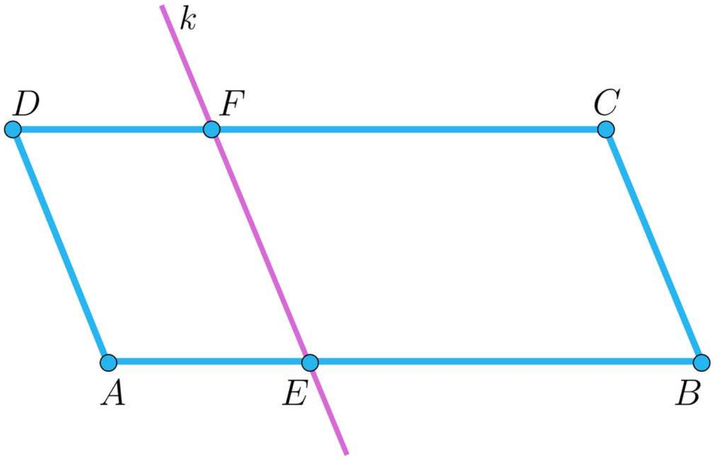
Twierdzenie Talesa

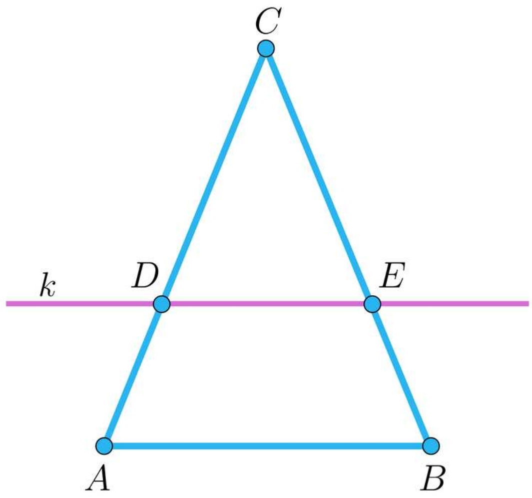
Źródło: Scott Webb, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Przecinając równoległobok $ABCD$ prostą k równoległą do boków AD i BC tego równoległoboku odcinamy z boków AB i CD odcinki AE i DF równej długości.



Wynika to wprost z faktu, że czworokąt $AEFD$ jest równoległobokiem.

Przecinając trójkąt równoramienny ABC prostą k równoległą do podstawy AB tego trójkąta odcinamy z ramion AC i BC odcinki DC i EC równej długości.



To z kolei wynika z twierdzenia o kątach odpowiadających oraz z twierdzenia o równości kątów przy podstawie trójkąta równoramiennego.

Gdy podobnie postąpimy z dowolnym trójkątem, to zazwyczaj nie otrzymamy odcinków o równych długościach. Długości otrzymanych odcinków mają jednak ciekawą własność. Własność ta wynika z twierdzenia Talesa. Jest ono, obok twierdzenia Pitagorasa, jednym z najbardziej znanych twierdzeń planimetrii. Twierdzenie to dotyczy stosunku długości odcinków, jakie otrzymujemy, przecinając ramiona kąta prostymi równoległymi. Jednym z geometrycznych zastosowań twierdzenia Talesa jest konstrukcja czwartego odcinka proporcjonalnego do trzech danych odcinków. Tę konstrukcję także omówimy.

Twoje cele

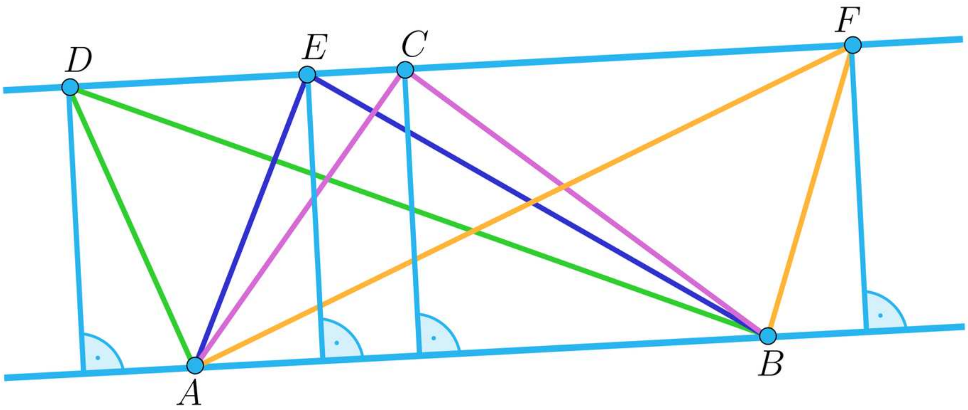
- Poznasz twierdzenie Talesa w dwóch wersjach.
- Udowodnisz twierdzenie Talesa.
- Zastosujesz twierdzenie Talesa do wyznaczania długości odcinków w wielokątach.
- Wykorzystasz twierdzenie Talesa do konstrukcji odcinków, w tym konstrukcji odcinka proporcjonalnego do trzech danych odcinków.
- Zastosujesz twierdzenie Talesa w sytuacjach typowych i problemowych.

