



Funkcja liniowa - pojęcie

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Źródło: Kaitlin Muro, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W tym materiale poznasz pojęcie funkcji liniowej, wykorzystywanej bardzo często do określania i opisywania zjawisk z różnych dziedzin naszego życia.

Funkcja liniowa ma wiele zastosowań związanych z różnymi jej własnościami, w szczególności w geometrii i statystyce (w metodzie regresji liniowej, metodzie najmniejszych kwadratów, błędzie standardowym, czy szacowaniu wyników).

Bazując na wiedzy teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążesz ćwiczenia interaktywne.



Źródło: Jonathan Francisca, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Twoje cele

- Zdefiniujesz pojęcie funkcji liniowej.
- Obliczysz wartości funkcji liniowej dla podanych argumentów.

- Wyznaczysz wartości argumentów, dla których funkcja liniowa przyjmuje określoną wartość.

Przeczytaj

Przykładem funkcji, mającej istotne znaczenie zarówno w rozważaniach teoretycznych, jak i zastosowaniach praktycznych, jest funkcja liniowa.

Definicja: Funkcja liniowa

Funkcję określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot x + b, \text{ dla } x \in \mathbb{R},$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$ i $b \in \mathbb{R}$, nazywamy funkcją liniową.

Liczbę a nazywamy współczynnikiem kierunkowym, a liczbę b wyrazem wolnym.

Dziedziną funkcji liniowej jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Mając dany wzór **funkcji liniowej** możemy wyznaczać wartości tej funkcji dla podanych argumentów oraz argumenty, dla których funkcja przyjmuje określoną wartość.

Przykład 1

Funkcja f każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowuje jej dwukrotność pomniejszoną o 4.

Wyznamy:

- a) wzór tej funkcji,
- b) wartość funkcji dla argumentu $\frac{1}{3}$,
- c) argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość (-2) .

Rozwiązanie:

- a) Funkcja jest określona za pomocą wzoru $f(x) = 2x - 4$,
- b) $f\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \frac{1}{3} - 4$, zatem $f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{10}{3}$,
- c) $f(x) = -2$, zatem $-2 = 2x - 4$.

Wobec tego $x = 1$.

Przykład 2

Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = -\frac{1}{2}x + 4$.

Wyznamy:

- a) odpowiedni podzbiór zbioru wartości tej funkcji, jeżeli podzbiorem jej dziedziny jest zbiór $\langle -3, 2 \rangle$,
- b) odpowiedni podzbiór dziedziny tej funkcji, jeżeli podzbiorem zbioru wartości jest zbiór $\langle 3, 5 \rangle$.

Rozwiązanie:

a) Zauważmy, że wystarczy obliczyć wartości funkcji na końcach podanego przedziału (funkcja liniowa jest monotoniczna i różnowartościowa), zatem:

$$f(-3) = -\frac{1}{2} \cdot (-3) + 4 = \frac{11}{2},$$

$$f(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2 + 4 = 3.$$

Wobec tego podzbiorem zbioru wartości jest zbiór $\langle 3, \frac{11}{2} \rangle$.

b) Zauważmy, że wystarczy obliczyć argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości z końców podanego przedziału, zatem:

$$3 = -\frac{1}{2}x + 4, \text{ czyli } x = 2,$$

$$5 = -\frac{1}{2}x + 4, \text{ czyli } x = -2.$$

Dlatego też szukanym podzbiorem dziedziny tej funkcji jest zbiór $\langle -2, 2 \rangle$.

Przykład 3

Zapiszemy wzór funkcji liniowej $f(x) = ax + b$, jeżeli:

- a) $a = -2$ oraz wartość funkcji dla argumentu (-3) wynosi 4,
- b) $b = 2$ oraz wartość funkcji dla argumentu (-5) wynosi 1.

Rozwiązanie:

a) Wzór funkcji zapisujemy w postaci $f(x) = -2x + b$.

Ponieważ wartość funkcji dla argumentu (-3) wynosi 4, to do wyznaczenia wartości b rozwiązujemy równanie:

$$4 = (-2) \cdot (-3) + b, \text{ wobec tego } b = -2.$$

Funkcja wyraża się więc wzorem $f(x) = -2x - 2$.

b) Wzór funkcji zapisujemy w postaci $f(x) = ax + 2$.

