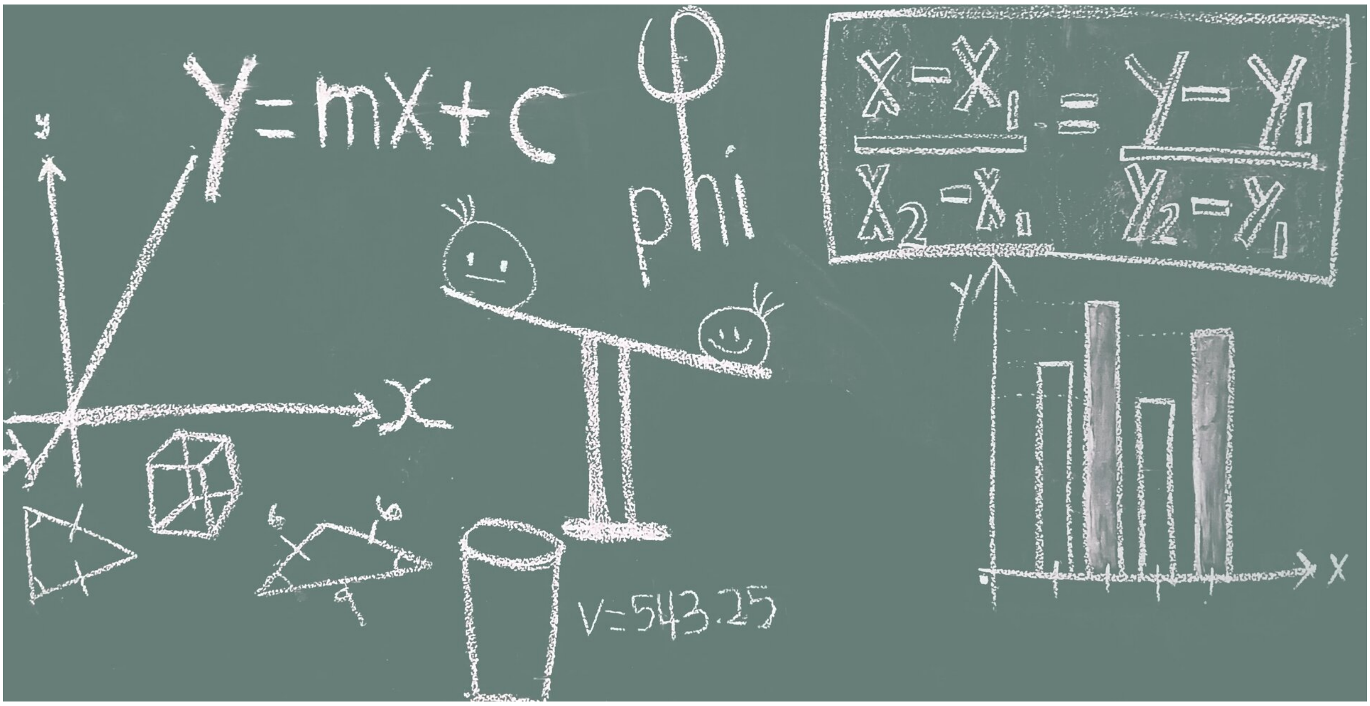
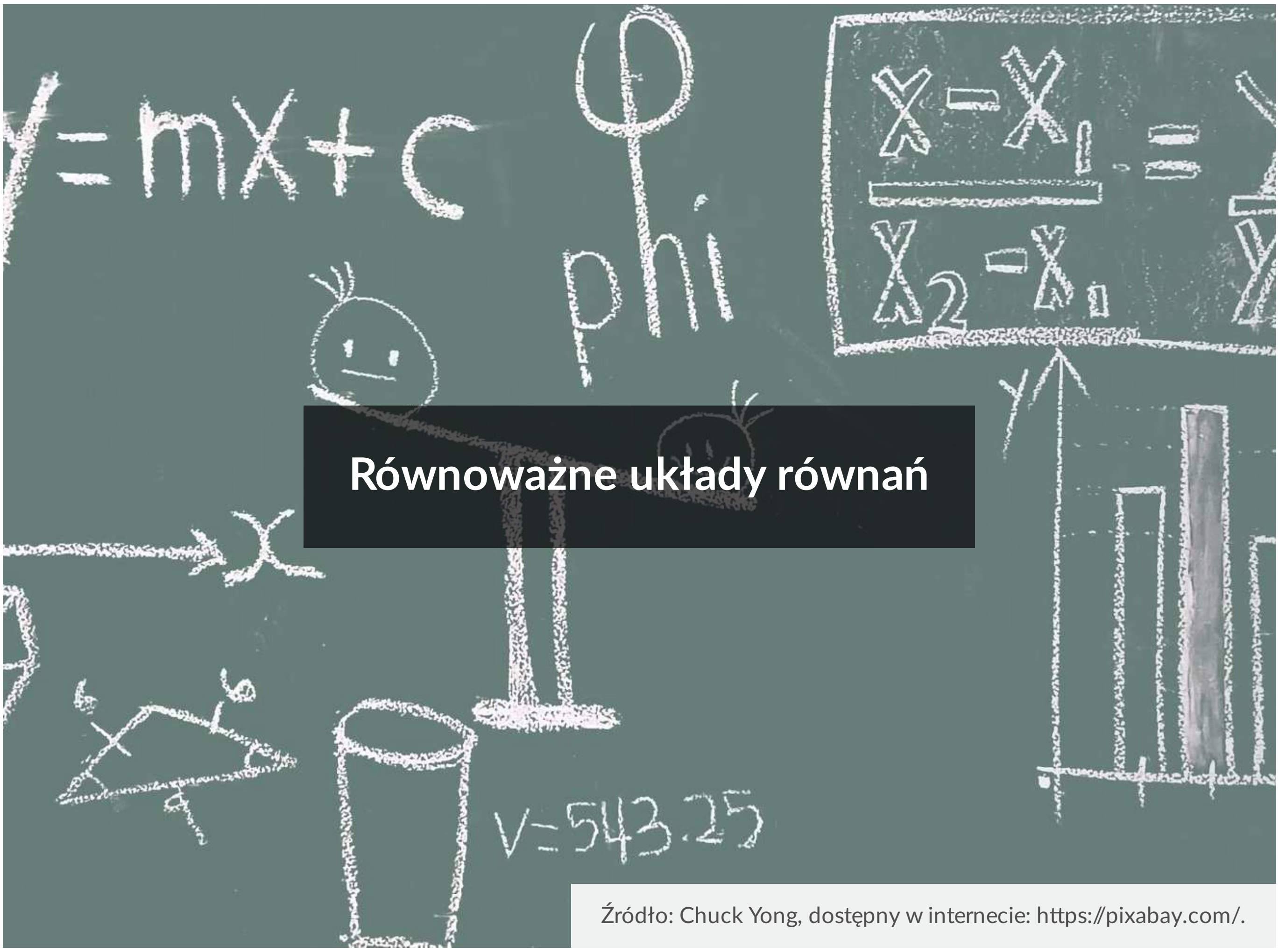


