Interpretacja geometryczna ilorazu różnicowego

Interpretacja geometryczna ilorazu różnicowego

Źródło: Paul Hanaoka, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Iloraz różnicowy funkcji można interpretować na kilka różnych sposobów. W materiale omówimy, jaka jest zależność pomiędzy współczynnikiem kierunkowym siecznej (prostej, która ma co najmniej dwa punkty wspólne z wykresem) do wykresu funkcji, a ilorazem różnicowym danej funkcji. Okazuje się, że równanie siecznej możemy wyznaczyć przy użyciu ilorazu różnicowego funkcji. Po wprowadzeniu, analizie materiału teoretycznego oraz omówieniu przykładów, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Podasz interpretację geometryczną ilorazu różnicowego funkcji.
- Zastosujesz różne wzory na współczynnik kierunkowy siecznej do wykresu funkcji.
- Wyznaczysz równania siecznych do wykresu funkcji w danym punkcie i o zadanym przyroście.
- Wykorzystasz geometryczną interpretację pojęcia ilorazu różnicowego do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Przypomnijmy definicję ilorazu różnicowego funkcji.

Definicja: iloraz różnicowy funkcji

Niech $f(x)$ oznacza dowolną funkcję określoną w otoczeniu punktu x_0.

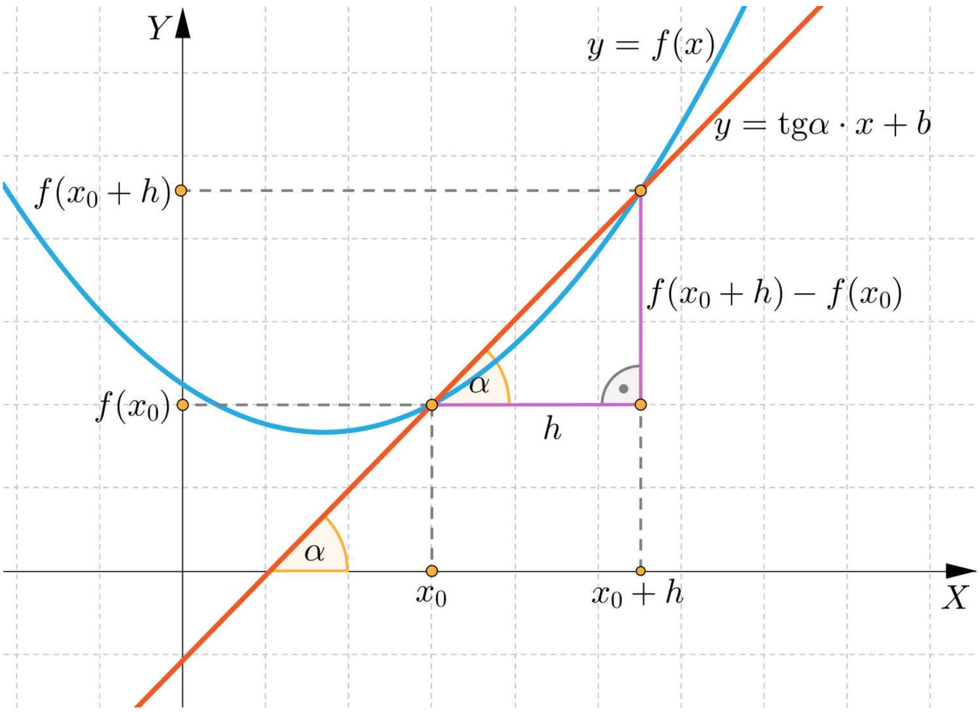
Ilorazem różnicowym funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 dla przyrostu h zmiennej niezależnej x nazywamy wyrażenie

$$U(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

które jest równoważne wyrażeniu

$$U(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Inaczej mówiąc, jest to stosunek przyrostu wartości funkcji do przyrostu argumentu funkcji.



Interpretacja geometryczna ilorazu różnicowego funkcji

Iloraz różnicowy $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ jest równy współczynnikowi kierunkowemu a prostej przechodzącej przez punkty o współrzędnych $(x_0, f(x_0))$ oraz $(x_0+h, f(x_0)+h)$, które należą do wykresu funkcji f.