Ponieważ wartość funkcji dla argumentu (-5) wynosi 1, to do wyznaczenia wartości a rozwiązujemy równanie:

$$1 = a \cdot (-5) + 2, \text{ wobec tego } a = \frac{1}{5}.$$

Zatem funkcja wyraża się wzorem $f(x) = \frac{1}{5}x + 2$.

Przykład 4

Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej liczbę do niej przeciwną, powiększoną o 2.

Wyznamy:

- a) wzór tej funkcji,
- b) argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ze zbioru $\{-3, -1, 3, 5\}$.

Rozwiązanie:

a) Funkcja wyraża się wzorem $f(x) = -x + 2$,

b) wyznaczamy wartości argumentów:

$$-3 = -x + 2, \text{ zatem } x = 5,$$

$$-1 = -x + 2, \text{ zatem } x = 3,$$

$$3 = -x + 2, \text{ zatem } x = -1,$$

$$5 = -x + 2, \text{ zatem } x = -3.$$

Ciekawostka

Funkcja liniowa znajduje zastosowanie m.in. w zamianie jednostek temperatury.

Przykład 5

Zależność pomiędzy temperaturą t_C mierzoną w stopniach Celsjusza ($^{\circ}\text{C}$) i temperaturą t_F mierzoną w stopniach Fahrenheita ($^{\circ}\text{F}$) wyraża wzór $t_C = \frac{5}{9} \cdot (t_F - 32)$.

Wyznamy:

- a) wartość temperatury wyrażonej w $^{\circ}\text{C}$, gdy temperatura wynosi 59°F ,
- b) wartość temperatury wyrażonej w $^{\circ}\text{F}$, gdy temperatura wynosi 5°C .

Rozwiązanie

a) $t_C = \frac{5}{9} \cdot (59 - 32) = \frac{5}{9} \cdot 27 = 15,$

b) $5 = \frac{5}{9} \cdot (t_F - 32).$

Równanie przekształcamy do postaci $45 = 5t_F - 160$, zatem $t_F = 41$.

