



Podzielność w zbiorze liczb naturalnych – dzielenie z resztą i bez reszty

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Podzielność w zbiorze liczb naturalnych – dzielenie z resztą i bez reszty

Źródło: White Rainforest, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W tej lekcji zajmiemy się podzielnością w zbiorze liczb naturalnych. Pojęcie to jest podstawą dziedziny matematyki zwanej jej królową – teorii liczb. Z pojęciem podzielności związanych jest wiele innych terminów matematycznych takich jak dzielnik, wielokrotność, liczby pierwsze, liczby złożone, liczby względnie pierwsze, liczby doskonałe ...

Część z nich omówimy w tej lekcji.

Twoje cele

- Podzielisz z resztą liczbę naturalną przez liczbę naturalną.
- Podzielisz bez reszty liczbę naturalną przez liczbę naturalną.
- Zapiszesz wyrażenie algebraiczne oznaczające dowolną liczbę o podanych własnościach.
- Udowodnisz własności liczb naturalnych związanych z podzielnością.

Przeczytaj

Zacznijmy od definicji podzielności:

Definicja: Podzielność

Mówimy, że liczba naturalna n różna od zera dzieli liczbę naturalną m , jeśli istnieje liczba naturalna k , dla której zachodzi równość $m = n \cdot k$. Mówimy również, że n jest **dzielnikiem** liczby m lub że liczba m jest podzielna przez liczbę n . Ponadto jeśli liczby m i n są różne oraz n jest dzielnikiem m , to n nazywamy **dzielnikiem właściwym** liczby m . Liczbę k nazywamy ilorazem liczby m przez liczbę n .

Fakt, że liczba naturalna n dzieli liczbę naturalną m , możemy zapisać symbolicznie $n|m$. Na oznaczenie faktu, że liczba n **nie dzieli** liczby m używamy symbolu przekreślonej pionowej kreski: $n \not| m$.

Zwróć uwagę, że słowo *dzielnik* ma dwa znaczenia. Dzielnik może oznaczać liczbę przez którą dzielimy. Wtedy może to być dowolna liczba rzeczywista różna od zera. **Dzielnik** liczby naturalnej a oznacza liczbę naturalną, która dzieli liczbę a bez reszty.

Czasami, zwłaszcza, gdy chcemy coś udowodnić, przydaje się algebraiczny zapis (równość) oznaczający podzielność. W poniższej w tabeli podamy kilka przykładowych zdań dotyczących podzielności i ich "tłumaczenia" na język algebry. Przy okazji przypomnijmy, że napis $x \in A$ oznacza, że liczba x należy do zbioru A (x – jest elementem zbioru A).

Przykład 1

Zapiszemy symbolicznie i algebraicznie informacje o liczbie x .

Zdanie	Zapis symboliczny lub algebraiczny
--------	------------------------------------

Zdanie	Zapis symboliczny lub algebraiczny
Liczba x jest parzysta i dodatnia.	1) $2 x, x \in \mathbb{N}$ 2) $x = 2k$, dla pewnej liczby naturalnej k 3) Istnieje liczba naturalna n , dla której $x = 2n$. 4) $x = 2m$, gdzie $m \in \mathbb{N}$
3 jest dzielnikiem liczby naturalnej x .	1) $3 x, x \in \mathbb{N}$ 2) $x = 3n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$
Liczba naturalna x jest podzielna przez 5.	1) $5 x, x \in \mathbb{N}$ 2) $x = 5n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$

Przykład 2

Zauważmy, że:

$$2|6, \text{ bo } 6 = 2 \cdot 3,$$

$$3|15, \text{ bo } 15 = 3 \cdot 5,$$

$3 \nmid 16$, bo $3 \cdot 5 = 15$ i $3 \cdot 6 = 18$, zatem nie istnieje liczba naturalna k , dla której $3 \cdot k = 16$.

Przykład 3

Udowodnimy, że suma liczb naturalnych podzielnych przez liczbę naturalną k również dzieli się przez k .