Równoważne układy równań

Równoważne układy równań



Źródło: Chuck Yong, dostępny w internecie: https://pixabay.com/.

Układy równań liniowych możemy rozwiązywać korzystając z ich interpretacji geometrycznych. Takie rozwiązanie nie zawsze jest jednak dokładne, czasem nie możemy na przykład odczytać z rysunku w sposób jednoznaczny pary liczb tworzących rozwiązanie układu.

Dlatego, przy szukaniu rozwiązań układów równań, często korzystamy z jednej z algebraicznych metod ich rozwiązywania.

Większość metod algebraicznych opiera się na pojęciu układów równoważnych i temu właśnie tematowi poświęcony jest ten materiał.

Twoje cele

- Sformułujesz definicję układu równań równoważnych.
- Sprawdzisz, czy układy równań są równoważne.
- Utworzysz taki układ równań, aby był równoważny danemu.

Przeczytaj

Definicja: Układ równań

Układem równań nazywamy koniunkcję co najmniej dwóch równań.

Aby rozwiązać układ równań należy znaleźć wszystkie układy liczb spełniające wszystkie równania składowe danego układu równań lub wykazać, że układ nie ma rozwiązania.

Definicja: Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Układem równań liniowych z dwiema niewiadomymi nazywamy koniunkcję dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Układ taki przyjmuje postać:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

gdzie:
x oraz y – oznaczają niewiadome,
a_1, a_2, b_1 oraz b_2 – współczynniki przy niewiadomych odpowiednio x oraz y, przy czym przynajmniej jedna liczba z pary liczb a_1 i a_2 oraz b_1 i b_2 jest różna od zera,
c_1 i c_1 – nazywamy wyrazami wolnymi.

Definicja: Rozwiązanie układu równań

Rozwiązaniem takiego układu równań jest każda para liczb spełniających jednocześnie każde równanie danego układu równań.

