wyrzucono nie więcej niż dwie reszki.

A_1 – wyrzucono co najmniej dwa orły.

A_6 – wyrzucono dwie reszki i jednego orła.

A_3 – wyrzucono co najmniej jedną reszkę.

A_2 – wyrzucono dokładnie jedną reszkę.

A_4 – wyrzucono same orły lub same reszki.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8

W loterii jest 100 losów, w tym 25 wygrywających. Wyznacz prawdopodobieństwo zdarzenia, że trzecia osoba wylosuje los wygrywający, jeżeli

- dwie osoby przed nią kupiły losy przegrywające
- dwie osoby przed nią kupiły losy wygrywające
- dwie osoby przed nią kupiły po jednym losie wygrywającym i jednym losie przegrywającym

Które z tych zdarzeń jest najbardziej prawdopodobne?

Ćwiczenie 9

W pudełku znajduje się 30 cukierków owocowych. Ile krówek należy dołożyć do pudełka, aby prawdopodobieństwo, że losowo wybrany z pudełka cukierek będzie krówką, wynosiło 0,6?

Ćwiczenie 10

Podsumowując wyniki ankiety na temat ulubionego koloru, przeprowadzonej wśród 120 uczniów pewnego gimnazjum, uzyskano następujące wyniki: 20 % ankietowanych lubi najbardziej kolor żółty, 30 % kolor czerwony, 40 % kolor niebieski. Ulubionym kolorem pozostałych ankietowanych jest kolor zielony.

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐

Prawdopodobieństwo, że ulubionym kolorem losowo wybranej osoby jest niebieski lub zielony, jest większe niż to, że ulubionym kolorem jest czerwony lub żółty.

☐

Prawdopodobieństwo, że ulubionym kolorem dowolnie wybranej osoby jest żółty, jest dwukrotnie mniejsze od tego, że tym kolorem jest niebieski.

☐

Prawdopodobieństwo, że losowo ulubionym kolorem losowo wybranej osoby zielony wynosi $\frac{1}{10}$.

☐

Prawdopodobieństwo, że ulubionym kolorem losowo wybranej osoby spośród ankietowanych jest kolor niebieski wynosi $\frac{2}{5}$.

Ćwiczenie 11

Wśród biletów do teatru zakupionych dla wycieczki znajduje się 30 biletów z miejscami na parterze i 20 z miejscami na balkonie.

Prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba otrzyma bilet z miejscem na parterze wynosi:

☐ $\frac{2}{5}$

☐ $\frac{3}{2}$

☐ $\frac{2}{3}$

☐ $\frac{3}{5}$

Ćwiczenie 12

Wśród biletów do teatru zakupionych dla wycieczki znajduje się 30 biletów z miejscami na parterze i 20 z miejscami na balkonie.

Zakładając, że pierwszy z uczestników wycieczki otrzymał bilet z miejscem na balkonie, wyznacz prawdopodobieństwo, że drugi uczestnik też otrzyma bilet z miejscem na balkonie.

Ćwiczenie 13

Przeprowadzono ankietę wśród 150 gimnazjalistów, zadając pytanie: „Czy lubisz matematykę i geografię?”. Wyniki ankiety były następujące: 80 osób odpowiedziało, że lubi matematykę, 75 osób, że lubi geografię, 15 osób stwierdziło, że lubi obydwa przedmioty. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany uczestnik ankiety nie lubi żadnego z tych przedmiotów?

Ćwiczenie 14

W klasie IIa 30% uczniów klasy należy do klubu sportowego, a 15% z nich trenuje lekką atletykę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany uczeń tej klasy trenuje lekką atletykę?

Zabawy i gry komputerowe

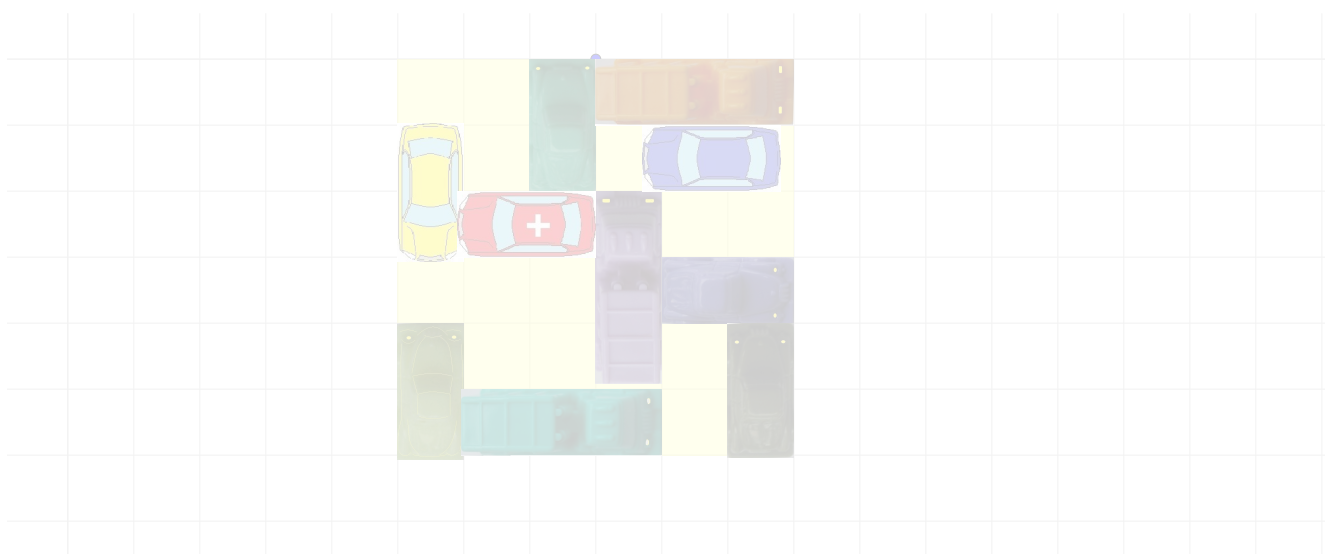
Ćwiczenie 1

Twoim zadaniem jest wyjechać z parkingu samochodem z białym krzyżem na dachu.

Samochody możesz przesuwać do przodu i do tyłu chwytając je za niebieskie kółka.

Po rozwiązaniu tego zadania „pomieszaj” wszystkie samochody na parkingu, a następnie spróbuj rozwiązać nowe zadanie, albo zaproponuj je koleżance lub koledze.

Uwaga: Przesuwając samochody, dbaj o to, żeby nie nachodziły na siebie. „Mieszając” je, możesz je tymczasowo nakładać.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D728KOtC6>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0CC BY NC 3.0.

Ćwiczenie 2

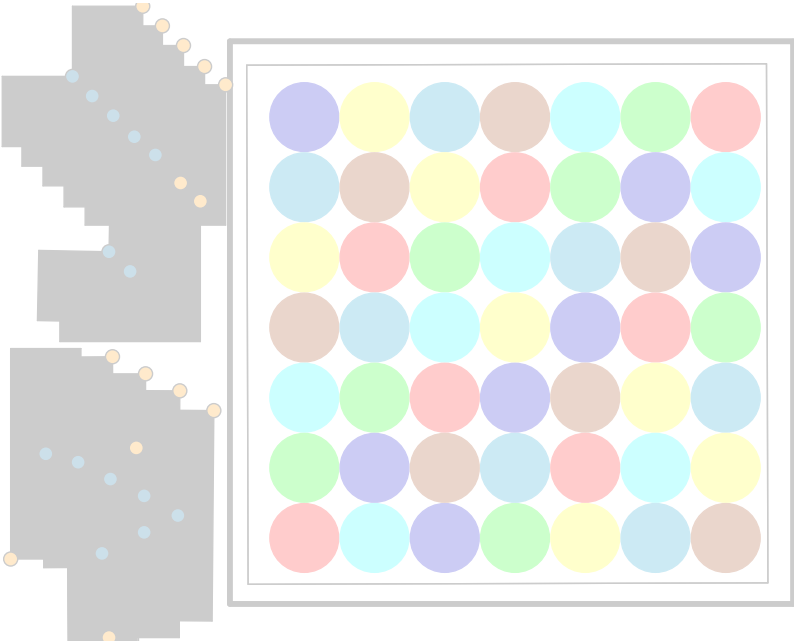
Ułóż czarne prostokąty i sześciokąty na planszy złożonej z kolorowych kół tak, aby

- na planszy pozostały niezastłonięte tylko kółka w jednym z siedmiu kolorów
- na planszy pozostały niezastłonięte kółka, każde w innym kolorze

Magiczna siódemka

Plansza składa się z 49 (7x7) kolorowych kół po 7 w każdym kolorze.
Ustaw 7 prostokątów i 7 sześciokątów tak, aby pozostało odsłoniętych 7 kółek tego samego koloru.
Rozmieszczenie barwnych kółek nie jest przypadkowe, więc 7 kolorów daje 7 różnych rozwiązań.
Dodatkowym rozwiązaniem może być takie ustawienie czarnych klocków, aby na planszy pozostało 7 pionków i każdy w innym kolorze.

Klocki przesuwamy punktem ●
i obracamy punktem ●.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D728KOtC6>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Żółte kropki służą do przenoszenia figury, czerwone – do jej obracania.

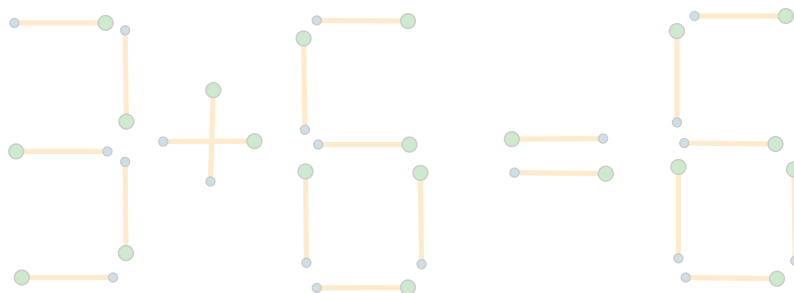
Ćwiczenie 3

Rozwiąż zagadkę.

Układanka zapalek (1)

Przestaw jedną zapalkę, aby równość była prawdziwa.

Zapalkę możesz przesuwać, zmieniając położenie punktów  oraz obracać, zmieniając położenie punktów .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D728KOtC6>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

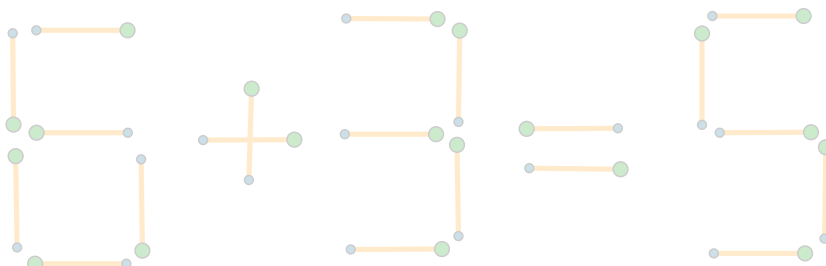
Ćwiczenie 4

Rozwiąż zagadkę.

Układanka zapalek (2)

Przestaw jedną zapalkę, aby równość była prawdziwa.

Zapalkę możesz przesuwać, zmieniając położenie punktów  oraz obracać, zmieniając położenie punktów .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D728KOtC6>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

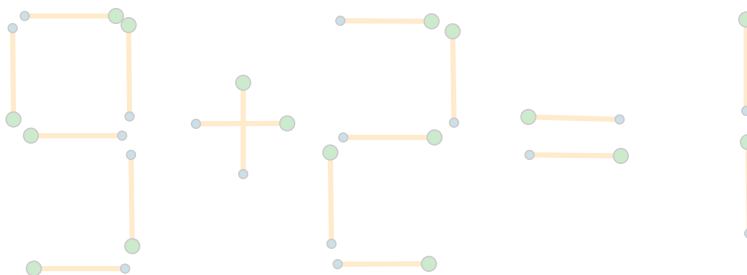
Ćwiczenie 5

Rozwiąż zagadkę.