Prosta ta nazywana jest **sieczną do wykresu funkcji** i jest opisana za pomocą wzoru:

$$y = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0)$$

lub równoważnie

$$y = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0) + f(x_0).$$

Zauważmy, że korzystając z trójkąta prostokątnego, otrzymujemy zależność:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ponieważ współczynnik kierunkowy a prostej $y = ax + b$ jest równy tangensowi kąta α nachylenia tej prostej do osi X, zatem zachodzi równość:

$$a = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Przykład 1

Wyznaczymy współczynnik kierunkowy siecznej do wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = x^3 - 4$ w punkcie $A = (-2, -12)$, gdy $h = 5$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że $x_0 = -2$ oraz $f(x_0) = -12$.

Ponieważ $a = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, zatem:

$a = \frac{f(-2+5) - f(-2)}{5} = \frac{f(3) - f(-2)}{5} = \frac{23+12}{5} = 7.$

Przykład 2

Wyznaczymy równanie siecznej do wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = -2x^2 + 4$, gdy $x_0 = -3$ oraz $h = 7$.

Rozwiązanie

Ponieważ $x_0 = -3$, zatem

$f(-3) = -2 \cdot (-3)^2 + 4 = -14.$

$a = \frac{f(-3+7) - f(-3)}{7} = \frac{f(4) - f(-3)}{7} = \frac{-2 \cdot 4^2 + 4 - (-14)}{7} = -2$

Równanie siecznej do wykresu funkcji opisuje wzór: $y = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0) + f(x_0)$, wobec tego:

$y = -2 \cdot (x + 3) + (-14) = -2x - 6 - 14 = -2x - 20.$

Wiadomo, że równanie każdej prostej opisujemy za pomocą równania $y = ax + b$, a równanie siecznej za pomocą wzoru:

$$y = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}(x - x_0) + f(x_0).$$

Jeżeli wyznaczymy wartość współczynnika b, to:

$$b = -\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot x_0 + f(x_0).$$

Przykład 3

Wyznaczymy wartość współczynnika b we wzorze $y = ax + b$ siecznej do wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = x^4 - 4$ dla $x_0 = 2$ i $h = 2$.

Rozwiązanie

Jeżeli wykorzystamy wzór $b = -\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot x_0 + f(x_0)$, to:

$b = -\frac{f(2+2)-f(2)}{2} \cdot 2 + f(2) = -f(4) + 2 \cdot f(2) =$

$= -252 + 2 \cdot 12 = -228$

Sieczna do wykresu funkcji jest równoległa do osi X, gdy $a = 0$, zatem

$$0 = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Warunek ten jest spełniony, gdy $f(x_0 + h) - f(x_0) = 0$, czyli $f(x_0 + h) = f(x_0)$.

Przykład 4

Sprawdzimy, czy sieczna do wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = 2x^4 - 3$ dla $x_0 = -3$ i $h = 6$ jest prostą równoległą do osi X.

Rozwiązanie

Obliczamy:

$f(x_0) = f(-3) = 2 \cdot (-3)^4 - 3 = 162 - 3 = 159,$

$f(x_0 + h) = f(-3 + 6) = 2 \cdot (-3 + 6)^4 - 3 = 162 - 3 = 159.$

Ponieważ zachodzi warunek $f(x_0 + h) = f(x_0)$, zatem sieczna do wykresu funkcji jest prostą równoległą do osi X.

Przykład 5

Wiadomo, że kąt nachylenia prostej do osi X ma miarę 60°. Prosta ta jest sieczną do wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = x^2 - 1$ w punkcie o współrzędnych $(-2, 3)$.

Wyznaczymy wartość przyrostu h ($h \neq 0$), dla której podana prosta jest sieczną do wykresu funkcji f.

Rozwiązanie

Jeżeli kąt nachylenia prostej do osi X ma miarę 60°, to współczynnik kierunkowy siecznej do wykresu funkcji jest równy:

$a = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$.

Zauważmy, że $x_0 = -2$ oraz $f(x_0) = 3$.

Korzystając ze wzoru $a = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, mamy:

$\sqrt{3} = \frac{(-2+h)^2-1-\left((-2)^2-1\right)}{h}$,

$\sqrt{3}h = 4 - 4h + h^2 - 1 - 4 + 1$,

$h^2 - 4h - \sqrt{3}h = 0$,

$h \cdot \left(h - 4 - \sqrt{3}\right) = 0$,

Zatem $h = 0$ lub $h = 4 + \sqrt{3}$.

Ponieważ $h \neq 0$, więc $h = 4 + \sqrt{3}$.