Przy czym taki układ równań może mieć jedno rozwiązanie, nieskończenie wiele rozwiązań lub nie mieć rozwiązania.

Przykład 1

Rozwiążemy graficznie układy równań:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \text{oraz} \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases}$$

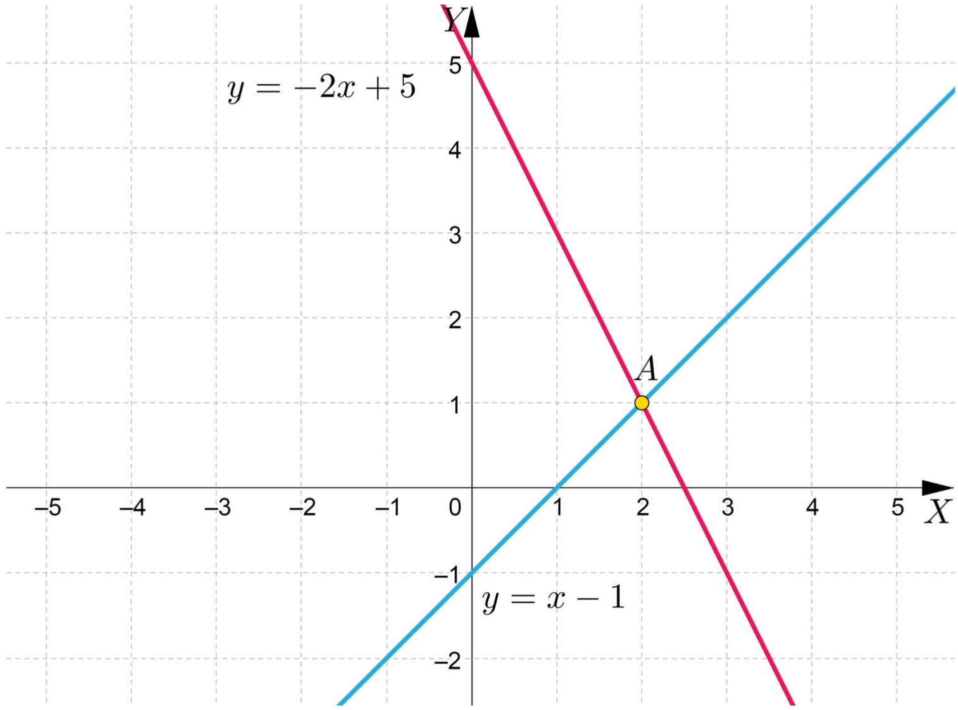
Dla każdego z układów równań, rysujemy wykresy każdego równania w układzie współrzędnych, a następnie odczytujemy rozwiązanie.

Pierwszy układ równań:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$2x + y = 5$ i $x - y = 1$

$y = -2x + 5$ i $y = x - 1$



Rozwiązaniem układu równań jest para liczb

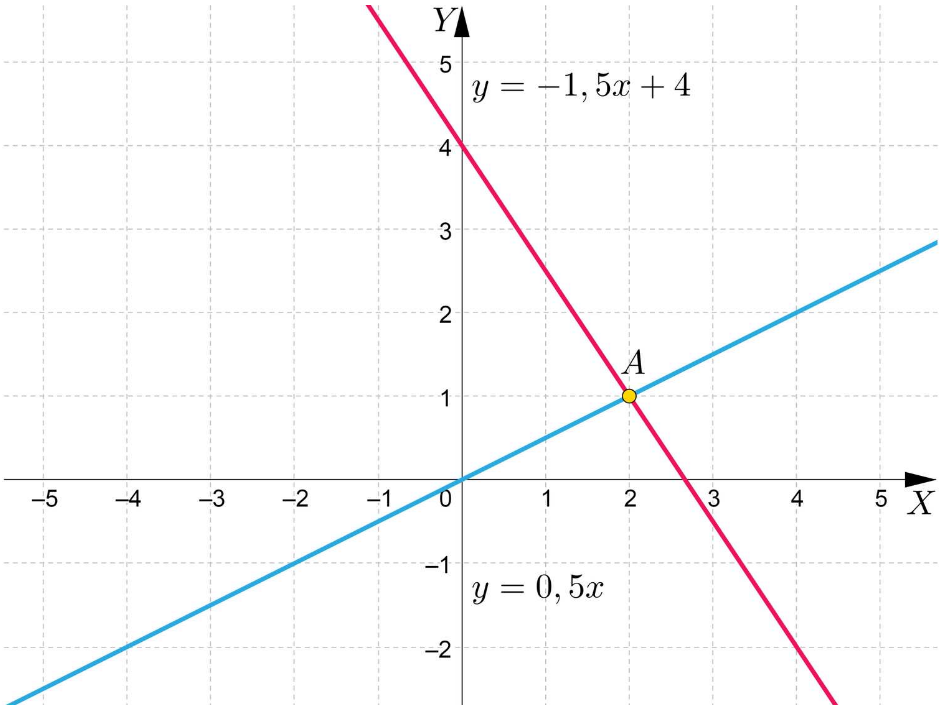
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Drugi układ równań:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases}$$