Przeczytaj

Równość pól trójkątów o wspólnej podstawie

$$\frac{1}{2}ab^2 + 15x - \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}$$

Trójkąty, które mają wspólną podstawę oraz równe wysokości opuszczone na tę podstawę maja równe pola. Ten prosty fakt wynika wprost ze wzoru na pole trójkąta.

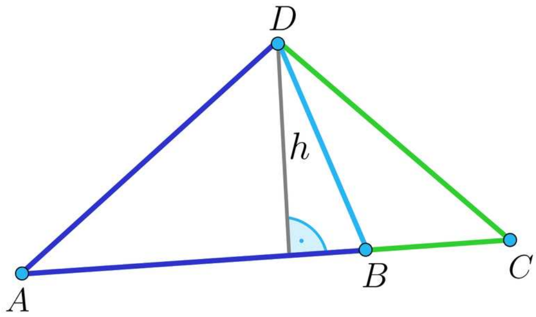


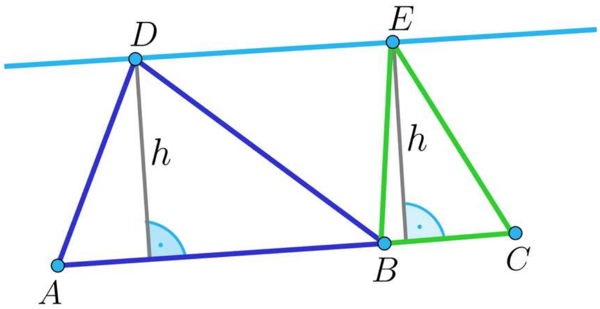
Na rysunku są to trójkąty ABC, ABD, ABE i ABF. Wszystkie te trójkąty mają wspólną podstawę AB i równe wysokości opuszczone na tę podstawę.

Sformułujemy teraz nieco ogólniejszą własność, którą wykorzystamy w dowodzie twierdzenia Talesa.

Twierdzenie: O stosunku pól trójkątów o wspólnej wysokości

Stosunek pól trójkątów o wspólnej wysokości lub równych wysokościach jest równy stosunkowi długości podstaw tych trójkątów. Przy oznaczeniach jak na rysunkach, biorąc pod uwagę trójkąty ABD i BCD lub ABD i BCE





możemy tę własność zapisać w postaci

$$\frac{P_{ABD}}{P_{BCD}} = \frac{|AB|}{|BC|}$$

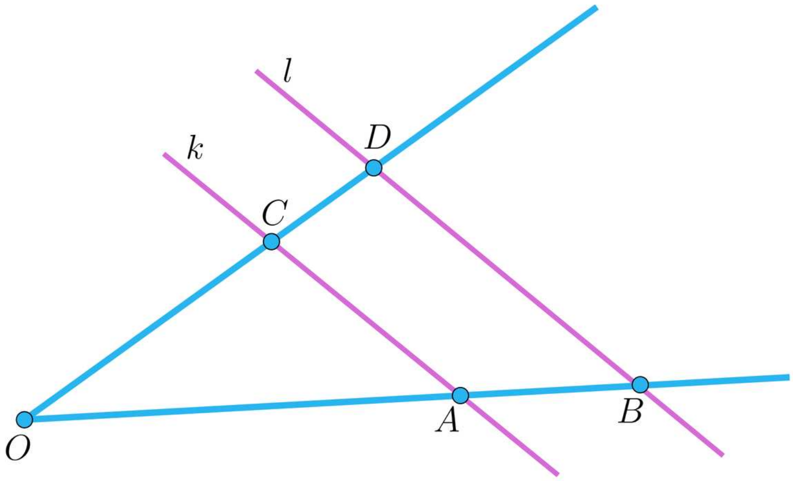
Rzeczywiście

$$\frac{P_{ABD}}{P_{BCD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot h} = \frac{|AB|}{|BC|}$$

Przejdźmy teraz do sformułowania twierdzenia Talesa.