Układanka zapalek (3)

Przestaw jedną zapalkę, aby równość była prawdziwa.

Zapalkę możesz przesuwając, zmieniając położenie punktów  oraz obracając, zmieniając położenie punktów .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D728KOtC6>

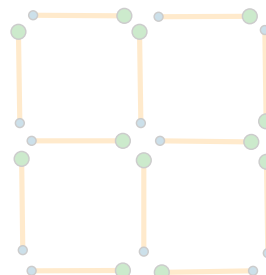
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Ćwiczenie 6

Rozwiąż zagadkę.

Układanka zapalek (4)

Przesuń trzy zapalki tak, aby powstały trzy kwadraty o boku długości jednej zapalki.
Zapalkę możesz przesuwać, zmieniając położenie punktów  oraz obracać, zmieniając położenie punktów .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D728KOtC6>

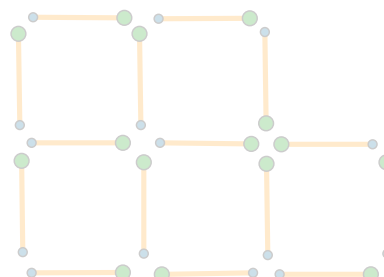
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Ćwiczenie 7

Rozwiąż zagadkę.

Układanka zapalek (5)

Usuń trzy zapalki i przesuń dwie tak, aby powstały trzy kwadraty o boku długości jednej zapalki. Zapalkę możesz przesuwać, zmieniając położenie punktów  oraz obracać, zmieniając położenie punktów .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D728KOtC6>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

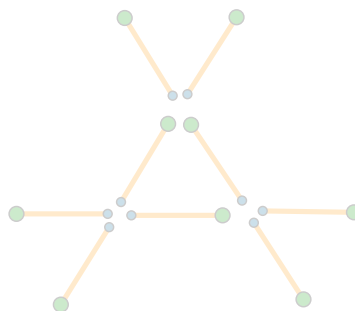
Ćwiczenie 8

Rozwiąż zagadkę.

Układanka zapalek (6)

Przesuń cztery zapalki tak, aby powstało pięć trójkątów. Trójkąty te nie muszą być przystające i jeden z nich może zawierać się w innym.

Zapalkę możesz przesuwać, zmieniając położenie punktów  oraz obracać, zmieniając położenie punktów .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D728KOtC6>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

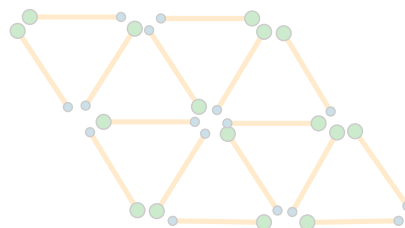
Ćwiczenie 9

Rozwiąż zagadkę arytmetyczną.

Układanka zapalek (7)

Usuń cztery zapalki tak, aby pozostały cztery przystające trójkąty o boku długości jednej zapalki.

Zapalkę możesz przesuwać, zmieniając położenie punktów  oraz obracać, zmieniając położenie punktów .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D728KOtC6>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Ćwiczenie 10

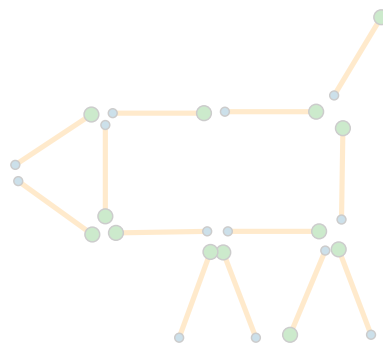
Rozwiąż zagadkę.

Układanka zapalek (8)

Układ tych zapalek tworzy kota z głową po lewej stronie i ogonem uniesionym po prawej.

Przesuń, ale nie obracaj 3 zapalki tak, aby kot miał głowę po prawej stronie, a ogon opuszczony w dół po stronie lewej.

Zapalkę możesz przesuwając, zmieniając położenie punktów  oraz obracając, zmieniając położenie punktów .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D728KOtC6>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Test 1

Ćwiczenie 1

W ciągu dwóch ostatnich miesięcy mleko drożało dwukrotnie, za każdym razem o 5%. Łączna podwyżka wyniosła:

☐ więcej niż 10%

☐ nie wiadomo ile, bo to zależy od początkowej ceny mleka.

☐ mniej niż 10%

☐ 10%

Ćwiczenie 2

Wartość wyrażenia $\frac{6^2 \cdot 6^9}{(6^6)^2}$ jest równa

☐ 6^{-1}

☐ 6

☐ 6^3

☐ 6^0

Ćwiczenie 3

Karolina ma w skarbonce 136 zł w nominałach 2 zł i 5 zł. Monet pięciozłotowych jest trzy razy więcej niż monet dwuzłotowych.

Jeżeli oznaczymy przez a liczbę monet pięciozłotowych oraz przez b - liczbę monet dwuzłotowych, to podane zależności opisuje układ równań:

☐
$$\begin{cases} a = 3b \\ 2a + 5b = 136 \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} b = 3a \\ 2a + 5b = 136 \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} a = 3b \\ 5a + 2b = 136 \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} b = 3a \\ 5a + 2b = 136 \end{cases}$$

Ćwiczenie 4

Średnia arytmetyczna liczb $\sqrt{12}$, $\sqrt{108}$, $\sqrt{3}$ jest równa:

☐ $4,5\sqrt{3}$

☐ $3\sqrt{3}$

☐ 3

☐ $\sqrt{41}$

Ćwiczenie 5

Średnia arytmetyczna zestawu danych: 4, 3, 6, 4, 8, 7, 10, 8, 12, 15, 8, x wynosi 8,5.
Liczba x jest równa:

☐ 25

☐ 9

☐ 8,5

☐ 17

Ćwiczenie 6

W pojemniku znajduje się 27 kul białych i 23 kule czarne. Z pojemnika wylosowano dwa razy po jednej kuli bez zwracania. Za pierwszym razem wylosowano kulę białą.
Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Prawdopodobieństwo wylosowania za drugim razem kuli czarnej wynosiło $\frac{26}{49}$.

☐ Prawdopodobieństwo wylosowania za drugim razem kuli białej zmalało.

Ćwiczenie 7

Korzystając z tego, że $32^2 = 1024$, $52^2 = 2704$ i $32 \cdot 52 = 1664$, oceń prawdziwość podanych zdań. Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ $1024 \cdot 52 = 2704 \cdot 32$

☐ $32 \cdot 52 \cdot 32 \cdot 52 = 1664$

Ćwiczenie 8

Marysia przeczytała 63 strony książki, czyli 15% wszystkich stron tej książki.

Książka ta ma:

☐ 420 stron

☐ 460 stron

☐ 630 stron

☐ 400 stron

Ćwiczenie 9

Kostium kąpielowy kosztował 80 zł. Cenę obniżono i teraz kostium kosztuje 64 zł.

Oznacza to, że cena kostiumu została obniżona o:

☐ 75%

☐ 80%

☐ 25%

☐ 20%

Ćwiczenie 10

Które z poniższych równań nie tworzy z równaniem $7x + 3y = 1$ sprzecznego układu równań?

☐ $-7x - 3y = 1$

☐ $14x + 6y = 2$

☐ $14x + 6y = -2$

☐ $7x + 3y = -1$

Ćwiczenie 11

Zmieszano 4 kg cukierków po 12,50 zł za kilogram i 8 kg cukierków po 15,20 zł za kg. Cena 1 kg tej mieszanki jest równa:

☐ 14,30 zł

☐ 13,85 zł

☐ 17,16 zł

☐ 13,40 zł

Ćwiczenie 12

Cztery pompy wypompowują wodę ze zbiornika w ciągu 16 godzin i 40 minut.

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐

Trzy pompy pracujące z taką samą wydajnością wypompują w czasie 16 godzin i 40 minut $0,75$ wody znajdującej się w zbiorniku.

☐

Pięć pomp pracujących z taką samą wydajnością wypompuje wodę z tego zbiornika w czasie o 3 godziny 20 minut krótszym

Ćwiczenie 13

Samochód przejechał pewną trasę w ciągu sześciu godzin, jadąc ze średnią prędkością 60 km/h .

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐

Samochód jadący z prędkością 60 km/h , przez 9 godzin pokonałby trasę $1,5$ razy dłuższą.

☐

Samochód, który pokonał tę samą trasę w czasie czterech godzin, jechał z prędkością o 30 km/h większą.

Ćwiczenie 14

Obwód koła jest równy 6π . Przekątna kwadratu ma długość $\sqrt{2\pi}$. Wynika z tego, że suma pola koła i pola kwadratu jest równa

☐

11π

☐

$12\pi^2$

☐

10π

☐

$8\pi^2$

Ćwiczenie 15

Miara kąta β jest równa



Grafika statyczna

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

☐ 60°

☐ 70°

☐ 80°

☐ 50°

Ćwiczenie 16

Obwód prostokąta jest równy 14 cm. Przekątna dzieli prostokąt na dwa trójkąty – każdy o obwodzie 12 cm. Suma długości dwóch różnych boków prostokąta jest większa od długości przekątnej

☐ o 2 cm

☐ o 5 cm

☐ o 6 cm

☐ o 8 cm

Ćwiczenie 17

W trapezie równoramiennym krótsza podstawa ma długość 10 cm. Wysokość trapezu jest równa 8 cm i tworzy z ramieniem kąt 45° .

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Pole trapezu jest równe 144 cm^2 .

☐ Obwód trapezu jest większy od 58 cm.

Ćwiczenie 18

Punkt S jest środkiem koła.



Grafika statyczna

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Miara zaznaczonego kąta jest równa

☐ 110°

☐ 350°

☐ 55°

☐ 250°

Ćwiczenie 19

Półtora litra wody to

☐ 1500 cm³

☐ 0,15 m³

☐ 0,0015 km³

☐ 15 dm³

Ćwiczenie 20

Prostokąt K , którego boki mają długości 6 m i 8 m jest podobny do prostokąta M o obwodzie 42 m. Skala podobieństwa prostokąta K do prostokąta M jest równa

☐ 1 : 3

☐ 2 : 3

☐ 4 : 3

☐ 3 : 2

Ćwiczenie 21

W sklepie odzieżowym obniżono cenę spodni o 10 %, a cenę marynarki o 5 %. Jacek kupił przed obniżką cen spodnie oraz marynarkę i zapłacił 360 zł, Andrzej kupił taki sam komplet po obniżce i zapłacił o 26 zł mniej. Jaka jest cena spodni i marynarki po obniżce? Ile teraz kosztują spodnie, a ile marynarka? Ułóż odpowiedni układ równań i zapisz obliczenia.

Ćwiczenie 22

Uzasadnij, że średnia arytmetyczna trzech kolejnych liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą.

Ćwiczenie 23

Objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 18 cm^3 . Wysokość ostrosłupa jest równa 9 cm . Oblicz obwód podstawy ostrosłupa.

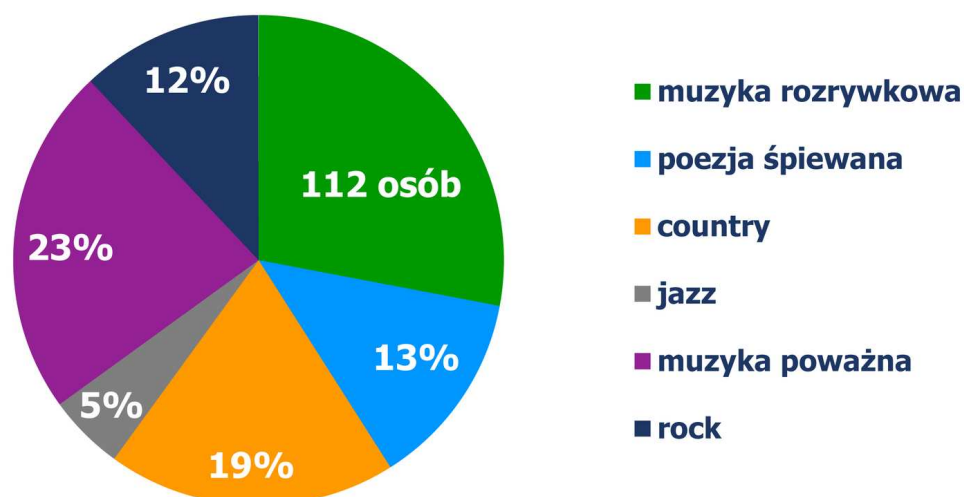
Ćwiczenie 24

W prostopadłościanie jedna ze ścian ma wymiary 4 i 5 , druga 3 i 4 . Oblicz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu.