Rozważymy sumę dwóch liczb podzielnych przez k , ale twierdzenie pozostaje prawdziwe dla dowolnej liczby składników.

Niech liczby naturalne x i y będą podzielne przez liczbę k . Wówczas każdą z nich można zapisać w postaci $x = k \cdot a$, $y = k \cdot b$ dla pewnych liczb naturalnych a i b . Sumę liczb x i y możemy zapisać w postaci $x + y = k \cdot a + k \cdot b = k \cdot (a + b)$.

Ponieważ a i b są liczbami naturalnymi, więc liczba $a + b$ również jest naturalna, co oznacza, że liczba $x + y$ jest podzielna przez k .

Ważne!

Jeśli liczba n nie dzieli liczby m , to możemy zdefiniować tzw. **iloraz całkowity** i **resztę z dzielenia**.

Przypomnijmy na kilku przykładach, na czym polega dzielenie z resztą.

Przykład 4

Liczba 30 z dzielenia przez 7 daje iloraz całkowity równy 4 (bo liczba 7 mieści się w liczbie 30 dokładnie 4 razy) i resztę 2.

Możemy zapisać równość $30 = 4 \cdot 7 + 2$.

Liczba 5 z dzielenia przez 8 daje iloraz całkowity równy 0 (bo liczba 8 mieści się w liczbie 5 dokładnie 0 razy) i resztę 5.

Możemy zapisać równość $5 = 0 \cdot 8 + 5$.

Liczba 46 z dzielenia przez 10 daje iloraz całkowity równy 4 (bo liczba 10 mieści się w liczbie 46 dokładnie 4 razy) i resztę 6.

Możemy zapisać równość $46 = 10 \cdot 4 + 6$.

Dzieląc liczbę naturalną m przez liczbę naturalną n definiujemy **iloraz całkowity** jako liczbę określającą, ile razy liczba n “mieści się” w liczbie m , czyli ile pełnych dzielników “mieści się” w dzielnej. **Reszta z dzielenia** to liczba, którą należy dodać do iloczynu dzielnika i ilorazu całkowitego, aby otrzymać dzielną.

Jeżeli dzieląc liczbę naturalną m przez liczbę naturalną n otrzymujemy iloraz całkowity q i resztę r , to zachodzi równość $m = nq + r$.

Zauważmy, że r jest jedną z liczb ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, \dots, n - 1\}$.

Innymi słowy reszta z dzielenia przez n jest liczbą naturalną mniejszą od n .

Jeśli n jest dzielnikiem liczby m , to przyjmujemy, że [reszta z dzielenia](#) m przez n jest równa zero.

Przykład 5

Zapiszemy algebraicznie informacje o liczbie x .

Informacja o liczbie x	Zapis algebraiczny liczby x
Liczba naturalna x jest nieparzysta.	$x = 2k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{N}$
Liczba naturalna x z dzielenia przez 3 daje resztę równą 1.	$x = 3k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{N}$
Liczba naturalna x z dzielenia przez 3 daje resztę równą 2.	$x = 3k + 2$, gdzie $k \in \mathbb{N}$
Liczba naturalna x z dzielenia przez 4 daje resztę równą 3.	$x = 4k + 3$, gdzie $k \in \mathbb{N}$
Liczba naturalna x z dzielenia przez 6 daje resztę równą 4.	$x = 6k + 4$, gdzie $k \in \mathbb{N}$

Rozważmy jedną równość: $x = 6k - 2$, gdzie $k \in \mathbb{N}_+$.

Wykonajmy przekształcenie $x = 6k - 2 = 6k - 6 + 4 = 6 \cdot (k - 1) + 4$.

Ponieważ k jest liczbą naturalną dodatnią, więc $k - 1$ jest liczbą naturalną.

Oznacza to, że liczba x z dzielenia przez 6 daje resztę 4.

Zatem powyższą tabelę możemy uzupełnić o inne sposoby zapisania tej samej informacji o liczbie x .

Przykład 6

Zapiszemy algebraicznie informacje o liczbie x .