Twierdzenie: Twierdzenie Talesa

Jeżeli proste równoległe k i l przecinają jedno z ramion kąta o wierzchołku O w punktach odpowiednio A i B oraz drugie ramię tego kąta w punktach odpowiednio C i D, jak na rysunku

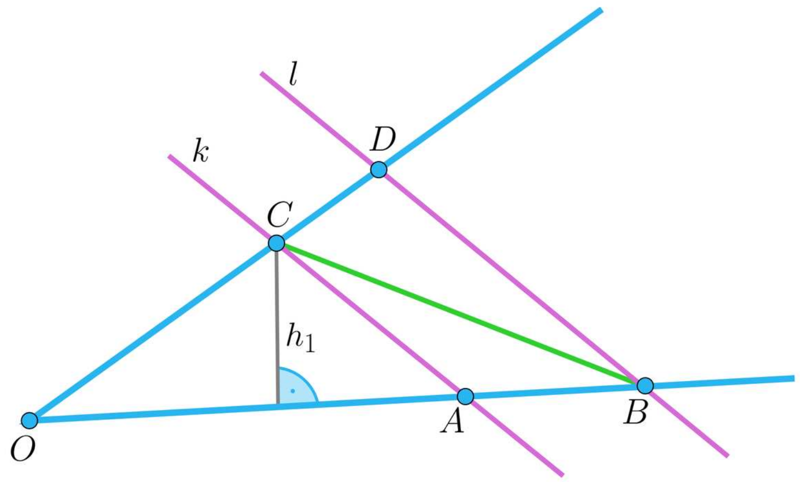


to

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OC|}{|CD|}$$

Dowód

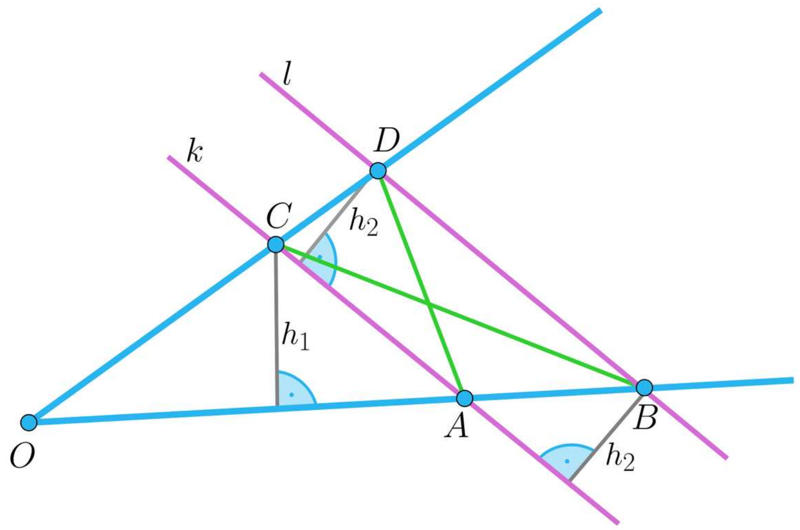
Poprowadźmy odcinek BC oraz wysokość h_1 z wierzchołka C.



Jest to wspólna wysokość trójkątów OAC i ABC, więc z udowodnionego wcześniej twierdzenia o stosunku pól trójkątów o wspólnej wysokości otrzymujemy

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{P_{OAC}}{P_{ABC}}$$

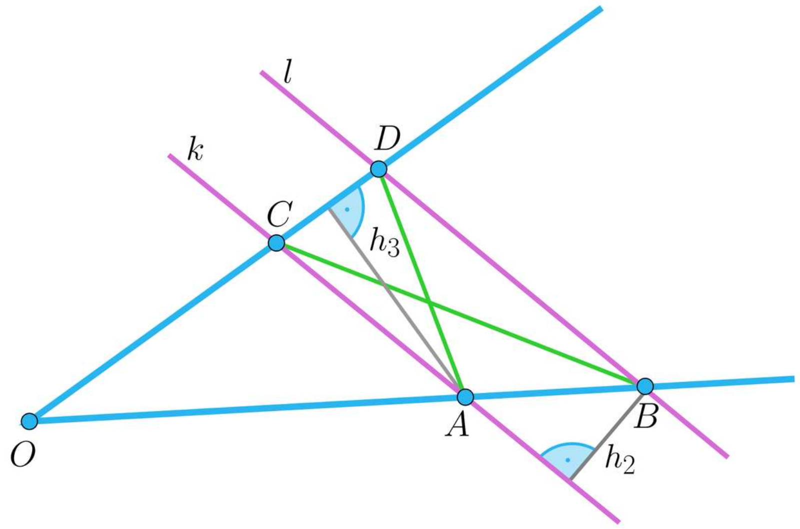
Poprowadźmy teraz odcinek AD. Ponieważ proste k i l są równoległe, to trójkąty ABC i ADC mają równe wysokości opuszczone na wspólną podstawę AC.