$3x + 2y = 8$ i $-2x + 4y = 0$

$y = -1,5x + 4$ i $y = 0,5x$



Rozwiązaniem układu równań jest para liczb

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Para liczb $(2, 1)$ jest jedynym rozwiązaniem każdego z tych układów równań. Takie układy równań nazywamy układami równoważnymi.

Definicja: Równoważne układy równań

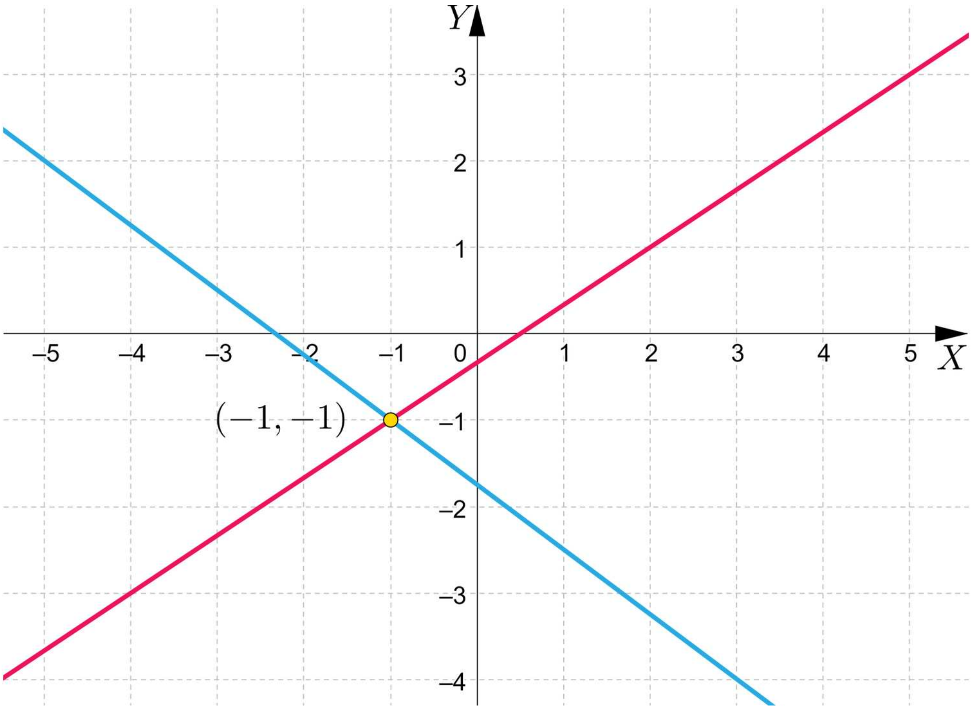
Dwa układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi nazywamy równoważnymi, gdy mają ten sam zbiór rozwiązań.

Zauważmy, że takie układy równań mają takie same niewiadome i takie same dziedziny.

Przykład 2

Sprawdzimy, czy układ, którego ilustracja geometryczna jest przedstawiona na rysunku jest równoważny układowi

$$\begin{cases} (x-2)(y+3) = (x+4)(y-1) \\ (y-4)^2 = y^2 - 12x + 12 \end{cases}.$$



Z wykresu możemy odczytać rozwiązanie przedstawionego na nim układu – $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$.

Wystarczy teraz sprawdzić, czy ta para liczb spełnia układ równań

$$\begin{cases} (x-2)(y+3) = (x+4)(y-1) \\ (y-4)^2 = y^2 - 12x + 12 \end{cases}.$$

Obliczmy wartości liczbowe lewych i prawych stron równań składowych, powstałe po podstawieniu $x = -1$ i $y = -1$.