Informacja o liczbie x	Zapis algebraiczny liczby x
Liczba naturalna x jest nieparzysta.	$x = 2k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{N}$ $x = 2k - 1$, gdzie $k \in \mathbb{N}_+$
Liczba naturalna x z dzielenia przez 3 daje resztę równą 1.	$x = 3k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{N}$ $x = 3k - 2$, gdzie $k \in \mathbb{N}_+$
Liczba naturalna x z dzielenia przez 3 daje resztę równą 2.	$x = 3k + 2$, gdzie $k \in \mathbb{N}$ $x = 3k - 1$, gdzie $k \in \mathbb{N}_+$
Liczba naturalna x z dzielenia przez 4 daje resztę równą 3.	$x = 4k + 3$, gdzie $k \in \mathbb{N}$ $x = 4k - 1$, gdzie $k \in \mathbb{N}_+$
Liczba naturalna x z dzielenia przez 6 daje resztę równą 4.	$x = 6k + 4$, gdzie $k \in \mathbb{N}$ $x = 6k - 2$, gdzie $k \in \mathbb{N}_+$

Przykład 7

Rozważmy równość $x = 7m + 10$, gdzie $m \in \mathbb{N}$.

Zauważmy, że $x = 7m + 10 = 7m + 7 + 3 = 7 \cdot (m + 1) + 3$.

Ponieważ $m \in \mathbb{N}$, więc również $(m + 1) \in \mathbb{N}$, co oznacza, że liczba x z dzielenia przez 7 daje resztę 3.

Słownik

iloraz

wynik dzielenia

dzielna

liczba a w dzieleniu $a : b$

dzielnik

- 1) liczba b w dzieleniu $a : b$; dzielnik nie może być równy zeru
- 2) dzielnik liczby naturalnej a to każda liczba naturalna, która dzieli liczbę a

iloraz całkowity

liczba naturalna mówiąca, ile maksymalnie razy dzielnik mieści się w dzielnej

reszta z dzielenia

liczba naturalna, którą należy dodać do iloczynu dzielnika i ilorazu całkowitego, aby otrzymać dzielną (równoważnie: najmniejsza liczba naturalna, która należy odjąć od dzielnej, aby otrzymać liczbę podzielną przez dzielnik)

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj informacje zawarte w animacji. Na ich podstawie wykonaj polecenie.

Trwa wczytywanie danych..

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DOF6NBUgf>

Film dotyczący podzielności liczb naturalnych.

Polecenie 2

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Rozwiąż test. W każdym pytaniu możliwa jest poprawna odpowiedź.

Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8

Udowodnij, że suma trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3.



Ćwiczenie 9

Udowodnij, że suma pięciu kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 5.



Ćwiczenie 10



Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Podzielność w zbiorze liczb naturalnych – dzielenie z resztą i bez reszty

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:

2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż: a) dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych, b) dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

- Podzielisz z resztą liczbę naturalną przez liczbę naturalną.
- Podzielisz bez reszty liczbę naturalną przez liczbę naturalną.
- Zapiszesz wyrażenie algebraiczne oznaczające dowolną liczbę o podanych własnościach.
- Udowodnisz własności liczb naturalnych związanych z podzielnością.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- ekspozycja;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi o przygotowanie w parach pytań związanych z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel czyta polecenie nr 1 w sekcji „Animacja” - „Przeanalizuj informacje zawarte w animacji. Na ich podstawie wykonaj polecenie.” - prosi uczniów, aby zapoznali się z materiałem. Uczniowie zapisują ewentualne wątpliwości i niezrozumiałe aspekty, które zostały w nim przedstawione - nauczyciel tłumaczy je na forum klasy.
2. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 1-2, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum krok po kroku.
3. Kolejny etap to liga zadaniowa - uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają je na forum.
4. Uczniowie realizują indywidualnie ćwiczenia 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania zastosowane przez uczniów.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Cechy podzielności liczb](#)
- [Liczby pierwsze i liczby złożone](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Podzielność w zbiorze liczb naturalnych – dzielenie z resztą i bez reszty”.