Zatem te trójkąty mają równe pola. Wobec tego równość $\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{P_{OAC}}{P_{ABC}}$ możemy zapisać w postaci

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{P_{OAC}}{P_{ADC}}$$

Na koniec zauważmy, że trójkąty OAC i ADC mają wspólną wysokość h_3 opuszczoną z wierzchołka A.



Wobec tego stosunek pól tych trójkątów jest równy stosunkowi długości podstaw tych trójkątów, czyli

$$\frac{P_{OAC}}{P_{ADC}} = \frac{|OC|}{|CD|}$$

Zatem

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{P_{OAC}}{P_{ADC}} = \frac{|OC|}{|CD|}$$

To kończy dowód.

Twierdzenie: wnioski z twierdzenia Talesa

Przy założeniach z twierdzenia Talesa prawdziwe są także równości:

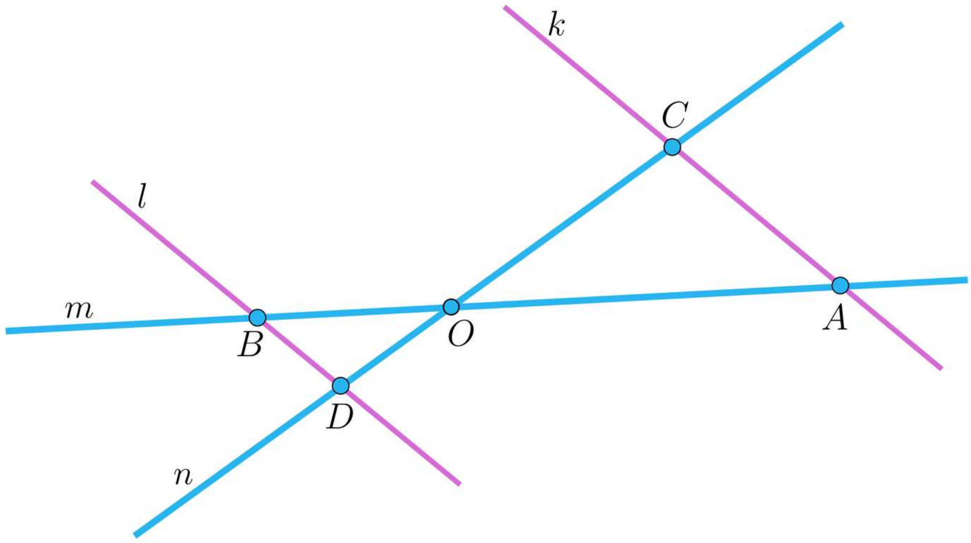
$\frac{|OC|}{|OD|} = \frac{|OA|}{|OB|}$

$\frac{|AC|}{|BD|} = \frac{|OC|}{|OD|} = \frac{|OA|}{|OB|}$

Ta ostatnia wynika z podobieństwa trójkątów OAC oraz OBD.

Twierdzenie Talesa można sformułować nieco ogólniej i zamiast o ramionach kąta można mówić o dwóch prostych przecinających się w punkcie O, które przecinamy dwiema prostymi równoległymi k i l, przy czym żadna z tych prostych nie przechodzi przez punkt O. Wtedy **uogólnione twierdzenie Talesa** możemy sformułować następująco:

Proste m i n przecinają się w punkcie O. Jeżeli proste równoległe k i l przecinają prostą m w punktach odpowiednio A i B oraz prostą n w punktach odpowiednio C i D, jak na rysunku



to:

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OC|}{|CD|}$$

Dowód tego twierdzenia można przeprowadzić w taki sam sposób, jak podany wcześniej.