$L_1 = (x-2)(y+3) = -3 \cdot 2 = -6$

$P_1 = (x+4)(y-1) = 3 \cdot (-2) = -6 \Rightarrow L_1 = P_1$

$L_2 = (y-4)^2 = (-1-4)^2 = 25$

$P_2 = y^2 - 12x + 12 = (-1)^2 - 12 \cdot (-1) + 12 = 25 \Rightarrow L_2 = P_2$

Zatem para liczb $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$ jest również jedynym rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} (x-2)(y+3) = (x+4)(y-1) \\ (y-4)^2 = y^2 - 12x + 12 \end{cases}$, a więc układy te są równoważne.

Przykład 3

Dany jest układ równań

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} - \frac{5x+y}{5} = 3 \\ 3 \cdot (x+y) + 2 \cdot (3-y) = 2 \end{cases}.$$

Utwórzmy układ do niego równoważny.

Doprowadzamy równania składowe do najprostszej postaci.

$\frac{x+y}{2} - \frac{5x+y}{5} = 3 \,\Big|\, \cdot 10$ i $3 \cdot (x+y) + 2 \cdot (3-y) = 2$

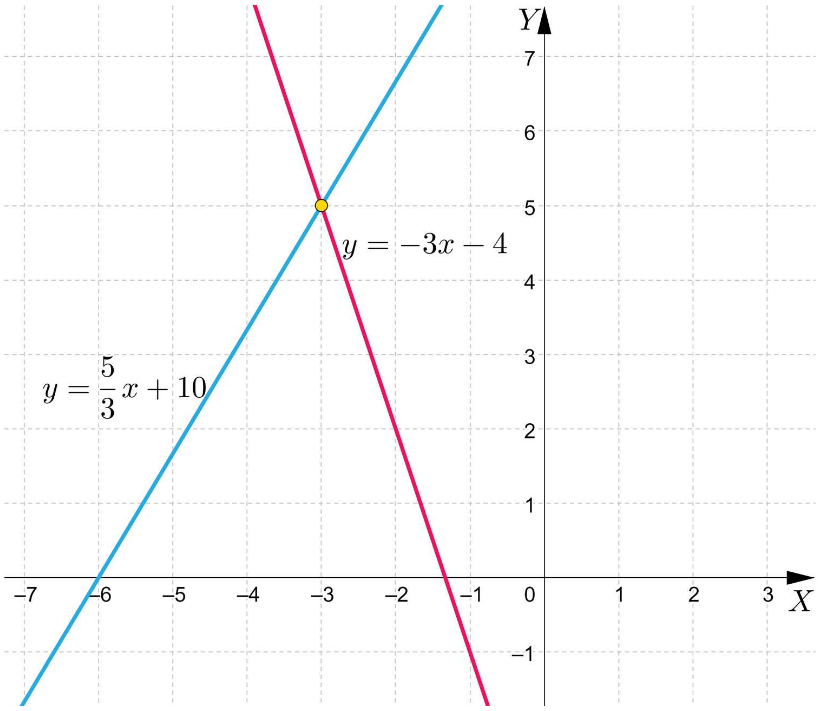
$5 \cdot (x+y) - 2 \cdot (5x+y) = 30$ i $3x + 3y + 6 - 2y = 2$

$5x + 5y - 10x - 2y = 30$ i $y = -3x - 4$

$3y = 5x + 30 \mid : 3$

$y = \frac{5}{3}x + 10$

Możemy teraz narysować wykresy tych równań i odczytać rozwiązanie układu.



Wykresy przecinają się w punkcie o współrzędnych $(-3, 5)$, a zatem jedynym rozwiązaniem układu równań jest para liczb $\begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \end{cases}$.

Możemy też obliczyć jakie liczby spełniają układ, porównując np. wyznaczone z obu równań wartości y.

Otrzymaliśmy $y = \frac{5}{3}x + 10$ oraz $y = -3x - 4$, a zatem:

$\frac{5}{3}x + 10 = -3x - 4$

$\frac{14}{3}x = -14 \,\Big|\, : \frac{14}{3}$

$x = -3$

Stąd $y = -3x - 4 = -3 \cdot (-3) - 4 = 5$

I ostatecznie $\begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \end{cases}$.

Aby utworzyć układ równoważny, wystarczy zdefiniować dowolną zależność między x oraz y prawdziwą dla obliczonych wartości, np.:

- $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = -8 \end{cases}$, ponieważ $\begin{cases} x + y = -3 + 5 = 2 \\ x - y = -3 - 5 = -8 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ -5x + 2y = 25 \end{cases}$, ponieważ $\begin{cases} 2x + y = 2 \cdot (-3) + 5 = -1 \\ -5x + 2y = -5 \cdot (-3) + 2 \cdot 5 = 25 \end{cases}$

Przykład 4

Znajdziemy wartości parametrów m oraz n, takie aby podane układy równań były równoważne.