Test 2

Ćwiczenie 1

Zosia i Krzyś przeprowadzili ankietę wśród pewnej grupy mieszkańców swojego osiedla na temat: „Jakiego gatunku muzyki lubisz słuchać najbardziej?” Każdy mógł wybrać tylko jedną odpowiedź. Wyniki przedstawia diagram. Ile osób wzięło udział w sondzie?



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

☐ 400

☐ 500

☐ 380

☐ 450

Ćwiczenie 2

W czterech pojemnikach znajdowało się po 120 g wody. Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐

Jeżeli do trzech pojemników dolano po 35 g wody, to średnia masa wody w pojemnikach wyniosła 146,75 g.

☐

Jeżeli z dwóch pierwszych pojemników odlano po 20 g wody, do trzeciego dolano 23, 72 g wody, a do czwartego dolano 16,28 g wody, to średnia masa wody w pojemnikach nie zmieniła się.

Ćwiczenie 3

Wartość wyrażenia $\frac{5^3+5^3+5^3+5^3+5^3}{5^4}$ jest równa

☐

5^2

☐

5^0

☐

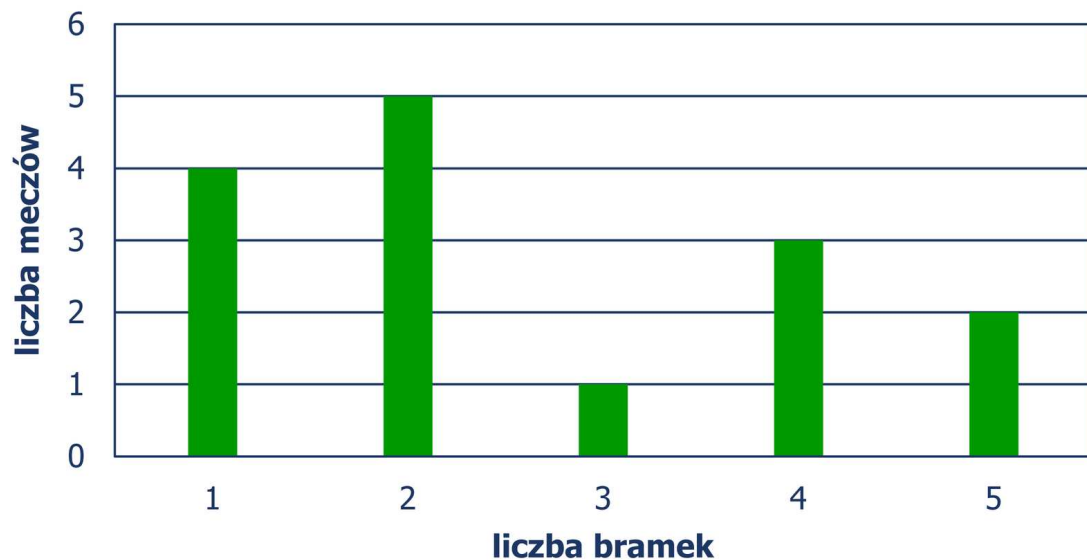
5^3

☐

5^1

Ćwiczenie 4

Na diagramie przedstawiono liczbę bramek zdobytych przez pewnego piłkarza w ciągu sezonu.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Z diagramu wynika, że

- ☐ najczęściej powtarzającą się liczbą zdobytych bramek jest 1
- ☐ mediana liczby zdobytych bramek wynosi 2
- ☐ liczba meczów w sezonie wyniosła 14
- ☐ średnia liczba zdobytych bramek w jednym meczu wynosi 2,5

Ćwiczenie 5

Wartość wyrażenia $\sqrt{(6\sqrt{3})^2 - (4\sqrt{2})^2}$ jest równa

☐ $\sqrt{76}$

☐ $6\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$

☐ 72

☐ $6\sqrt{2}$

Ćwiczenie 6

Na wycieczkę szkolną zapisało się 18 dziewcząt i 10 chłopców. Chcemy, aby dziewczęta stanowiły 75% liczby wszystkich uczestników wycieczki. Liczba dziewcząt, które muszą się jeszcze zgłosić na wycieczkę, wynosi

☐ 6

☐ 22

☐ 2

☐ 12

Ćwiczenie 7

W loterii jest 30 losów, w tym 12 losów wygrywających. Pierwsze dwie osoby biorące udział w loterii wylosowały losy przegrywające.

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐

Trzecia osoba musiałaby kupić 17 losów, aby mieć pewność, że przynajmniej jeden z nich będzie wygrywający.

☐

Prawdopodobieństwo wylosowania przez trzecią osobę losu przegrywającego jest większe od 0,5.

Ćwiczenie 8

Wskaż wyrażenie, którego wartość nie jest równa $3\sqrt{6}$.

☐ $(\sqrt{6} - 8) - (-8 - 2\sqrt{6})$

☐ $\frac{3\sqrt{12}}{2}$

☐ $\sqrt{18} \bullet 3\sqrt{\frac{1}{3}}$

☐ $(-4\sqrt{6} - 2) + (7\sqrt{6} + 2)$

Ćwiczenie 9

Cenę spodni obniżono o 70% i spodnie kosztują po tej obniżce 51 zł. Cena spodni przed obniżką wynosiła

☐ 170 zł

☐ 119 zł

☐ 221 zł

☐ 151 zł

Ćwiczenie 10

Z wstążki o długości x odcięto 10% jej długości. Pozostały kawałek podzielono na 20 jednakowych części. Długość jednej z tych części można opisać za pomocą wyrażenia

☐ $0,045x$

☐ $0,05x$

☐ $0,054x$

☐ $0,005x$

Ćwiczenie 11

Wiadomo, że

$$a = -3,2 \cdot 7,4$$

$$b = -7,4 \cdot 3,1$$

$$c = -3,1 \cdot (-7,4)$$

$$d = 3,2 \cdot 7,4$$

Liczby uporządkowane rosnąco to:

☐ a, c, d, b

☐ a, b, c, d

☐ b, c, d, a

☐ d, c, b, a

Ćwiczenie 12

Które z poniższych równań tworzy z równaniem $-8x + 10y = 4$ nieoznaczony układ równań?

☐ $4x - 5y = 2$

☐ $-8x + 10y = -4$

☐ $8x - 10y = 4$

☐ $4x - 5y = -2$

Ćwiczenie 13

W hurtowni owoców znajdowało się 525 kg gruszek. Pierwszego dnia sprzedano 0,6 wszystkich owoców, a drugiego dnia $\frac{2}{3}$ reszty.

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Pierwszego dnia sprzedano 350 kg gruszek.

☐ W hurtowni pozostało 70 kg gruszek.

Ćwiczenie 14

Trójkąty ABC i BCD są równoramienne.



Grafika statyczna

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Miara kąta α jest równa

☐ 80°

☐ 30°

☐ 50°

☐ 60°

Ćwiczenie 15

Drzewo wysokości 12 m rzuca cień długości 10 m, a rosnący obok krzew rzuca cień długości 1,5 m. Wysokość krzewu jest równa

☐ 1,8 m

☐ 1,2 m

☐ 2 m

☐ 8 m

Ćwiczenie 16

Odległość punktów $M = (3, -10)$ i $K = (-5, 5)$ jest równa

☐ 17

☐ 15

☐ 27

☐ 12

Ćwiczenie 17

Kostka do gry ma kształt sześcianu. Przekątna tego sześcianu ma długość $2\sqrt{3}$. Objętość kostki jest równa

☐ $8\sqrt{3}$

☐ 4

☐ 12

☐ 8

Ćwiczenie 18

Krawędź podstawy czworościanu foremnego jest równa 4 cm. Pole powierzchni całkowitej tego czworościanu jest równe

☐ 64

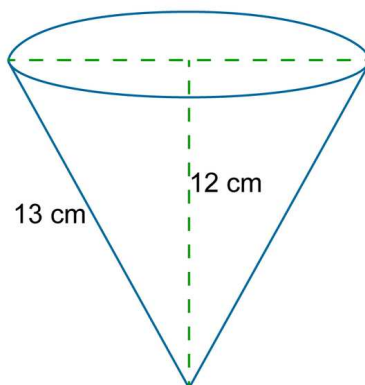
☐ $64\sqrt{3}$

☐ $16\sqrt{3}$

☐ 16

Ćwiczenie 19

Wafel w kształcie stożka napełniony jest bitą śmietaną.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Jeśli przyjąć, że $\pi = 3,14$, to objętość śmietany zawartej w stożku jest równa

☐ 3140cm³

☐ 300 cm³

☐ 314 cm³

☐ 942cm³

Ćwiczenie 20

Drabina, po której wspina się kot, jest oparta o ścianę na wysokości 3 m i tworzy ze ścianą kąt 60°. Długość tej drabiny jest równa

☐ 5m

☐ 6 m

☐ 8 m

☐ 4 m

Ćwiczenie 21

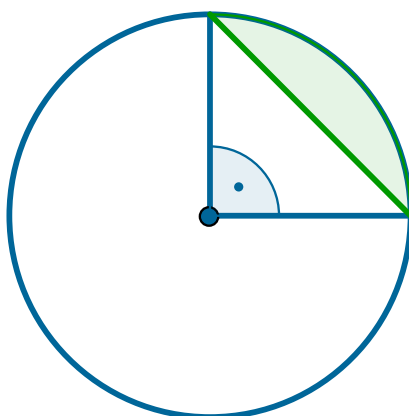
Uzasadnij, że jeśli od liczby trzycyfrowej odejmiemy sumę jej cyfr, to otrzymany wynik będzie liczbą podzielną przez 9.

Ćwiczenie 22

Karol kolekcjonuje znaczki pocztowe. W jego kolekcji znajdują się znaczki krajowe i zagraniczne. Liczba znaczków zagranicznych stanowi 90 % liczby znaczków krajowych. Gdyby kolekcja Karola powiększyła się o 10 znaczków zagranicznych, to miałby on w swojej kolekcji tyle samo znaczków krajowych co zagranicznych. Ile znaczków krajowych ma Karol?

Ćwiczenie 23

Promień koła jest równy 7. Przyjmij $\pi = \frac{22}{7}$ i oblicz pole zacieniowanej figury.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 24

Połączono odcinkami środki boków kwadratu M . Otrzymano czworokąt F . Uzasadnij, że pole czworokąta F jest dwa razy mniejsze od pola kwadratu M .

Test 3

Ćwiczenie 1

Średnia wieku grupy harcerzy, liczącej 15 osób wynosi 10 lat. Średnia wieku grupy wraz z opiekunem wynosi 11 lat. Wiek opiekuna grupy jest równy

☐ 24 lata

☐ 25 lat

☐ 20 lat

☐ 26 lat

Ćwiczenie 2

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Jeżeli w 320 g solanki znajduje się 48 g soli, to stężenie tej solanki wynosi 15 %.

☐ W 450 g syropu o stężeniu 30 % znajduje się 135 g wody.

Ćwiczenie 3

Dane są liczby $a = 3^9$, $b = (-3)^{11}$, $c = (-3)^8$, $d = -3^8$.

Liczby te uporządkowane od największej do najmniejszej to

☐ a, c, d, b

☐ a, c, b, d

☐ d, b, c, a

☐ b, d, c, a

Ćwiczenie 4

Ile spośród podanych nierówności:

$\sqrt{2} + \sqrt{5} < 5$, $\sqrt[3]{126} + \sqrt[3]{9} < 7$, $\sqrt{15} + \sqrt{10} > 5$, $\sqrt{70} - \sqrt{6} < 8$ jest prawdziwych?