Zauważy, że prawdziwe są także równości:

$$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OC|}{|OD|}$$

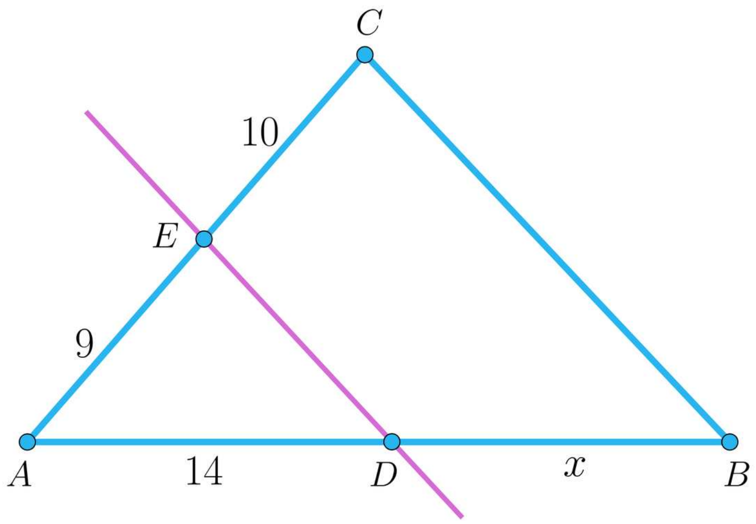
$$\frac{|AC|}{|BD|} = \frac{|OC|}{|OD|} = \frac{|OA|}{|OB|}$$

Ta ostatnia wynika z podobieństwa trójkątów OAC oraz OBD.

Przykład 1

Prosta równoległa do boku BC trójkąta ABC przecina boki AB i AC w punktach odpowiednio D i E. Długości odcinków AD, AE i EC są równe: $|AD| = 14$, $|AE| = 9$, $|EC| = 10$. Obliczymy długość odcinka BD.

Rozwiązanie:



Oznaczmy $|BD| = x$.

Z twierdzenia Talesa wynika proporcja $\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AE|}{|EC|}$, czyli $\frac{14}{x} = \frac{9}{10}$.

Stąd $x = \frac{14 \cdot 10}{9} = \frac{140}{9} = 15\frac{5}{9}$.

Przykład 2

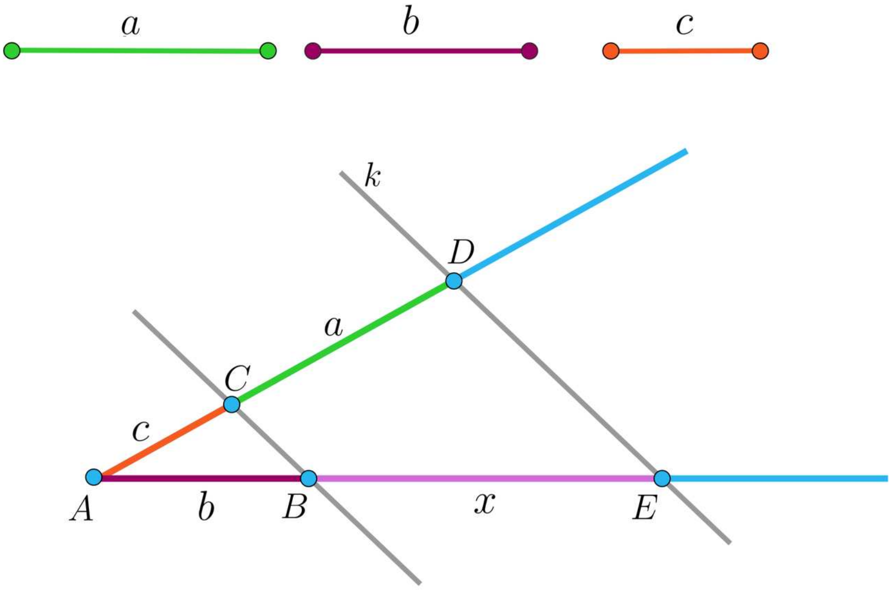
Dane są trzy odcinki o długościach a, b i c. Skonstruujemy odcinek o długości $x = \frac{a \cdot b}{c}$.

Rozwiązanie:

Zapiszmy równość $x = \frac{a \cdot b}{c}$ w postaci równoważnej, dzieląc obie jej strony przez b.

Otrzymujemy w ten sposób proporcję $\frac{x}{b} = \frac{a}{c}$, w której x jest jednym z wyrazów skrajnych.

Narysujmy teraz dowolny kąt wypukły o wierzchołku A, na jednym z jego ramion odłóżmy odcinek AB o długości b, a na drugim odcinek AC o długości c oraz odcinek CD o długości a tak, żeby punkt C leżał między punktami A i D.



Poprowadźmy prostą BC i skonstruujmy prostą k równoległą do prostej BC i przechodzącą przez punkt D.

Punkt jej przecięcia z prostą AB oznaczmy literą E. Odcinek BE jest szukanym odcinkiem czwartym proporcjonalnym.