Słownik

funkcja liniowa

funkcja określona wzorem

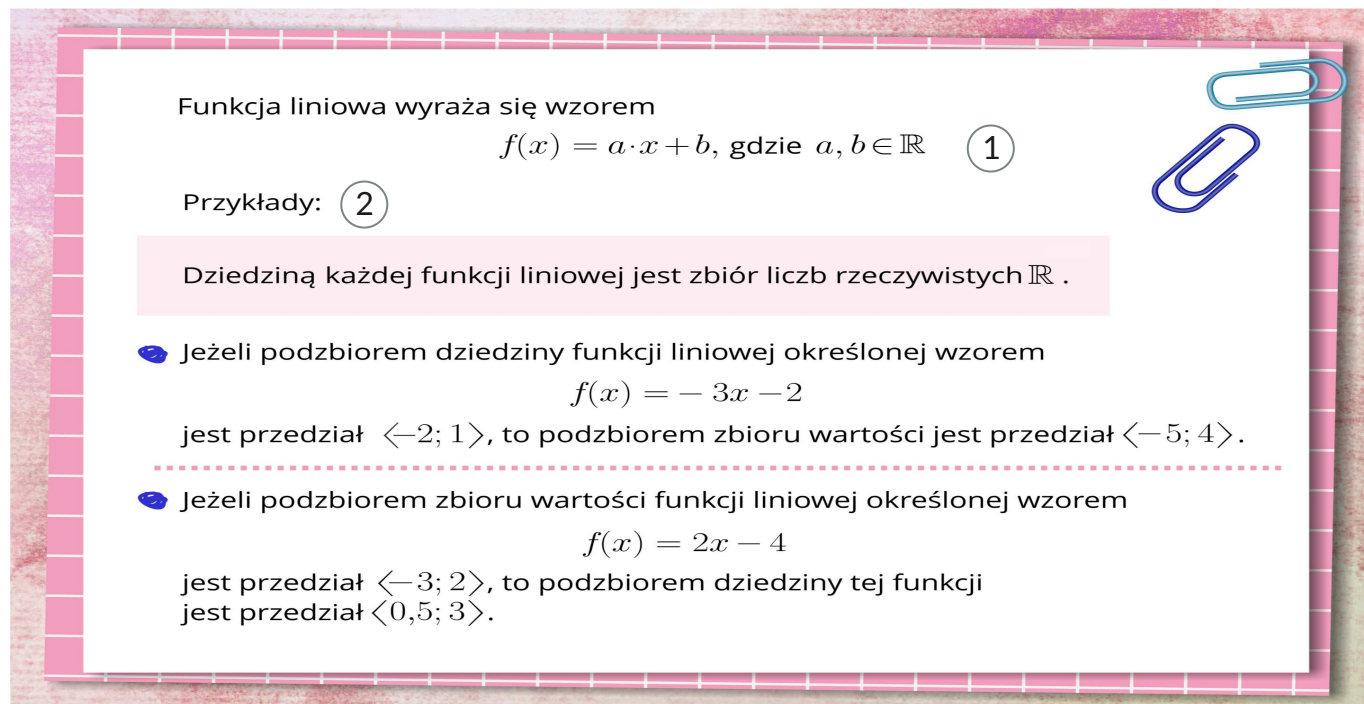
$$f(x) = a \cdot x + b$$

gdzie: $a, b, x \in \mathbb{R}$

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką, a następnie wykonaj poniższe polecenie.



Funkcja liniowa wyraża się wzorem

$$f(x) = a \cdot x + b, \text{ gdzie } a, b \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Przykłady: (2)

Dziedziną każdej funkcji liniowej jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Jeżeli podzbiorem dziedziny funkcji liniowej określonej wzorem

$$f(x) = -3x - 2$$

jest przedział $\langle -2; 1 \rangle$, to podzbiorem zbioru wartości jest przedział $\langle -5; 4 \rangle$.

Jeżeli podzbiorem zbioru wartości funkcji liniowej określonej wzorem

$$f(x) = 2x - 4$$

jest przedział $\langle -3; 2 \rangle$, to podzbiorem dziedziny tej funkcji jest przedział $\langle 0,5; 3 \rangle$.

1. {audio}Liczbę a nazywamy współczynnikiem kierunkowym, a liczbę b wyrazem wolnym.

2. {audio}Jeżeli $f(x) = 5x - 2$, to $a = 5$ i $b = -2$.

Jeżeli $f(x) = -3x + 4$, to $a = -3$ i $b = 4$.

Jeżeli $f(x) = -6$, to $a = 0$ i $b = -6$.

Jeżeli $f(x) = 2x$, to $a = 2$ i $b = 0$.

Polecenie 2

Zapisz wzór funkcji liniowej $f(x) = ax + b$, jeżeli:

a) $a = -3$ oraz wartość funkcji dla argumentu (-1) wynosi 2,

b) $b = 4$ oraz wartość funkcji dla argumentu (-2) wynosi 4.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Funkcja liniowa przyjmuje zawsze tylko wartości niedodatnie.

☐ Jeżeli $a = 0$, to funkcja liniowa określona wzorem $f(x) = ax + b$ ma jednoelementowy podzbiór zbioru wartości.

☐ Zbiorem wartości funkcji liniowej jest zawsze zbiór liczb rzeczywistych dodatnich.

☐ Dziedziną funkcji liniowej jest zbiór liczb rzeczywistych.

Ćwiczenie 2



Dana jest funkcja liniowa określona wzorem $f(x) = -x + 4$. Połącz w pary podzbiór dziedziny tej funkcji z odpowiadającym mu podzbiorem zbioru wartości:

$\langle 1, 3 \rangle$

$\langle 4, 6 \rangle$

$\langle -2, 0 \rangle$

$\langle 3, 1 \rangle$

$\langle -5, -2 \rangle$

$\langle 2, 7 \rangle$

$\langle -3, 2 \rangle$

$\langle 6, 9 \rangle$

Ćwiczenie 3



Funkcja liniowa jest określona za pomocą wzoru $f(x) = -3x + 5$.

Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz zdanie prawdziwe.

- ☐ Funkcja przyjmuje tylko wartości ujemne.
- ☐ Dla argumentu (-2) funkcja przyjmuje wartość 11.
- ☐ Funkcja przyjmuje wartość 3 dla argumentu (-3) .

Ćwiczenie 4



Wstaw w tekst odpowiednie liczby.

Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = -\frac{3}{4}x + 2$. Wówczas:

$$f(-2) = \boxed{}$$

$$f(0) = \boxed{}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{}$$

$$f(2) = \boxed{}$$

$$f(4) = \boxed{}$$

$\frac{13}{8}$ 0 -1 $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ 2 $\frac{7}{2}$

Ćwiczenie 5



Pogrupuj elementy, zgodnie z podanym opisem. Przeciągnij każdy element do odpowiedniej grupy.

Funkcja liniowa określona wzorem $f(x) = \frac{1}{3}x - 3$:

iloczyn współczynników a i b ze wzoru funkcji wynosi 1

wartość 0 przyjmuje dla argumentu (-4)

Funkcja liniowa określona wzorem $f(x) = -\frac{1}{2}x - 2$:

wartość 0 przyjmuje dla argumentu 9

iloczyn współczynników a i b ze wzoru funkcji wynosi (-1)

dla argumentu 3 przyjmuje wartość (-2)

dla argumentu 2 przyjmuje wartość (-3)

Ćwiczenie 6



Dana jest funkcja liniowa określona za pomocą wzoru $f(x) = -\frac{1}{5}x + 2$.
Wpisz odpowiednie liczby w puste pola, aby otrzymać zdania prawdziwe.

1. Funkcja przyjmuje wartość 3 dla argumentu .
2. Wartość funkcji dla argumentu 10 wynosi .
3. Największym całkowitym argumentem, dla którego funkcja przyjmuje wartość dodatnią, jest liczba .
4. Najmniejszym całkowitym argumentem, dla którego funkcja przyjmuje wartość ujemną, jest liczba .

Ćwiczenie 7



Uporządkuj wzory funkcji tak, aby wartości tych funkcji dla argumentu (-2) były ułożone rosnąco. Złap element i przesun go w górę lub w dół.

$$f(x) = -3x + 1$$



$$f(x) = -x + 1$$



$$f(x) = 2x - 3$$



$$f(x) = \frac{1}{4}x - 2$$



Ćwiczenie 8



Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej jej czwartą część pomniejszoną o 2;

a) wyznacz wzór tej funkcji,

b) oblicz wartości tej funkcji dla argumentów ze zbioru $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Funkcja liniowa - pojęcie

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje pojęcie funkcji liniowej;
- oblicza wartości funkcji liniowej dla podanych argumentów;
- wyznacza wartości argumentów, dla których funkcja liniowa przyjmuje określoną wartość;
- wykorzystuje poznaną wiedzę do rozwiązywania zadań.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów;
- dyskusja;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przedstawienie uczniom tematu: „Funkcja liniowa – pojęcie” oraz celów lekcji, a następnie określenie kryteriów sukcesu.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do wspomnianego tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w 3-osobowych grupach zapoznają się z informacjami zawartymi w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie zapoznają się z zawartością sekcji „Infografika”. Po czym następuje omówienie ewentualnych problemów związanych z jego niezrozumieniem.
3. Uczniowie rozwiązują indywidualnie ćwiczenia nr 1-2 w sekcji „Sprawdź się”, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum klasy – krok po kroku.
4. Kolejny etap to liga zadaniowa – uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie przedstawiają rozwiązania przed całą klasą.
5. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia numer 6, 7 i 8; po wykonaniu każdego z nich następuje omówienie rozwiązania przez nauczyciela.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Definicja funkcji liniowej.](#)

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać materiał w sekcji „Infografika” do wprowadzenia pojęcia funkcji liniowej lub do samodzielnej pracy uczniów przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z materiałem w tej sekcji i przygotowują do pracy na zajęciach, aby samodzielnie rozwiązywać zadania.
- Infografika może być pomocna przy omawianiu własności funkcji liniowej.