☐ trzy

☐ jedna

☐ cztery

☐ dwie

Ćwiczenie 5

Czwarta część liczby $2^6 \bullet 2^6$ jest równa

☐ 4^6

☐ 1^{12}

☐ 2^{10}

☐ 2^3

Ćwiczenie 6

W loterii znajduje się 30 losów wygrywających i 60 losów przegrywających.

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐

Prawdopodobieństwo wylosowania losu przegrywającego jest dwa razy większe niż prawdopodobieństwo wylosowania losu wygrywającego.

☐

Karol musiałby wylosować 31 losów, aby mieć pewność, że wśród nich jest przynajmniej jeden los wygrywający.

Ćwiczenie 7

Para liczb $x = -2$ i $y = 3$ jest rozwiązaniem układu równań:

☐ $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = -7 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} -x + y = 1 \\ 2x - y = -7 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} -x - y = 1 \\ 2x - y = -7 \end{cases}$

Ćwiczenie 8

Michał i Adam wybrali się na grzybobranie. Obaj chłopcy razem zebrali x borowików i o $3y$ więcej maślaków. Grzyby zebrane przez Michała stanowiły 40% liczby wszystkich grzybów. Wyrażenie opisujące liczbę grzybów zebranych przez Adama jest postaci

☐ $0,4x + 1,8y$

☐ $0,4x + 1,2y$

☐ $1,2x + 1,8y$

☐ $0,6x + 1,2y$

Ćwiczenie 9

Liczby leżące w takiej samej odległości od liczby -5 na osi liczbowej to

☐ -9 i 9

☐ $-6\frac{2}{3}$ i $-4\frac{2}{3}$

☐ $-8,5$ i $-1,5$

☐ -7 i -4

Ćwiczenie 10

Turysta pokonał trasę liczącą $5,4$ km z parkingu na szczyt w ciągu 1 godziny 48 minut. Droga powrotna zajęła mu 54 minuty.

O ile większa była prędkość, z jaką turysta schodził ze szczytu od tej, z którą wchodził na szczyt? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

☐ o 15 km/h

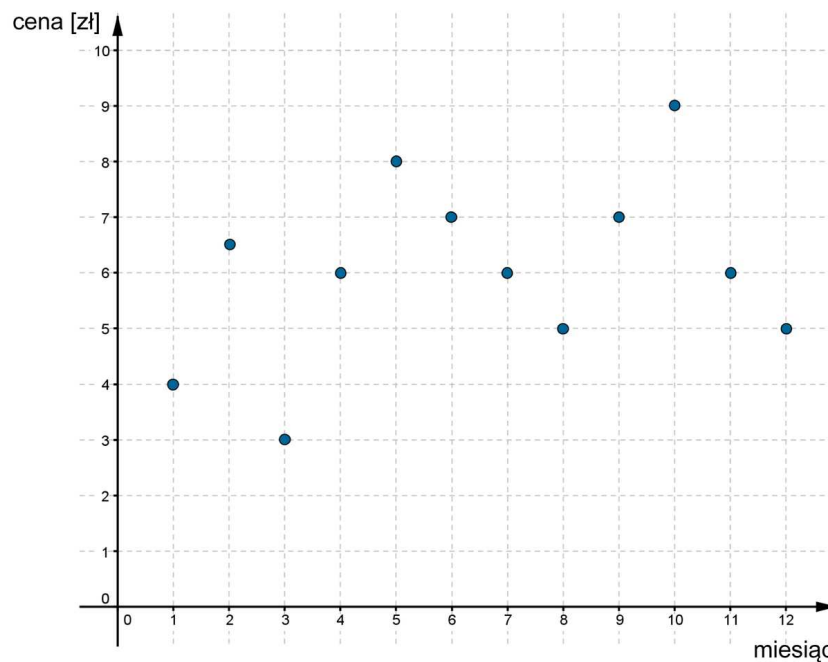
☐ o $5,4$ km/h

☐ o 5 km/h

☐ o 3 km/h

Ćwiczenie 11

Na wykresie przedstawiono, jak zmieniała się cena akcji pewnej firmy od stycznia do grudnia.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Pan Grzegorz kupił 50 akcji w maju, a następnie dokupił jeszcze 150 akcji w czerwcu. Sprzedając 40% kupionych akcji we wrześniu, a pozostałe akcje w październiku pan Grzegorz

☐ stracił 170 zł

☐ stracił 130 zł

☐ zarobił 190 zł

☐ zarobił 170 zł

Ćwiczenie 12

Funkcja jest wyrażona wzorem $y = \sqrt{x - 1}$, gdzie $x \geq 1$.

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Punkt o współrzędnych $(5, 2)$ należy do wykresu funkcji.

☐ Funkcja nie przyjmuje wartości ujemnych.

Ćwiczenie 13

Pole kwadratu ABCD jest równe 256.



Grafika statyczna

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Pole zacieniowanej figury jest równe

☐ 64π

☐ 192π

☐ $64(4 - \pi)$

☐ $16(1 - \pi)$

Ćwiczenie 14

Pole trójkąta równobocznego jest równe $36\sqrt{3}$. Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Dwusieczne kątów tego trójkąta przecinają się w punkcie odległym od każdego z wierzchołków o $2\sqrt{3}$.

☐ Wysokość tego trójkąta jest równa $\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 15

Długość odcinka x jest równa

 Grafika statyczna

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

☐ 13

☐ 12

☐ $\sqrt{193}$

☐ $\sqrt{13}$

Ćwiczenie 16

Przekątne prostokąta ABCD długości 12 cm przecinają się pod kątem 60° .

 Grafika statyczna

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Pole trójkąta EFC jest równe

☐ 36

☐ $72\sqrt{3}$

☐ $4,5\sqrt{3}$

☐ $36\sqrt{3}$

Ćwiczenie 17

Kąt rozwarcia stożka ma miarę 60° . Tworząca stożka ma długość 10.
Pole powierzchni bocznej stożka jest równe

☐ 50π

☐ 25π

☐ $25\pi\sqrt{3}$

☐ 100π

Ćwiczenie 18

Obracające się półkole utworzyło kulę o objętości 288π . Pole powierzchni tej kuli jest równe

☐ 72π

☐ 144π

☐ 36π

☐ 12π

Ćwiczenie 19

W trójkąt ABC wpisany jest okrąg o środku S . Miara kąta SAC jest równa 30° , a miara kąta SCA jest równa 20° . Jeden z kątów trójkąta ABC ma miarę

☐ 100°

☐ 80°

☐ 70°

☐ 50°

Ćwiczenie 20

Ile wierzchołków ma graniastosłup, który ma 45 krawędzi?

☐ 90

☐ 15

☐ 21

☐ 30

Ćwiczenie 21

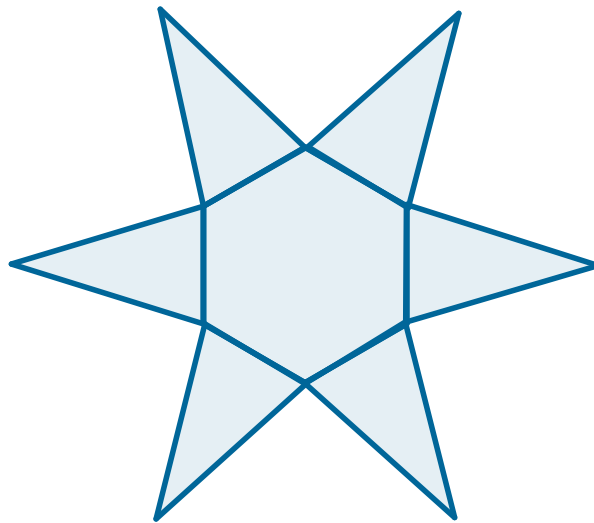
Uzasadnij, że jeśli w liczbie trzycyfrowej cyfra dziesiątek jest równa sumie cyfr jedności i setek, to ta liczba jest podzielna przez 11.

Ćwiczenie 22

W szkolnym klubie sportowym są trzy sekcje: piłki nożnej, koszykówki i siatkówki. Członków sekcji piłki nożnej jest o 25% więcej niż członków sekcji koszykówki, ale o 20% mniej niż członków sekcji siatkówki, których jest 50. Ile osób należy do sekcji koszykówki, a ile do sekcji piłki nożnej?

Ćwiczenie 23

Rysunek przedstawia siatkę ostrosłupa prawidłowego.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe $36a^2$. Wysokość ściany bocznej jest równa $4a$. Oblicz pole powierzchni podstawy.

Ćwiczenie 24

Średnica koła roweru Anki jest równa 18 cali. Natomiast średnica koła roweru Marcela stanowi $111\frac{1}{9}\%$ średnicy koła roweru Anki. Oblicz skalę podobieństwa większego koła do mniejszego.

Test 4

Ćwiczenie 1

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Wyrażenie $7^{51} + 7^{50}$ ma wartość

☐ 49^{2550}

☐ 14^{101}

☐ $8 \bullet 7^{50}$

☐ 7^{101}

Ćwiczenie 2

Pan Maciej wpłacił do banku 2400 zł na lokatę roczną. Po upływie roku stan jego lokaty wzrósł do 2476,8 zł.

Oprocentowanie w tym banku wynosiło:

☐ między 3% a 3,5%

☐ mniej niż 2,5%

☐ więcej niż 3,5%

☐ między 2,5% a 3%

Ćwiczenie 3

Średnia ocen z testu z języka angielskiego dla grupy *I*, liczącej 10 uczniów, wynosiła 4,2, a dla grupy *II*, liczącej 15 uczniów, wynosiła 4,6. Średnia ocen z tego testu dla wszystkich uczniów z obu grup była równa

☐ 4,44

☐ 4,36

☐ 4,5

☐ 4,4

Ćwiczenie 4

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Po usunięciu niewymierności z mianownika ułamka $\frac{\sqrt{27}-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ otrzymamy liczbę:

☐ $3 - 2\sqrt{3}$

☐ $3\sqrt{3} - 2$

☐ 7

☐ 1

Ćwiczenie 5

W pudełku znajduje się 20 kredek żółtych i 20 kredek czerwonych. Aby prawdopodobieństwo wylosowania z pudełka kredki czerwonej wynosiło 0,4, należy

☐ dołożyć do pudełka 10 kredek czerwonych

☐ zabrać z pudełka 8 kredek czerwonych

☐ dołożyć do pudełka 10 kredek żółtych

☐ zabrać z pudełka 8 kredek żółtych

Ćwiczenie 6

Ile spośród podanych liczb:

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-5}, -(-8)^{-3}, \left(2\frac{3}{4}\right)^{-1}, (-3,2)^{-3}$$

ma dodatnią wartość?

☐ dwie

☐ trzy

☐ cztery

☐ jedna

Ćwiczenie 7

W pierwszym kwartale średnia cena akcji firmy "Inter" wynosiła x zł, w drugim kwartale wzrosła o 25 zł, w trzecim stanowiła 120% ceny z pierwszego kwartału, a w czwartym wynosiła 80 zł. Które z wyrażeń przedstawionych poniżej opisuje średnią cenę akcji firmy "Inter" w ciągu roku?

☐ $2,2x + 105$

☐ $3,2x + 105$

☐ $0,8x + 26,25$

☐ $0,55x + 26,25$

Ćwiczenie 8

Rozwinięcie dziesiętne ułamka $\frac{1228}{4995}$ wynosi $0,2(458)$.

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Na 40 miejscu po przecinku tego rozwinięcia znajduje się cyfra:

☐ 5

☐ 2

☐ 8

☐ 4

Ćwiczenie 9

W dwóch pudełkach znajdują się 64 kule. Jeżeli z pierwszego pudełka przełożymy do drugiego $\frac{1}{9}$ liczby kul, które się w nim znajdują, to w obu pudełkach będzie taka sama liczba kul. Ile kul jest w pierwszym pudełku?