Słownik

iloraz różnicowy funkcji

stosunek różnicy wartości funkcji do różnicy argumentów, opisujący przyrost funkcji na danym przedziale

sieczna do wykresu funkcji

prosta, która przecina daną krzywą w co najmniej dwóch punktach

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samouczkiem dotyczącym interpretacji geometrycznej ilorazu różnicowego funkcji, w tym wyznaczania równania siecznej do wykresu funkcji, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DMkucRXPV

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej interpretacji geometrycznej ilorazu różnicowego.

Polecenie 2

Wyznacz równanie siecznej do wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = 3x^2 - x$ w punkcie o współrzędnych $A = (-1, 4)$, gdy przyrost $h = 2$. Narysuj tę sieczną.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

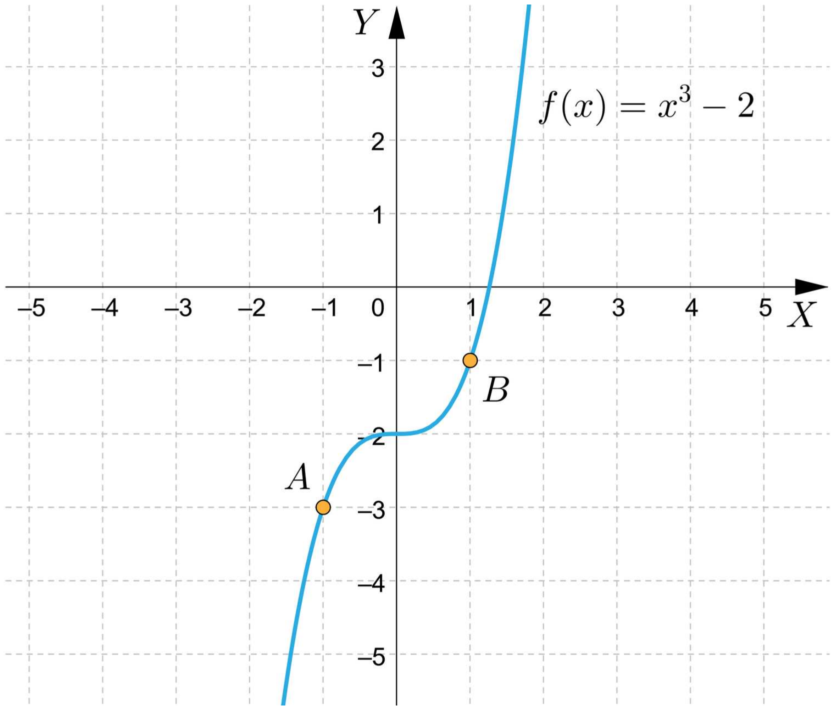
Ćwiczenie 1

Równanie siecznej do wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = -2x^2 + x - 1$, przechodzącej przez punkt o współrzędnych $(-2, -11)$ o przyroście $h = 2$ jest postaci:

- $y = -5x - 1$
- $y = 5x + 1$
- $y = 5x - 1$

Ćwiczenie 2

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = x^3 - 2$.



Zaznacz zdania, które są prawdziwe.

- [ ] Współczynnik kierunkowy siecznej do wykresu funkcji w punkcie A i przyroście $h = 1$ jest równy 2.
- [ ] Współczynnik kierunkowy siecznej do wykresu funkcji w punkcie B i przyroście $h = 3$ jest równy 21.
- [ ] Współczynnik kierunkowy siecznej do wykresu funkcji w punkcie B i przyroście $h = 2$ jest równy 7.
- [ ] Współczynnik kierunkowy siecznej do wykresu funkcji w punkcie A i przyroście $h = 3$ jest równy 3.

Ćwiczenie 3

Wstaw w tekst odpowiednie równania siecznych.

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = x^2 - 4$. Równania siecznych do wykresu funkcji f w punkcie o współrzędnych $(-2, 0)$ dla podanych wartości h wynoszą odpowiednio:

a) $h = 2$ ____,

b) $h = 3$ ____,

c) $h = 4$ ____.