$\begin{cases} 5 - \frac{x-2y}{5} = 4 \\ \frac{x+y}{2} + 3 = 4 \end{cases}$ oraz $\begin{cases} m^2 x - y = 10 \\ -3x - (2n+1)y = 5 \end{cases}$

Doprowadzamy równania składowe do najprostszej postaci, a następnie wyznaczamy parę liczb, która jest rozwiązaniem układu równań.

$5 - \frac{x-2y}{5} = 4 \,\Big|\, \cdot 5$ i $\frac{x+y}{2} + 3 = 4 \,\Big|\, \cdot 2$

$25 - (x - 2y) = 20$ i $x + y + 6 = 8$

$25 - x + 2y = 20$ i $y = -x + 2$

$2y = x - 5$

$y = 0,5x - 2,5$

Obliczamy:

$0,5x - 2,5 = -x + 2$

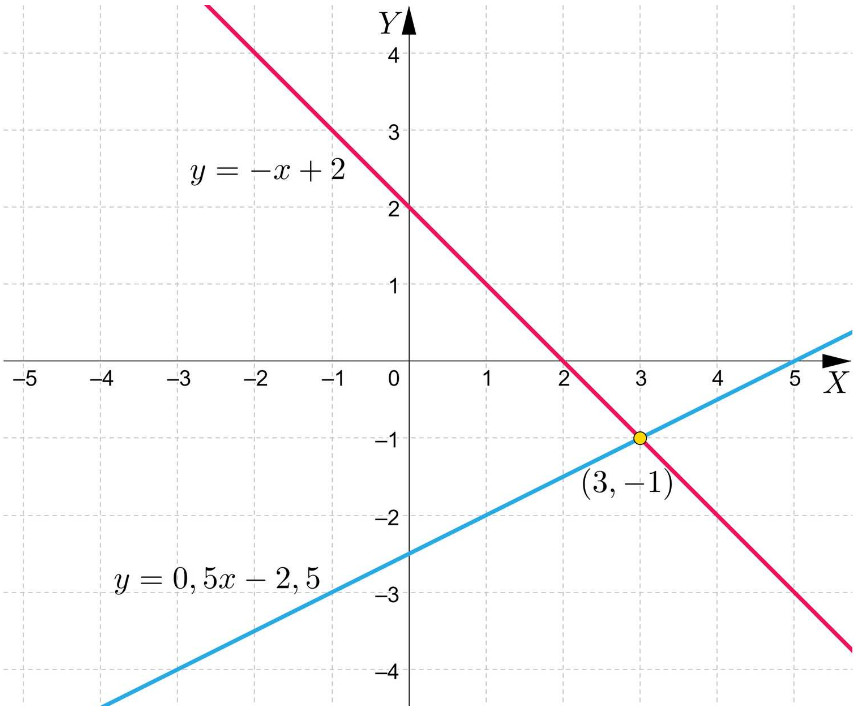
$1,5x = 4,5 \mid : 1,5$

$x = 3$

$y = -x + 2 = -3 + 2 = -1$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Możemy też odczytać rozwiązanie z wykresu:



Podstawiamy teraz otrzymane wartości x oraz y do równań drugiego układu.

$m^2 x - y = 10$ i $-3x - (2n + 1)y = 5$

$m^2 \cdot 3 - (-1) = 10$ i $(-3) \cdot 3 - (2n + 1) \cdot (-1) = 5$

$3m^2 = 9 \mid : 3$ i $(-9) + 2n + 1 = 5$

$m^2 = 3$ i $2n = 13 \mid : 2$

$m = -\sqrt{3} \vee m = \sqrt{3}$ i $n = 6,5$

A zatem układy równań są równoważne dla $\begin{cases} m = -\sqrt{3} \\ n = 6,5 \end{cases}$ lub dla $\begin{cases} m = \sqrt{3} \\ n = 6,5 \end{cases}$.

Słownik

układ równań

koniunkcja co najmniej dwóch równań

równoważne układy równań

układy równań, które mają ten sam zbiór rozwiązań

Infografika

Polecenie 1

Przeanalizuj infografikę, a następnie wykonaj polecenie 2.

Polecenie 2

Dobierz w pary równoważne układy równań. Podaj ich rozwiązania.