☐ 38

☐ 58

☐ 32

☐ 36

Ćwiczenie 10

Czapka i dwa szaliki kosztują razem 90 zł. Cena czapki jest wyższa od ceny szalika o 20 zł. Którego układu równań nie można wykorzystać do wyznaczenia ceny czapki i szalika?

☐
$$\begin{cases} 2x + y = 90 \\ y = x + 20 \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} x + 2y = 90 \\ x - y = 20 \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} x + 2y = 90 \\ x = y - 20 \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} x + 2y = 90 \\ x = y + 20 \end{cases}$$

Ćwiczenie 11

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = \frac{5-10x}{5}$. Miejscem zerowym tej funkcji jest liczba:

☐ 1

☐ -10

☐ 0,5

☐ 2

Ćwiczenie 12

Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 6. Miara kąta ostrego tego trójkąta jest równa 45° . Pole tego trójkąta jest

☐ mniejsze od 10

☐ większe od 15

☐ większe od 25

☐ większe od 3

Ćwiczenie 13

Przyrząd w kształcie walca o średnicy 40 cm i wysokości 60 cm wyrównuje trawnik. Ile metrów kwadratowych powierzchni trawnika zostanie wyrównanych, jeżeli walec obróci się dwa razy? Wybierz najlepsze przybliżenie.

☐ około 1 m^2

☐ około $0,4 \text{ m}^2$

☐ około $0,7 \text{ m}^2$

☐ około $0,8 \text{ m}^2$

Ćwiczenie 14

Jeden z boków trapezu jest zarazem wysokością tego trapezu. Największy kąt wewnętrzny trapezu jest cztery razy większy od najmniejszego. Różnica miar tych kątów jest równa

☐ 108°

☐ 120°

☐ 72°

☐ 90°

Ćwiczenie 15

Długości boków trójkąta są równe 40, 41, 9. Obwód okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy

☐ 20π

☐ 36π

☐ 82π

☐ 41π

Ćwiczenie 16

Pole powierzchni całkowitej sześcianu wynosi 1. Objętość tego sześcianu jest równa

☐ $\frac{\sqrt{6}}{36}$

☐ $\frac{\sqrt{6}}{6}$

☐ $6\sqrt{6}$

☐ $\sqrt{6}$

Ćwiczenie 17

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym ściany boczne są kwadratami. Suma długości krawędzi graniastosłupa jest równa $18\sqrt{2}$. Pole ściany bocznej jest równe

☐ $9\sqrt{2}$

☐ 18

☐ 8

☐ 6

Ćwiczenie 18

Stosunek pola powierzchni bocznej walca do pola jego przekroju osiowego jest równy

☐ 4

☐ 2

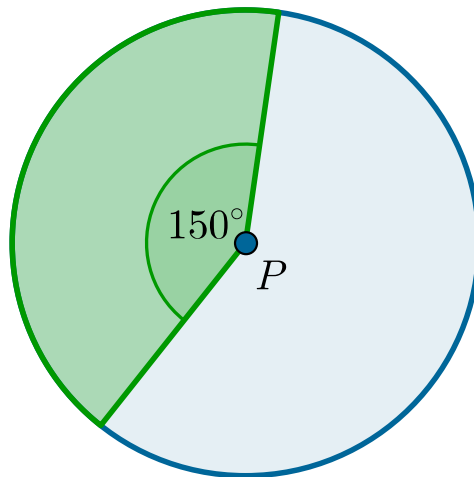
☐ 2π

☐ π

Ćwiczenie 19

Punkt P jest środkiem koła.

Pole zacieniowanej na zielono figury jest równe $33,75\pi$. Wynika z tego, że promień koła jest równy



☐ 2,25

☐ 4,5

☐ 18

☐ 9

Ćwiczenie 20

Jeśli od średniej arytmetycznej wieku Adama i Kamila, wyrażonej w latach, odejmiemy 1, to otrzymamy wiek Maćka. Jeśli od średniej arytmetycznej wieku Adama i Maćka, również wyrażonej w latach, odejmiemy 4, to otrzymamy wiek Kamila. Oblicz różnicę wieku między Maćkiem a Kamilem.

Ćwiczenie 21

Działka Marcela ma kształt prostokąta, którego jeden bok ma długość 20 m. Pole powierzchni działki jest równe 3 ary. Oblicz obwód prostokąta przedstawiającego plan działki w skali 1 : 50 .

Ćwiczenie 22

Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem. Dwusieczna kąta ADC przecina bok AB w punkcie E , natomiast prostą, na której leży bok BC w punkcie F . Uzasadnij, że trójkąt EFB jest równoramienny.

Ćwiczenie 23

Trzy kule o promieniach długości 2 cm, 3 cm, 4 cm przetopiono, tworząc jedną kulę. Oblicz promień tej kuli. Wynik podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

Test 5

Ćwiczenie 1

Podczas pracy klasowej Ania błędnie rozwiązała 4 zadania, które stanowiły 25 % zadań rozwiązanych poprawnie.

Liczba wszystkich zadań na pracy klasowej była równa

☐ 24

☐ 20

☐ 16

☐ 12

Ćwiczenie 2

Funkcja jest wyrażona wzorem $y = -2x + 5$.

Miejscem zerowym tej funkcji jest liczba

☐ - 2,5

☐ 2,5

☐ 5

☐ - 2

Ćwiczenie 3

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji.



Grafika statyczna

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Na podstawie wykresu oceń prawdziwość podanych zdań. Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐

Miejscem zerowym funkcji, której wykres przedstawiony jest na rysunku, jest punkt o współrzędnych $(-2, 0)$.

☐

Wzór funkcji, której wykres jest przedstawiony na rysunku, to $y = 2x + 4$.

Ćwiczenie 4

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Liczba 2^{-15} jest od liczby 2^{-11}

☐

16 razy większa

☐

8 razy mniejsza

☐

16 razy mniejsza

☐

8 razy większa

Ćwiczenie 5

W pierwszym tygodniu w hurtowni owoców cytrusowych sprzedano a kilogramów pomarańczy po b zł za kilogram. W następnym tygodniu cenę kilograma pomarańczy obniżono o 4 zł i wtedy sprzedano o 250 kg pomarańczy więcej niż w pierwszym tygodniu. Które wyrażenie opisuje zysk uzyskany przez hurtownię ze sprzedaży pomarańczy w ciągu dwóch tygodni?

☐ $2ab + 4a + 250b + 1000$

☐ $ab + 4a - 250b - 1000$

☐ $ab - 4a - 250b - 1000$

☐ $2ab - 4a + 250b - 1000$

Ćwiczenie 6

Które działanie zostało wykonane błędnie?

☐ $(3^{-1} + 3)^{-1} = (3^{-1})^{-1} + 3^{-1} = 3 + \frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}$

☐ $81 \bullet 3^{-2} = 3^4 \bullet 3^{-2} = 3^2 = 9$

☐ $\sqrt{4 : 25} = \sqrt{4} : \sqrt{25} = 2 : 5 = \frac{2}{5}$

☐ $\sqrt{5 \bullet \sqrt[3]{125}} = \sqrt{5 \bullet 5} = 5$

Ćwiczenie 7

Cena brutto = cena netto + podatek VAT

Cena brutto towaru jest równa 1525,2 zł. Jeżeli podatek VAT wynosi 23%, to cena netto tego towaru jest równa:

☐ 1876 zł

☐ 2194,8 zł

☐ 1240 zł

☐ 285,2 zł

Ćwiczenie 8

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x = y - 2 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$ jest jedna para liczb.

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Nie, ponieważ jest to układ oznaczony.

☐ Nie, ponieważ jest to układ sprzeczny.

☐ Tak, ponieważ jest to układ sprzeczny.

☐ Tak, ponieważ jest to układ nieoznaczony.

Ćwiczenie 9

Jeżeli liczba 42 jest o 50% większa od liczby x , to liczba x wynosi:

☐ 63

☐ 56

☐ 28

☐ 14

Ćwiczenie 10

Samochód, który spala 4,5 litra benzyny na 100 km, przejechał pewną trasę z prędkością 80 km/h w ciągu 45 minut. Litr benzyny kosztuje 5,2 zł.

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Benzyna, którą spalił samochód na tej trasie, kosztowała:

☐ 23,4 zł

☐ 14,4 zł

☐ 14,04 zł

☐ 18,72 zł

Ćwiczenie 11

Na początku roku szkolnego w sekcji karate szkolnego klubu sportowego było 12 chłopców i nie było żadnej dziewczynki. W ciągu roku do sekcji zapisało się kilka dziewczynek i wtedy okazało się, że chłopcy stanowią 75 % wszystkich członków sekcji.

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐

Gdyby do sekcji zapisały się o 2 dziewczynki więcej, to stanowiłyby 33 % wszystkich członków tej sekcji.

☐

Do sekcji zapisały się 4 dziewczynki.

Ćwiczenie 12

Sześcienny klocek o krawędzi długości 2,5 cm waży 75 g. Długość krawędzi sześcianu ważącego 16,2 g, wykonanego z tego samego materiału, jest równa

☐

1,5 cm

☐

1,25 cm

☐

0,5 cm

☐

2 cm

Ćwiczenie 13

Paweł jest o 4 lata starszy od Gawła. Dwa lata temu był od niego trzy razy starszy.

Jeżeli oznaczymy przez p wiek Pawła obecnie, a przez g - wiek Gawła obecnie, to podane zależności opisuje układ równań:

☐
$$\begin{cases} p = g + 4 \\ p - 2 = 3g \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} p - g = 4 \\ p - 2 = 3(g - 2) \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} g = p + 4 \\ p - 2 = 3(g - 2) \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} p - g = 4 \\ p - 2 = 3g - 2 \end{cases}$$

Ćwiczenie 14

Wykres przedstawia zależność liczby linijek tekstu przepisanych przez Joasię na komputerze od czasu przepisywania wyrażonego w minutach.



Grafika statyczna

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

☐ Podczas przepisywania tekstu Joasia zrobiła przerwę, która trwała pół godziny.

☐ W ciągu $1\frac{2}{3}$ godziny Joasia przepisała 120 linijek tekstu.

Ćwiczenie 15

Na trójkącie prostokątnym równoramiennym opisano okrąg o promieniu 2. Pole tego trójkąta jest równe

☐ $16\sqrt{2}$

☐ 8

☐ 16

☐ 4

Ćwiczenie 16

Balon ma kształt kuli, której koło wielkie ma obwód 40π cm. Objętość powietrza zawartego w balonie jest równa około

☐ $0,32 \text{ dm}^3$

☐ 32 dm^3

☐ $3,2 \text{ dm}^3$

☐ 320 dm^3

Ćwiczenie 17

Proste p i r są równoległe.



Grafika statyczna

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Suma miar kątów zaznaczonych kolorem zielonym jest równa

☐ 120°

☐ 150°

☐ 90°

☐ 180°

Ćwiczenie 18

Bok kwadratu ma długość $4\sqrt{2}$. Przekątna tego kwadratu jest równa

☐ 4

☐ 8

☐ $4\sqrt{2} + 4$

☐ $8\sqrt{2}$

Ćwiczenie 19

Punkty $A = (2,1)$ i $B = (-6, -3)$ leżą na prostej p . Na prostej p leży też punkt o współrzędnych

☐ $(-1, -2)$

☐ $(1,0)$

☐ $(0, 3)$

☐ $(-2, -1)$

Ćwiczenie 20

W konkursie na najlepiej zaprojektowane logo szkoły wzięło udział 97 uczniów, którzy pracowali w parach lub grupach trzyosobowych. Wszystkich grup (dwu – lub trzyosobowych) było 36. Ile osób pracowało w parach, a ile w grupach trzyosobowych?

Ćwiczenie 21

Wazon ma kształt walca o średnicy 6 cm. Wysokość wazonu jest równa 28 cm. Do wazonu nalano wody, która sięga do $\frac{3}{4}$ wysokości. Oblicz, ile cm^3 wody znajduje się w wazonie. Wynik podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

Ćwiczenie 22

W trapezie trzy boki są równe i każdy z nich ma długość a . Uzasadnij, że trzeci bok nie może mieć długości $3a$.