Rzeczywiście, z twierdzenia Talesa otrzymujemy $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BE|}{|CD|}$, czyli $\frac{b}{c} = \frac{x}{a}$, skąd $x = \frac{a \cdot b}{c}$.

Przykład 3

Dany jest odcinek o długości a, a także odcinek jednostkowy, czyli odcinek o długości 1. Skonstruujemy odcinek o długości $\frac{1}{a}$.

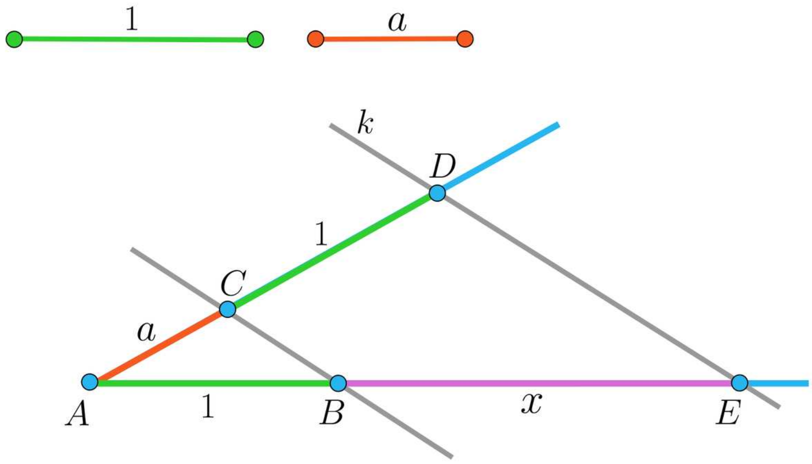
Rozwiązanie:

Niech $x = \frac{1}{a}$.

Tę równość możemy zapisać w postaci $\frac{x}{1} = \frac{1}{a}$.

W ten sposób problem sprowadziliśmy do konstrukcji, którą wykonaliśmy w poprzednim przykładzie.

Zilustrujmy tę konstrukcję na rysunku



Słownik

odcinek czwarty proporcjonalny

dane są trzy odcinki o długościach a, b i c; odcinek o długości x takiej, że liczby x, a, b i c są wyrazami proporcji, np. $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$ nazywamy czwartym proporcjonalnym

Film edukacyjny

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem o Talesie z Miletu, a następnie wykonaj poniższe polecenia.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D15baZLUD

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej twierdzenia Talesa.

Polecenie 2

Przeanalizuj ten fragment filmu, który dotyczy przypuszczalnego sposobu, w jaki Tales zmierzył wysokość Piramidy Cheopsa. Wskaż dwa trójkąty, które w swoim rozumowaniu wykorzystał Tales.

Polecenie 3

Przyjmując, że zmierzona przez Talesa wysokość Piramidy Cheopsa była równa $146,5$ metrów, długość cienia, jaki wtedy rzucała Piramida liczona do podstawy Piramidy do wierzchołka cienia była równa $31,5$ metra, oblicz długość krawędzi podstawy Piramidy.

Polecenie 4

Pod jakim kątem byłyby nachylone ściany Piramidy do płaszczyzny jej podstawy, gdyby w dniu, w którym Tales mierzył jej wysokość, Piramida rzucała cień o prawie zerowej długości?

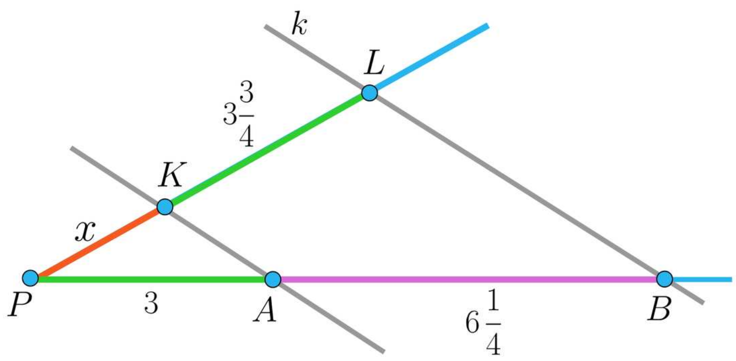
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Proste AK i BL są równoległe oraz $|PA| = 3$, $|AB| = 6\frac{1}{4}$, $|KL| = 3\frac{3}{4}$.