A. $\begin{cases} 7x + y = 2,5 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} -3x + 7,5y = 18 \\ -4x = 6 - y \end{cases}$

C. $\begin{cases} x + 0,25y = -0,5 \\ 2 \cdot (x + y) - \frac{1}{2} \cdot (2x - y) = 4 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 4x + y = 1 \\ 4y = 10 - 28x \end{cases}$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

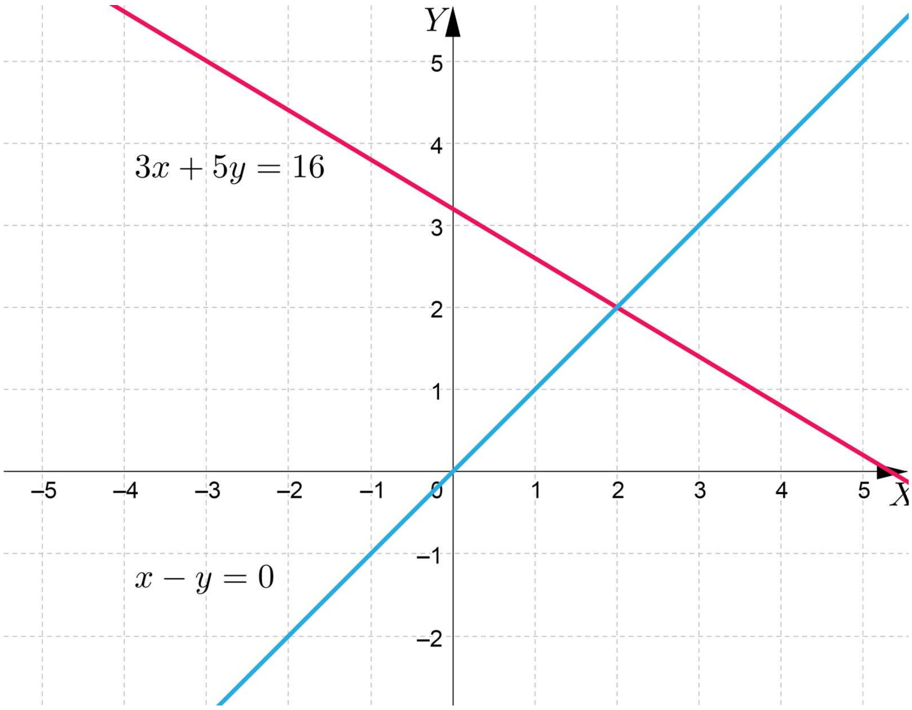
Ćwiczenie 1

Wśród poniższych układów równań wskaż równoważne układy równań. Zaznacz poprawne odpowiedzi.

- [ ] $\begin{cases} 3x - 1 = 5 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} 2x - y = 9 \\ x + y = 6 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} x - y = 4 \\ x = 6 - y \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} 2x + 2y = 12 \\ y = -x + 1 \end{cases}$

Ćwiczenie 2

Określ, które z poniższych układów równań są równoważne układowi, którego interpretację geometryczną przedstawia rysunek. Zaznacz poprawne odpowiedzi.



- [ ] $\begin{cases} 6x - 10y = 8 \\ x + y = 4 \end{cases}$

- [ ] $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -x - 5y = 11 \end{cases}$

- [ ] $\begin{cases} y = -x + 4 \\ 2,5x = 7 - y \end{cases}$

- [ ] $\begin{cases} -2x + 4y = 4 \end{cases}$

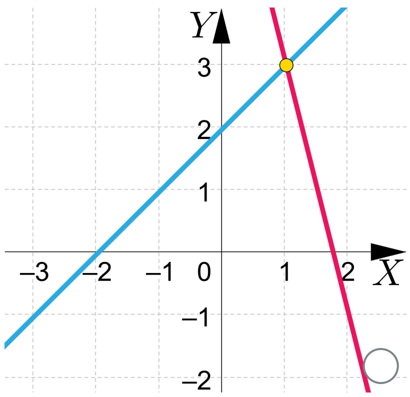
Ćwiczenie 3

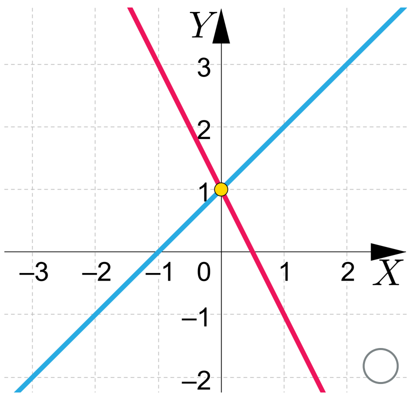
Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