Ćwiczenie 23

W trójkącie EWA wysokość WK jest równa 4. Wysokość ta dzieli bok EA na dwa odcinki takie, że odcinek KA jest trzy razy dłuższy od odcinka EK . Pole trójkąta WKA jest o 24 większe od pola trójkąta WKE . Oblicz długość odcinka KE .

Test 6

Ćwiczenie 1

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Wartość wyrażenia $\sqrt{12^2 + 9^2} + \sqrt{5^2} - \sqrt{3^2}$ wynosi

☐ 25

☐ 17

☐ 24

☐ 12

Ćwiczenie 2

Kilogram jabłek kosztuje x zł, kilogram gruszek kosztuje o 2 zł więcej niż kilogram jabłek, a cena kilograma śliwek stanowi 80% ceny kilograma jabłek.

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe?

☐ Dwa kilogramy gruszek są o $0,4x$ droższe od dwóch kilogramów śliwek.

☐ Za dwa kilogramy jabłek, trzy kilogramy gruszek i kilogram śliwek zapłacimy $5,8x + 6$ zł.

Ćwiczenie 3

Które działanie zastało wykonane błędnie?

I. $5^3 \bullet 3^3 = 15^3$

II. $5^3 \bullet 3^3 = 15^6$

III. $5^3 \bullet 3^2 = 15^2 \bullet 5$

IV. $5^3 \bullet 3^3 = 8^3$

☐ II i IV

☐ tylko II

☐ II i III

☐ tylko III

Ćwiczenie 4

Samochód pokonuje pewną trasę, jadąc z prędkością 60 km/h w ciągu 15 minut. Czy prawdziwe jest zdanie: Gdyby samochód zwiększył swoją prędkość do 90 km/h , to czas przejazdu skróciłby się do 10 minut.

☐

Nie, ponieważ prędkość i czas, w jakim samochód pokonuje daną trasę, są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, więc ich iloraz jest stały.

☐

Nie, ponieważ prędkość i czas, w jakim samochód pokonuje daną trasę, są wielkościami wprost proporcjonalnymi, więc ich iloczyn jest stały.

☐

Tak, ponieważ prędkość i czas, w jakim samochód pokonuje daną trasę, są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, więc ich iloczyn jest stały.

☐

Tak, ponieważ prędkość i czas, w jakim samochód pokonuje daną trasę, są wielkościami wprost proporcjonalnymi, więc ich iloraz jest stały.

Ćwiczenie 5

Niech $x - y = 2\sqrt{2}$.

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Wartość wyrażenia $x - y + (x - y)^2 + (x - y)^3$ wynosi

☐

$18\sqrt{2} + 8$

☐

$16\sqrt{2} + 10$

☐

$6\sqrt{2} + 4$

☐

$18 + 8\sqrt{2}$

Ćwiczenie 6

Ze zbiornika o pojemności 3,4 litra napelnionego wodą odlano 0,085 litra wody. Jaki procent wody pozostał w zbiorniku?

☐ 97,5 %

☐ 2,5 %

☐ 75 %

☐ 25 %

Ćwiczenie 7

Kinga kupiła spódnice i żakiet, za które zapłaciła 138 zł. Żakiet był o 40 % droższy od spódnicy. Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.
Spódnica, którą kupiła Kinga, kosztowała ...

☐ 55,2 zł

☐ 82,8 zł

☐ 86,25 zł

☐ 57,5 zł

Ćwiczenie 8

Roztwór wodny soli kuchennej nazywamy solanką.

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Aby otrzymać solankę o stężeniu 20 %, należy rozpuścić ...

☐ 9 g soli w 41 g wody

☐ 15 g soli w 45 g wody

☐ 7,5 g soli w 42,5 g wody

☐ 7,5 g soli w 30 g wody

Ćwiczenie 9

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 5x - y = 6 \end{cases}$ jest para takich liczb, których suma jest równa

☐ 1

☐ 0

☐ -2

☐ 2

Ćwiczenie 10

Karolina, która zajęła pierwsze miejsce w konkursie matematycznym, uzyskała 150 punktów. Michał, który zajął drugie miejsce w tym konkursie, zdobył o 20 % punktów mniej niż Karolina, a Agnieszka, która zajęła trzecie miejsce, zdobyła o 20 % punktów mniej niż Michał. Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe?

☐ Agnieszka zdobyła o 40 % punktów mniej niż Karolina.

☐ Agnieszka otrzymała 96 punktów.

Ćwiczenie 11

Na rysunku przedstawiono wykres pewnej funkcji.



Grafika statyczna

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe?

☐ Dla argumentu (-3) funkcja przyjmuje wartość (-2) .

☐ Funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów większych od (-2) .

Ćwiczenie 12

Funkcja jest wyrażona wzorem: $y = \frac{3}{4}x - 2$.

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe?

☐ Dla argumentu -2 funkcja przyjmuje wartość $-3,5$.

☐ Punkt $P = (6, 5)$ należy do wykresu funkcji.

Ćwiczenie 13

Dany jest układ równań $\begin{cases} y - x = 9 \\ 50\%x + 20\%y = 13 \end{cases}$

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe?

☐

Jeżeli oznaczymy przez x cenę długopisu, a przez y cenę książki, to książka kosztuje 16 zł, a długopis 25 zł.

☐

Różnica dwóch liczb jest równa 9. Suma połowy mniejszej liczby i piątej części większej liczby jest równa 13.

Ćwiczenie 14

W rombie ABCD poprowadzono przekątne. Krótsza przekątna AC dzieli romb na dwa trójkąty – każdy o obwodzie 16. Dłuższa przekątna BD dzieli romb na dwa trójkąty – każdy o obwodzie 18. Suma długości tych przekątnych jest równa 14. Przekątna AC ma więc długość

☐ 8

☐ 2

☐ 5

☐ 6

Ćwiczenie 15

W trapezie równoramiennym podstawy mają długości 6 cm i 14 cm. Wysokość trapezu jest równa $4\sqrt{3}$. Miara kąta między ramieniem a wysokością trapezu jest równa

☐ 90°

☐ 30°

☐ 45°

☐ 60°

Ćwiczenie 16

Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny jest równy 4 cm. Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe?

☐ Promień okręgu opisanego na trójkącie jest równy 8 cm.

☐ Długość boku trójkąta jest równa $8\sqrt{3}$ cm.

Ćwiczenie 17

Prostokąt W jest podobny do prostokąta Z w skali 3 : 4. Boki prostokąta W są równe 5 dm i 6 dm. Pole prostokąta Z jest równe

☐ $53\frac{1}{3}$

☐ $42\frac{1}{2}$

☐ 40

☐ 60

Ćwiczenie 18

Objętość sześcianu wynosi 125. Przekątna ściany sześcianu jest równa

☐ 25

☐ $2,5\sqrt{2}$

☐ $5\sqrt{2}$

☐ 100

Ćwiczenie 19

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym. Stosunek pola powierzchni bocznej tego stożka do pola podstawy jest równy

☐ 2

☐ π

☐ 4

☐ 2π

Ćwiczenie 20

Pole równoległoboku jest równe 20. Boki równoległoboku mają długości 10 i 4. Suma długości wysokości równoległoboku wynosi

☐ 5

☐ 12

☐ 2

☐ 7

Ćwiczenie 21

Uzasadnij, że liczba podzielna przez 6 i podzielna przez 35 jest podzielna przez 10.

Ćwiczenie 22

W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 50. Stosunek długości przyprostokątnych jest równy 7 : 24. Oblicz pole koła wpisanego w ten trójkąt.

Ćwiczenie 23

Długość krawędzi czworościanu foremnego zmniejszono dwukrotnie. Oblicz, o ile procent zmniejszyło się pole tego czworościanu.

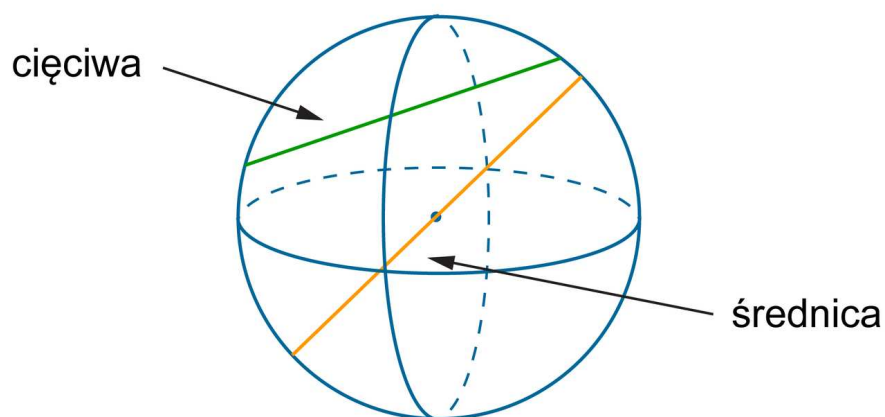
Ćwiczenie 24

Kwadrat obrócono wokół jednego z boków, otrzymując bryłę, której objętość wynosi $\frac{1}{\pi^2}$. Oblicz pole powierzchni bocznej tej bryły.

Słowniczek

Definicja: Cięciwa sfery (kuli)

Cięciwa sfery (kuli) to odcinek o końcach leżących na sferze. Cięciwa przechodząca przez środek sfery (kuli), to średnica



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Twierdzenie: Działania na potęgach

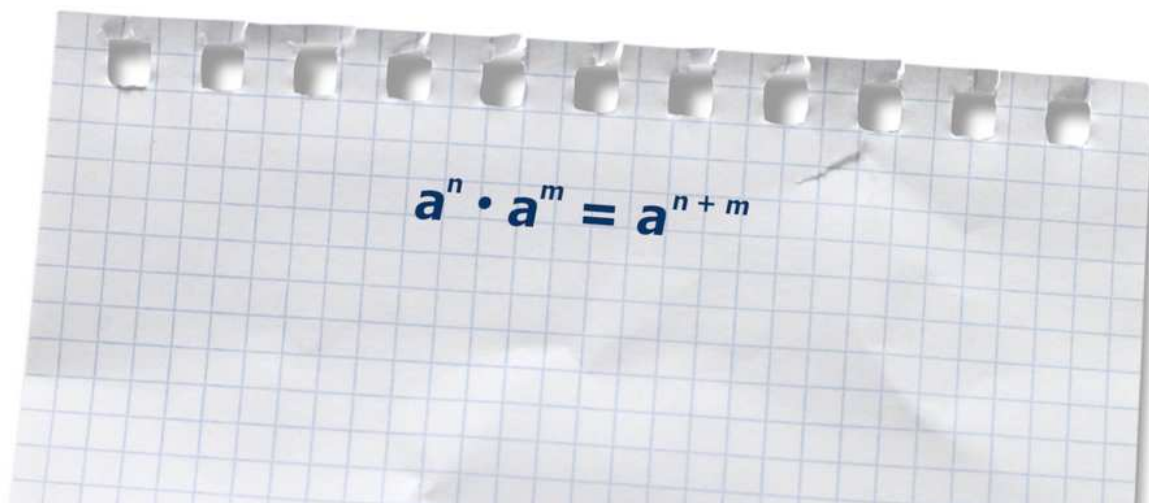
- Iloczyn potęg o tych samych podstawach

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ i dowolnych liczb całkowitych n i m prawdziwa jest równość

$$a^n \bullet a^m = a^{n+m}.$$



Aby pomnożyć dwie potęgi o takich samych podstawach różnych od zera i wykładnikach naturalnych, dodajemy ich wykładniki, a podstawę pozostawiamy bez zmiany.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