$y = -x - 2$ | $y = 2x - 4$ | $y = -2x - 4$ | $y = x - 2$ | $y = 0$

Ćwiczenie 4

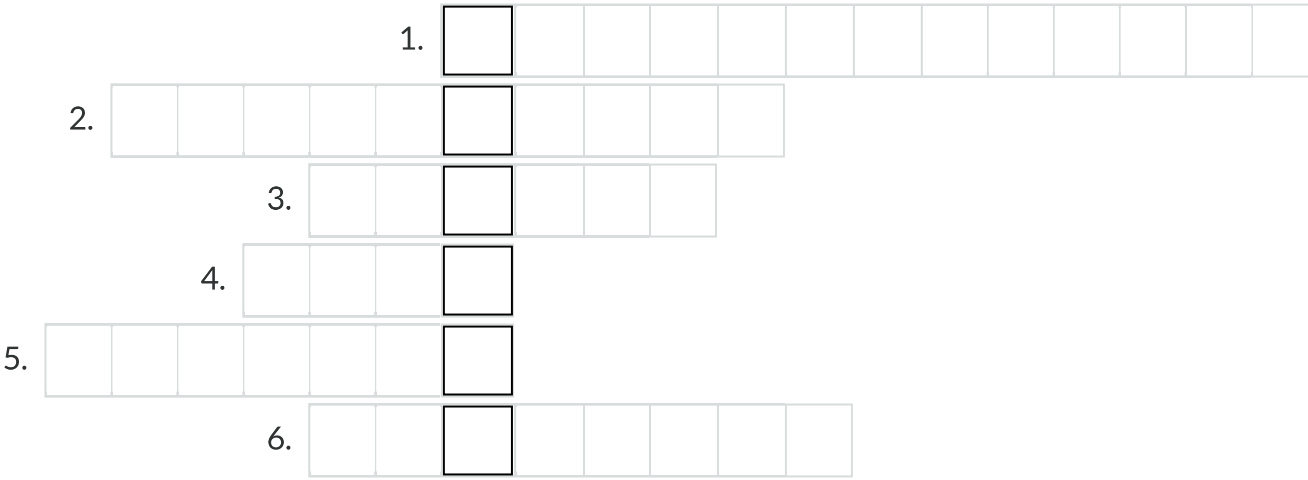
Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = x^4 - 1$. Połącz w pary współrzędne punktu, który należy do siecznej do wykresu tej funkcji, z wartością współczynnika kierunkowego tej siecznej, gdy $h = 2$.

$(0, -1)$	$a = -\frac{1}{2}$
$(-2, 0)$	$a = 8$
$(2, 0)$	$a = 0$
$(-1, 0)$	$a = \frac{255}{2}$

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Rozwiąż krzyżówkę.



1. Może być np. geometryczna ilorazu różnicowego funkcji.
2. Określa go współczynnik kierunkowy siecznej względem osi X.
3. Jest wykresem siecznej do wykresu funkcji.
4. Stosowany do obliczenia współczynnika kierunkowego siecznej.
5. Może być przedstawiona np. za pomocą wzoru lub wykresu.
6. Oznaczamy go literą h w ilorazie różnicowym funkcji.

Ćwiczenie 7

Wyznacz równanie siecznej do wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = 2x^3 - 2$ w punkcie o współrzędnych $A = (-1, -4)$, gdy przyrost $h = 3$.

Ćwiczenie 8

Wiadomo, że kąt nachylenia prostej do osi X ma miarę 45°. Prosta ta jest sieczną do wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = x^2 + 3$ w punkcie o współrzędnych $(-1, 4)$.

Wyznacz wartość przyrostu h ($h \neq 0$), dla której podana prosta jest sieczną do wykresu funkcji f.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Interpretacja geometryczna ilorazu różnicowego

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

3) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- podaje interpretację geometryczną ilorazu różnicowego funkcji;
- stosuje różne wzory na współczynnik kierunkowy siecznej do wykresu funkcji;
- wyznacza równania siecznych do wykresu funkcji w danym punkcie i o zadanym przyroście;
- stosuje geometryczną interpretację pojęcia ilorazu różnicowego do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- metoda krokodyla;
- liga zadaniowa;
- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego;
- praca w parach.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu dla uczniów;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wprowadza uczniów szczegółowo w temat lekcji „Interpretacja geometryczna ilorazu różnicowego” i jej cele. Może posłużyć się wyświetloną na tablicy zawartością sekcji „Wprowadzenie”.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszycie minimum dwa pytania. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Film samouczek”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie w kolejnym kroku rozwiązują ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z wynikami innej pary.

5. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8 z sekcji „Sprawdź się” metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Interpretacja geometryczna ilorazu różnicowego „).

Materiały pomocnicze:

- Sposoby opisywania funkcji

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Film samouczek” można potraktować jako zadanie domowe dotyczące analizy problemu w zakresie interpretacji geometrycznej ilorazu różnicowego funkcji.