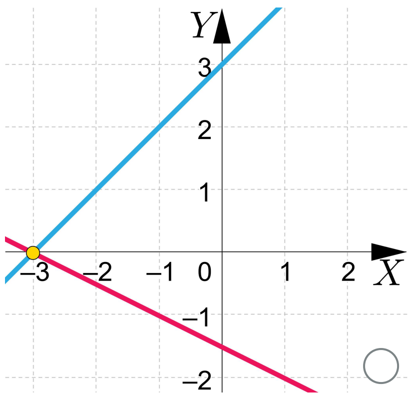
- [ ] W układach równoważnych wszystkie równania muszą być równoważne.
- [ ] Dwa układy równań są równoważne, jeśli każde rozwiązanie jednego układu jest rozwiązaniem drugiego.
- [ ] Układ równoważny danemu możemy utworzyć mnożąc jedno z równań układu przez pewną liczbę różną od zera.

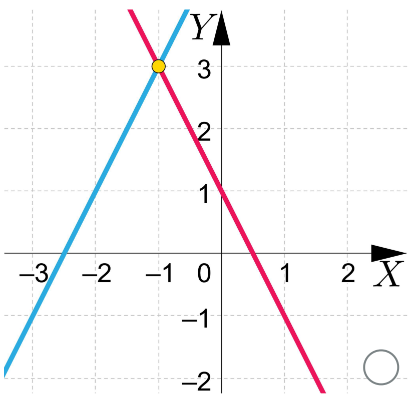
Ćwiczenie 4

Zaznacz interpretację geometryczną układu równań równoważnego układowi równań $\begin{cases} (x-1)^2 - 3y = x^2 - 2y \\ \frac{x-3y}{2} - 2 \cdot (x - y) = 3 \end{cases}$.









Ćwiczenie 5

Który z poniższych układów równań jest równoważny układowi $\begin{cases} 7x+2y=-5 \\ -0,5x+8,5y=9 \end{cases}$?

Zaznacz poprawną odpowiedź.

- $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=-2 \end{cases}$
- $\begin{cases} x+y=-2 \\ x-y=0 \end{cases}$
- $\begin{cases} x+y=16 \\ x-y=-3,5 \end{cases}$
- $\begin{cases} x+y=-2,5 \\ x-y=16 \end{cases}$

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ustal, dla jakich wartości parametru m i n, układ równań

$$\begin{cases} -x+y=-4+n \\ (m+1)x+5y=8 \end{cases}$$

jest równoważny do układu równań $\begin{cases} x+y=8 \\ x-y=6 \end{cases}$.

Ćwiczenie 8

Jakie liczby należy wstawić w miejsce a oraz b, aby dane układy równań były równoważne?

$$\begin{cases} \frac{x+y}{7}+\frac{x-y}{4}=\frac{5}{14} \\ -2x+3y=-1 \end{cases} \text{ oraz } \begin{cases} 5x+6y=2\cdot(a+4) \\ (b+1)x-2y=5\frac{1}{3} \end{cases}$$

Dla nauczyciela

Autor: Beata Wojciechowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równoważne układy równań

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny.

IV. Układy równań. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi; podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- formułuje definicję równoważnych układów równań
- sprawdza, czy dane układy równań są równoważne
- dobiera współczynniki przy niewiadomych oraz wyrazy wolne, tak, aby układy były równoważne
- tworzy układ równań równoważny do danego

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem infografiki

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e‑materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają sobie w grupach wiadomości i umiejętności związane z ilustracją geometryczną układów równań oraz pojęciem rozwiązania układu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w parach metodą analizy przypadku. Analizują przykłady zawarte w części „Przeczytaj” i „Infografika”.
2. Nauczyciel kontroluje pracę grup, wyjaśnia wątpliwości.
3. Uczniowie wspólnie z nauczycielem omawiają infografikę i konsultują wykonanie umieszczonego pod nią polecenia.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń krótko podsumowuje najważniejsze informacje z lekcji.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, których nie zdążyli wykonać na lekcji.

Materiały pomocnicze:

Układ dwóch równań liniowych

Wskazówki metodyczne:

Infografika może być wykorzystana przez uczniów do utrwalenia wiadomości z lekcji. Materiał pomaga też usystematyzować wiedzę dotyczącą rozwiązywania układów równań liniowych i ich interpretacji geometrycznej.