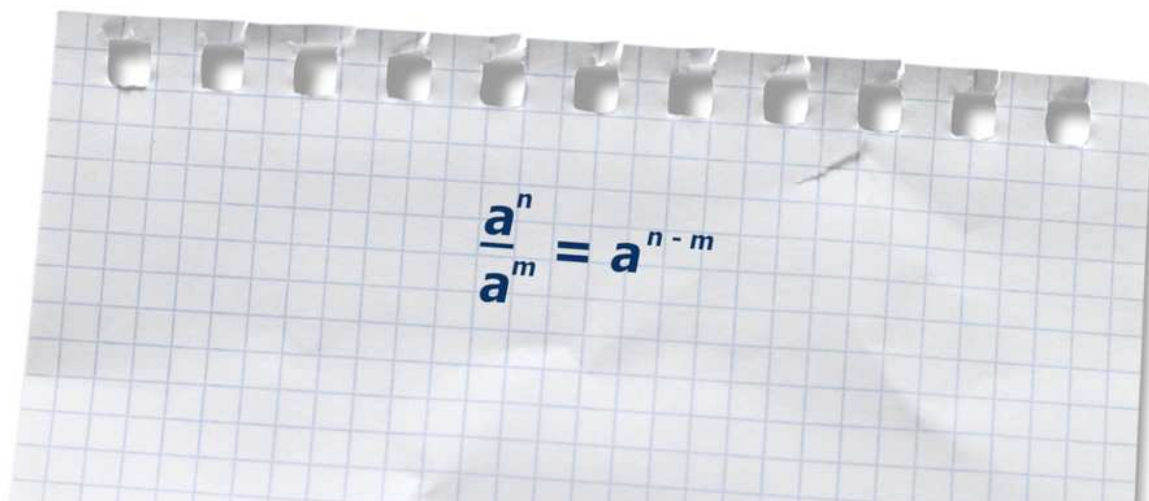
- Iloraz potęg o tych samych podstawach

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ i dowolnych liczb całkowitych n i m prawdziwa jest równość

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$



Aby podzielić dwie potęgi o takich samych podstawach różnych od zera i wykładnikach naturalnych, odejmujemy ich wykładniki, a podstawę pozostawiamy bez zmiany.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

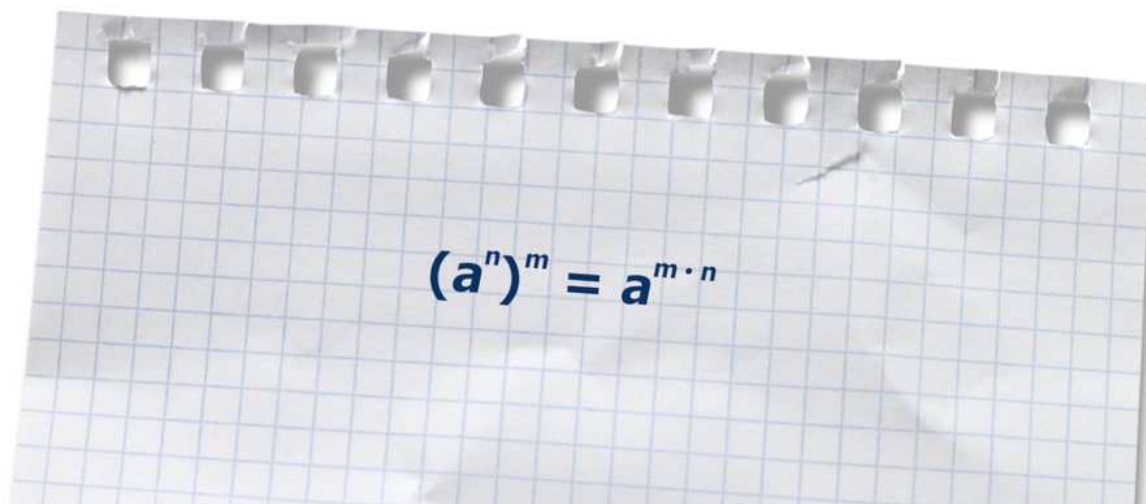
- Potęga potęgi

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ i dowolnych liczb całkowitych n i m prawdziwa jest równość

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$



Potęgując potęgę mnożymy wykładniki, a podstawę pozostawiamy bez zmiany.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

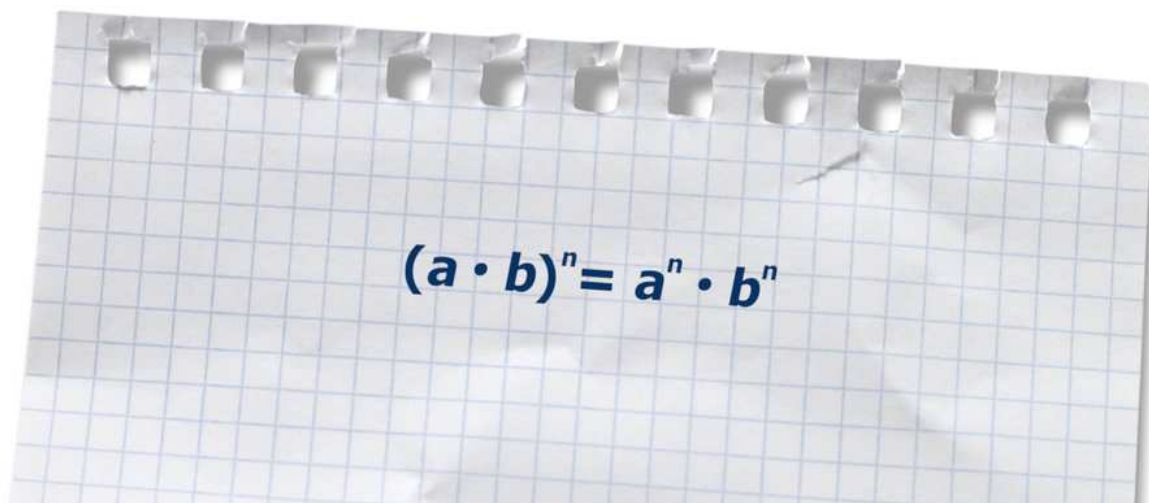
- Iloczyn potęg o tych samych wykładnikach

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a \neq 0$ i $b \neq 0$ i dowolnej liczby całkowitej n prawdziwa jest równość

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n.$$



Dla dowolnych liczb a i b różnych od zera oraz dowolnej liczby naturalnej n , n -ta potęga iloczynu tych liczb jest równa iloczynowi n -tych potęg tych liczb.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

- Iloraz potęg o tych samych wykładnikach

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a \neq 0$ i $b \neq 0$ i dowolnej liczby całkowitej n prawdziwa jest równość

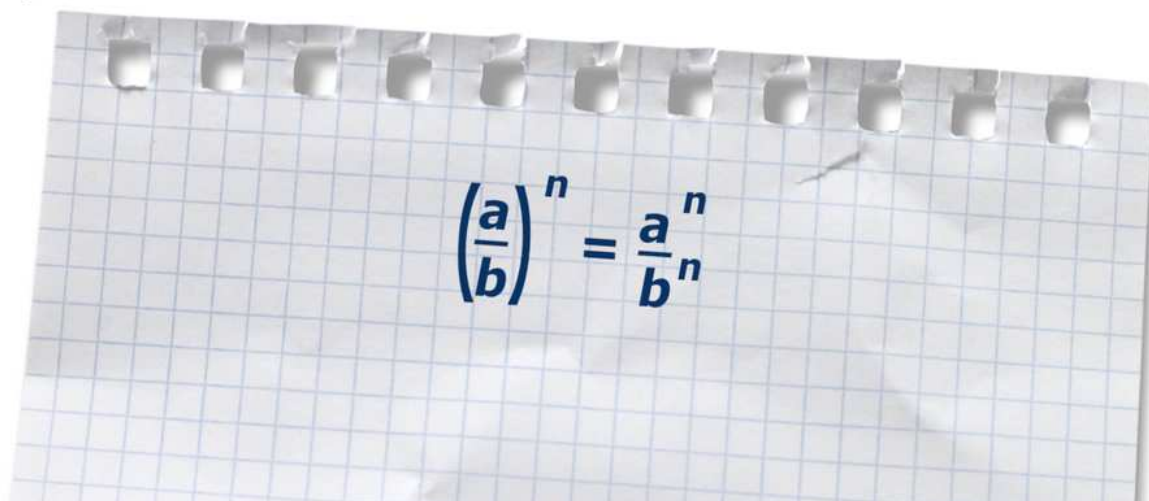
$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$



Dla dowolnych liczby a i b różnych od zera oraz liczby naturalnej n :



Potęga ilorazu dowolnych liczb różnych od zera jest równa ilorazowi potęg tych liczb.



Twierdzenie: Działania na potęgach

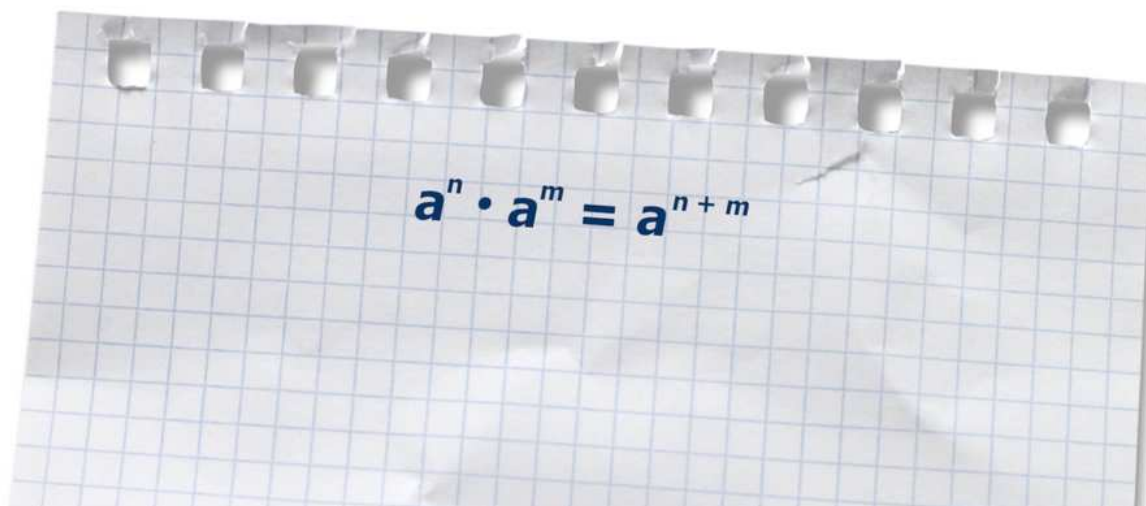
- Iloczyn potęg o tych samych podstawach

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ i dowolnych liczb całkowitych n i m prawdziwa jest równość

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$



Aby pomnożyć dwie potęgi o takich samych podstawach różnych od zera i wykładnikach naturalnych, dodajemy ich wykładniki, a podstawę pozostawiamy bez zmiany.



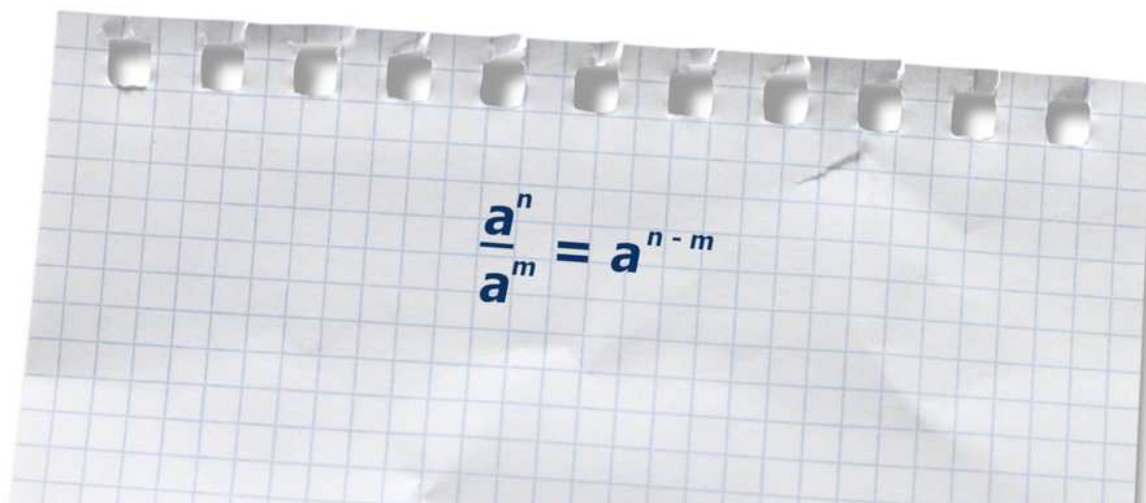
- Iloraz potęg o tych samych podstawach

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ i dowolnych liczb całkowitych n i m prawdziwa jest równość

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$



Aby podzielić dwie potęgi o takich samych podstawach różnych od zera i wykładnikach naturalnych, odejmujemy ich wykładniki, a podstawę pozostawiamy bez zmiany.