Zaznacz poprawną odpowiedź. Długość odcinka PK jest równa:

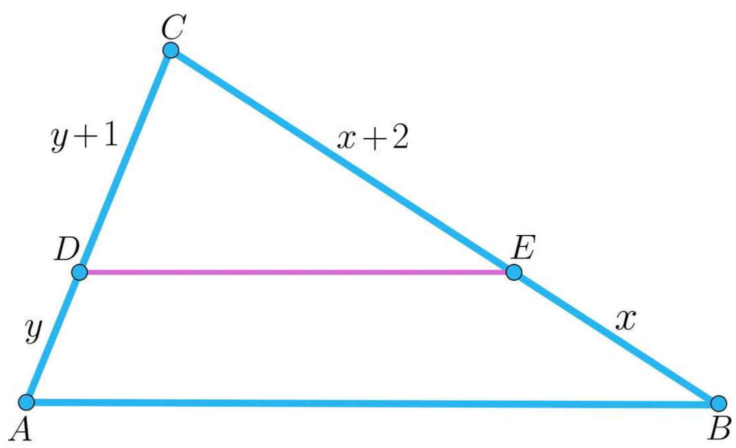


Ćwiczenie 2

Punkty D i E leżą na bokach trójkąta ABC i odcinek DE jest równoległy do boku AB.

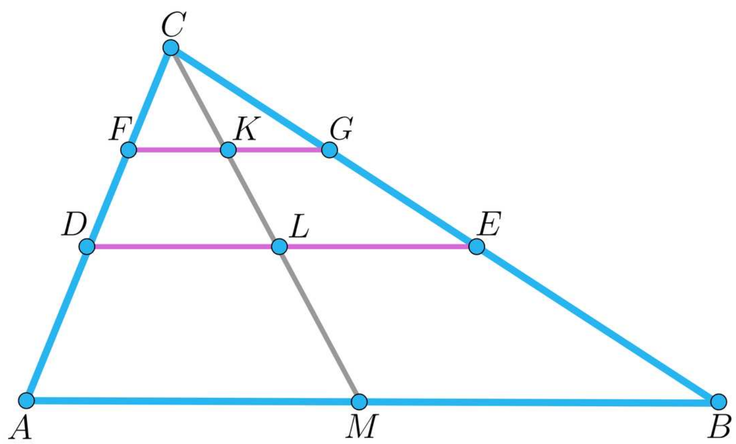
Długości odcinków BE, CE, AD i CD są zaznaczone na rysunku.

Zaznacz poprawną odpowiedź. Wynika stąd, że:



Ćwiczenie 3

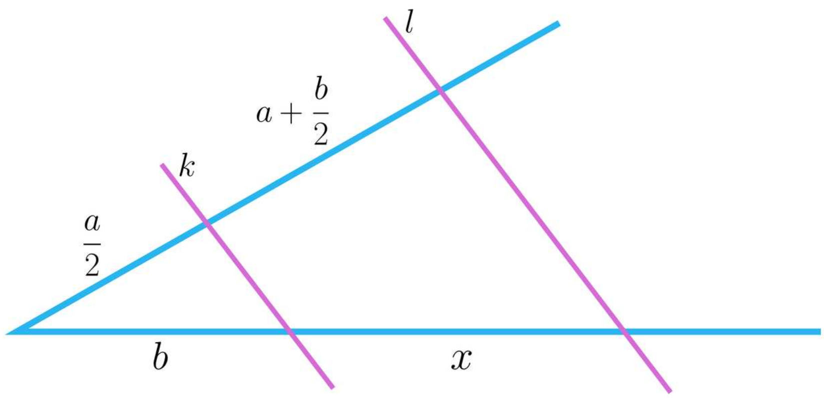
Długość boku BC trójkąta ABC jest równa 56. Punkty D, E, F i G leżą na bokach tego trójkąta i odcinki DE i FG są równoległe do boku AB.
Długości odcinków CK, KL i LM mają się do siebie jak $2 : 2 : 3$.



Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Zaznacz poprawną odpowiedź. Rysunek jest szkicem konstrukcji odcinka o długości x, gdy dane są odcinki o długościach a i b. Proste k i l są równoległe. Wtedy:

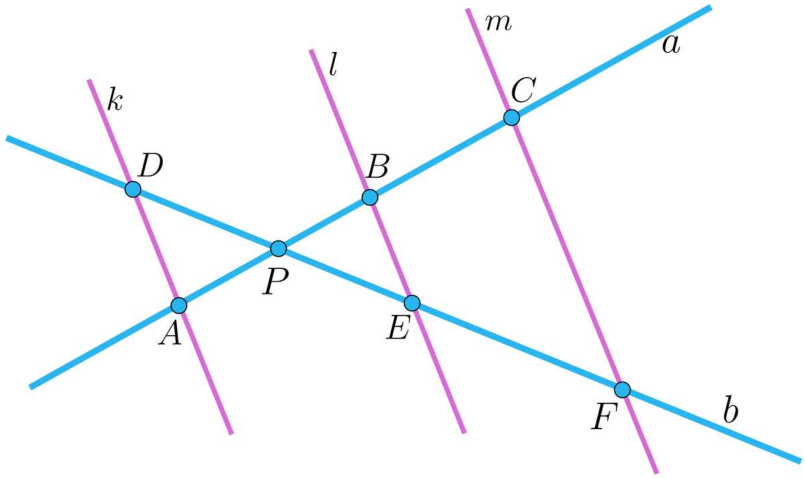


Ćwiczenie 6

Punkt M leży na boku AB trójkąta ABC, a punkt N na boku AC. Odcinek MN jest równoległy do boku BC, $|AN| = 14$, $|NC| = 10$, a długości odcinków AM i MB różnią się o 1. Oblicz długość boku AB trójkąta ABC.

Ćwiczenie 7

Proste a i b przecinają się w punkcie P, a proste równoległe k, l i m przecinają je w punktach A, B, C, D, E, F jak na rysunku. Oblicz długość odcinka PE, gdy dane są $|AC| = 12$, $|PB| = 2$, $|DP| = 6$, $|EF| = 9$.



Ćwiczenie 8

Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Punkty E i F są środkami ramion odpowiednio AD i BC, a odcinek EF jest równoległy do podstaw trapezu. Punkt M leży na podstawie AB, a punkt N na podstawie CD trapezu. Odcinki EF i MN przecinają się w punkcie P. Udowodnij, że punkt P jest środkiem odcinka MN.

Dla nauczyciela

Autor: Henryk Dąbrowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Twierdzenie Talesa

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria. Zakres podstawowy.

7) stosuje twierdzenia: Talesa, odwrotne do twierdzenia Talesa, o dwusiecznej kąta oraz o kącie między styczną a cięciwą;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna pojęcie i stosuje twierdzenie o stosunku pól trójkątów o równych wysokościach
- zna i stosuje twierdzenie Talesa
- przeprowadza dowód twierdzenia Talesa
- oblicza długości odcinków na podstawie twierdzenia Talesa
- konstruuje odcinki, wykorzystując twierdzenie Talesa
- przeprowadza dowody geometryczne

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie pojęcia proporcji oraz odcinków proporcjonalnych.
2. Nauczyciel prosi uczniów o narysowanie równoległoboku i przecięcie dwóch jego przeciwległych boków prostą równoległą do dwóch pozostałych boków oraz o sformułowanie wniosku dotyczącego długości odciętych od tych boków odcinków. Podobne ćwiczenie poleca wykonać dla trójkąta równoramiennego i prostej równoległej do podstawy tego trójkąta, a następnie prostej równoległej do jednego z ramion trójkąta.
3. Po wykonaniu ćwiczeń wprowadzających nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel podaje założenia twierdzenia Talesa, a następnie tak kieruje dyskusją, żeby w efekcie uczniowie sformułowali tezę twierdzenia.
2. Nauczyciel formułuje twierdzenie Talesa. Podaje twierdzenie o równości pól trójkątów o wspólnej podstawie i równych wysokościach oraz twierdzenie o stosunku pól trójkątów o wspólnej wysokości. Poleca uczniom uzasadnić tezy tych twierdzeń.
3. Nauczyciel informuje uczniów, że poznane twierdzenia wystarczą do udowodnienia twierdzenia Talesa.
4. Uczniowie w grupach, przy jak najmniejszej pomocy nauczyciela, dowodzą twierdzenia Talesa.
5. Nauczyciel poleca uruchomić Film i prosi o wykonanie dołączonych poleceń.
6. Następnie nauczyciel omawia przykłady zastosowania twierdzenia Talesa. Szczególną uwagę zwraca na konstrukcję czwartego odcinka proporcjonalnego.
7. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć oraz przeprowadzili dowód zależności omawianej we wstępie.

Materiały pomocnicze:

Trójkąty i ich własności

Wskazówki metodyczne:

Można zastosować w ramach powtórzenia przed sprawdzianem. Film edukacyjny o Talesie można wykorzystać do przeprowadzenia lekcji skorelowanej z lekcją filozofii, gdzie zaprezentowane zostaną główne założenia ontologiczne koncepcji filozoficznej Talesa.