$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

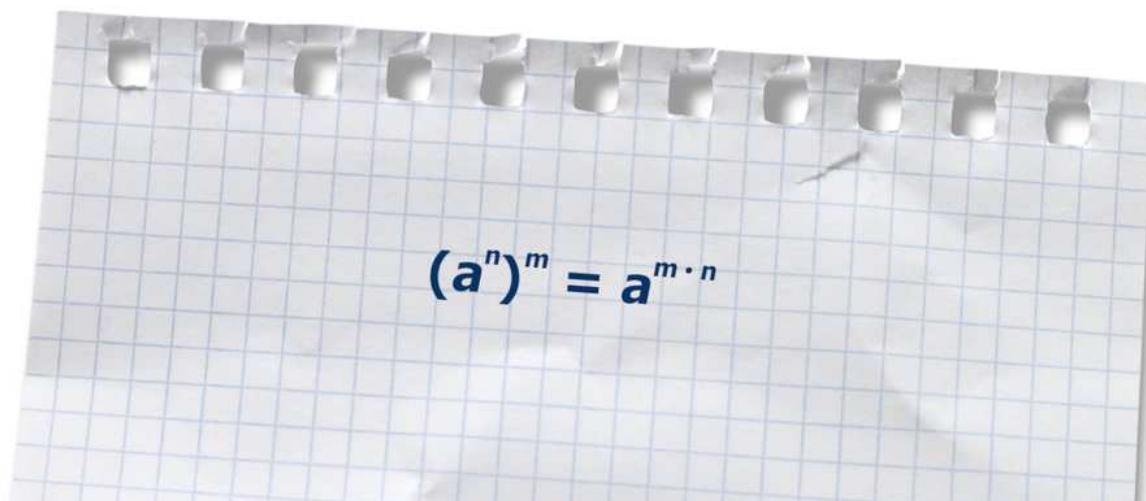
- Potęga potęgi

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ i dowolnych liczb całkowitych n i m prawdziwa jest równość

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$



Potęgując potęgę mnożymy wykładniki, a podstawę pozostawiamy bez zmiany.


$$(a^n)^m = a^{m \cdot n}$$

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

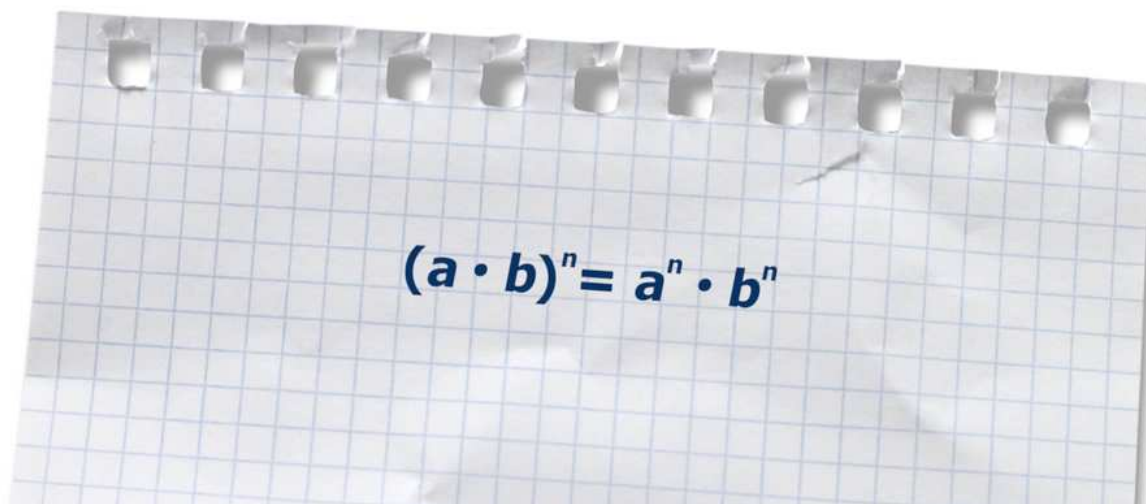
- Iloczyn potęg o tych samych wykładnikach

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a \neq 0$ i $b \neq 0$ i dowolnej liczby całkowitej n prawdziwa jest równość

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n.$$



Dla dowolnych liczb a i b różnych od zera oraz dowolnej liczby naturalnej n , n -ta potęga iloczynu tych liczb jest równa iloczynowi n -tych potęg tych liczb.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

- Iloraz potęg o tych samych wykładnikach

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a \neq 0$ i $b \neq 0$ i dowolnej liczby całkowitej n prawdziwa jest równość

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$



Dla dowolnych liczby a i b różnych od zera oraz liczby naturalnej n :



Potęga ilorazu dowolnych liczb różnych od zera jest równa ilorazowi potęg tych liczb.

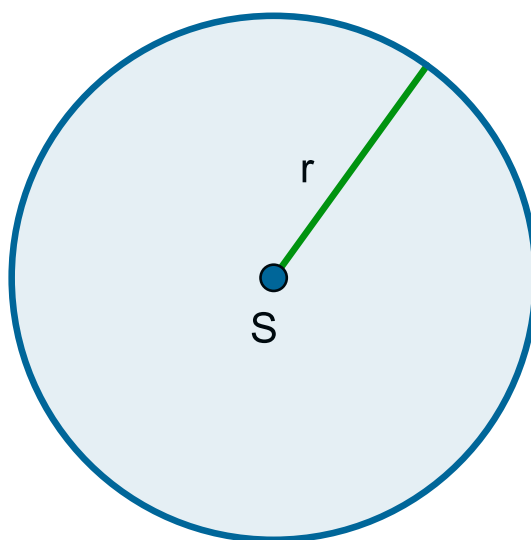
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

Definicja: Koło

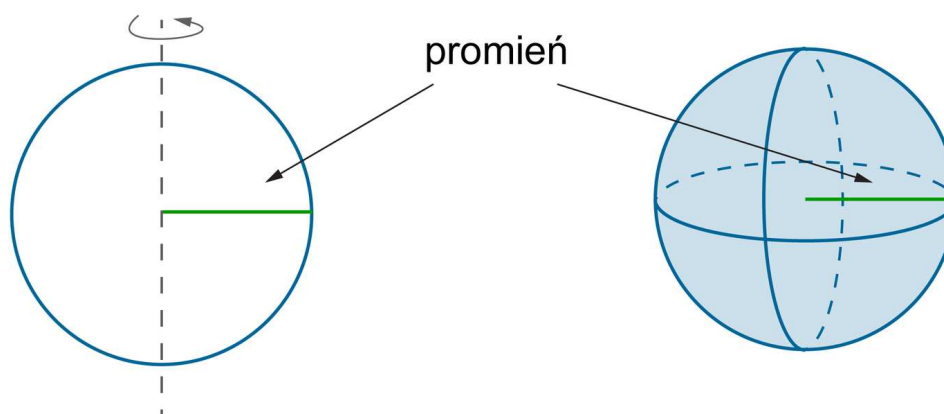
Kołem o środku w punkcie S i promieniu r nazywamy zbiór tych punktów płaszczyzny, których odległość od punktu S jest mniejsza bądź równa r .



$K(S, r)$ – koło o środku w punkcie S i promieniu r

Definicja: Kula

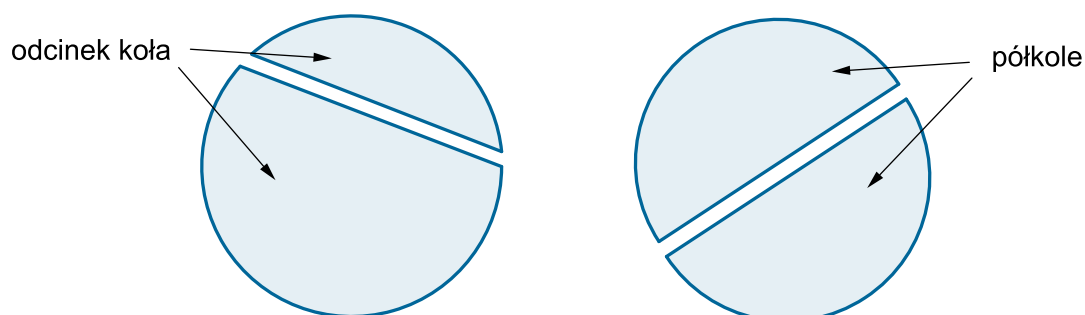
Kula to zbiór wszystkich punktów przestrzeni, których odległość od punktu, zwanego środkiem, jest nie większa od długości odcinka, zwanego promieniem kuli.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Definicja: Odcinek koła

Odcinkiem koła (odcinkiem kołowym) nazywamy część koła odciętą przez cięciwę wraz z tą cięciwą.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

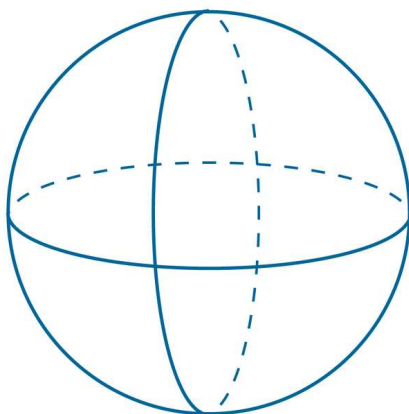
Każda cięciwa wyznacza dwa odcinki koła. Średnica dzieli koło na dwa półkoła.

Definicja: Oś obrotu

Obracając figurę płaską dookoła prostej p , zawartej w tej samej płaszczyźnie, otrzymujemy powierzchnię, która ogranicza figurę, zwaną bryłą obrotową. Prosta p nazywamy osią obrotu. Jest ona osią symetrii bryły obrotowej.

Definicja: Sfera

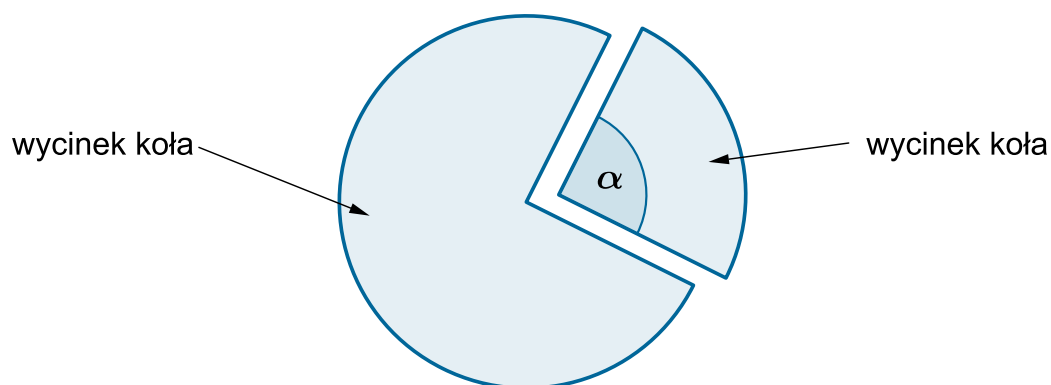
Sfera to zbiór wszystkich punktów przestrzeni, których odległość od punktu, zwanego środkiem, jest równa długości odcinka, zwanego promieniem sfery.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Definicja: Wycinek koła

Wycinkiem koła (wycinkiem kołowym) nazywamy część tego koła ograniczoną łukiem i ramionami kąta środkowego.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.