



Co najmniej, co najwyżej, dokładnie – w rachunku prawdopodobieństwa

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Co najmniej, co najwyżej, dokładnie – w rachunku prawdopodobieństwa

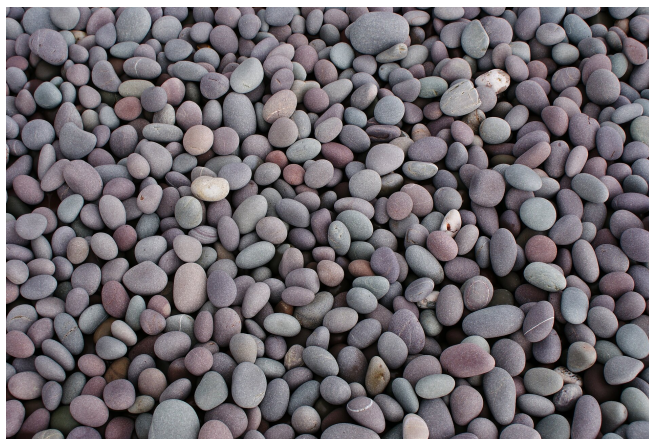
Źródło: dostępny w internecie: [sarajuggernaut](#) z [Pixabay](#), domena publiczna.

Matematycy z reguły są ludźmi uporządkowanymi, lubiącymi jednoznaczne rozwiązanie danego problemu. Dlatego zamiast sformułowań *co najmniej*, *co najwyżej*, wolą sformułowanie *dokładnie*.

Okazuje się, że i poetom jest nieobce to słowo. Jeśli chcesz się o tym przekonać, przeczytaj fragment wiersza Zbigniewa Herberta „Kamyk”.

“ Kamyk jest stworzeniem doskonałym

równy samemu sobie
pilnujący swych granic



Źródło: Sean the Spook, dostępny w internecie: [commons.wikimedia.org](#), licencja: CC BY-SA 3.0.

wypełniony **dokładnie** kamiennym sensem

Aby jednak zdenerwować perfekcjonistów, inni matematycy z uporem szukają kilku rozwiązań nawet błahych zagadnień. Podążymy ich śladem i w tym materiale podamy przykłady zadań, których rozwiązania będą wymagały rozważenia problemów typu – *co najmniej, co najwyżej, dokładnie*.

Twoje cele

- Obliczysz prawdopodobieństwo zdarzenia, korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo klasyczne.
- Wykorzystasz aparat kombinatoryczny do wyznaczania liczby zdarzeń elementarnych i liczby zdarzeń sprzyjających.
- Rozwiążesz tekstowe zadania probabilistyczne, zawierające sformułowania *co najmniej, co najwyżej, dokładnie*.

Przeczytaj

W niektórych przypadkach trudno jest zinterpretować poprawnie problem probabilistyczny określony za pomocą zwrotu – *co najmniej, co najwyżej lub dokładnie*. W tym materiale podamy więc kilka przykładów zawierających rozwiązania tego typu zadań.

Na początek przypomnienie klasycznej definicji prawdopodobieństwa, z której będziemy korzystać.

Definicja: Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych.

Prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia $A \subset \Omega$ nazywamy liczbę

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Z klasycznej definicji prawdopodobieństwa wynika więc, że prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia $A \subset \Omega$ jest równe ilorazowi liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A przez liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych należących do zbioru Ω .

Zwrot *co najmniej raz* oznacza, że dane zdarzenie zaszło raz lub więcej razy. Zwrot ten sugeruje więc, że liczba zdarzeń sprzyjających rozważanemu zdarzeniu może być większa od 1.

W pierwszych dwóch przykładach rozpatrzemy właśnie takie zdarzenia.

Przykład 1

Rzucamy dziesięć razy monetą. Obliczymy **prawdopodobieństwo** tego, że co najmniej raz wypadła reszka.

W jednokrotnym rzucie monetą mamy dwa zdarzenia elementarne: orzeł, reszka. Zatem w dziesięciokrotnym rzucie monetą mamy 2^{10} zdarzeń elementarnych.

$$|\Omega| = 2^{10}$$

Oznaczmy:

A – zdarzenie polegające na wyrzuceniu co najmniej jednej reszki (możemy też powiedzieć – przynajmniej jednej reszki lub nie mniej niż jednej reszki)

w dziesięciokrotnym rzucie monetą. Wypisywanie i zliczanie zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A zajęłoby zbyt wiele czasu. Łatwo też wtedy o pomyłkę.

Rozpatrzmy więc zdarzenie przeciwne – ani razu nie wypadła reszka, czyli za każdym razem wypadł orzeł.

$$|A'| = 1$$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego.

$$P(A') = \frac{1}{2^{10}}$$

Zatem

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2^{10}} = \frac{1024-1}{1024} = \frac{1023}{1024}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo tego, że w dziesięciokrotnym rzucie monetą co najmniej raz wypadła reszka jest równe $\frac{1023}{1024}$.

Przykład 2

Prawdopodobieństwo, że Marek wygra konkurs matematyczny jest równe $\frac{3}{5}$,
a prawdopodobieństwo, że nie wygra konkursu geograficznego jest równe $\frac{5}{8}$.
Prawdopodobieństwo, że Marek wygra co najmniej jeden konkurs jest równe $\frac{5}{7}$.
Obliczymy prawdopodobieństwo, że Marek wygra oba konkursy.

Oznaczmy:

M – zdarzenie polegające na tym, że Marek wygra konkurs matematyczny,

G – zdarzenie polegające na tym, że Marek wygra konkurs geograficzny.

Wtedy:

$$P(M) = \frac{3}{5}$$

$$P(G) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(M \cup G) = \frac{5}{7}$$

Korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo sumy.

$$P(M \cup G) = P(M) + P(G) - P(M \cap G)$$

Mamy obliczyć $P(M \cap G)$.

Wstawiamy do wzoru odpowiednie liczby i przekształcamy otrzymane wyrażenie.

$$\frac{5}{7} = \frac{3}{5} + \frac{3}{8} - P(M \cap G)$$

$$P(M \cap G) = \frac{24+15}{40} - \frac{5}{7}$$

$$P(M \cap G) = \frac{39 \cdot 7 - 200}{280}$$

$$P(M \cap G) = \frac{39 \cdot 7 - 200}{280} = \frac{73}{280}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo tego że Marek wygra oba konkursy jest równe $\frac{73}{280}$.

Teraz przykład problemu ze zwrotem *dokładnie*. Ten zwrot jest używany w zadaniach, w których należy uwypuklić jednoznaczność rozważanej sytuacji. W innych przypadkach, kiedy sformułowanie zadania nie budzi wątpliwości, można pominąć ten zwrot.

Przykład 3

W bombonierce znajdują się dwie czekoladki kawowe i trzy miodowe. Wyjmujemy z bombonierki w sposób losowy najpierw jedną, a następnie drugą czekoladkę. Obliczymy prawdopodobieństwo tego, że dokładnie jedna z czekoladek będzie kawowa.

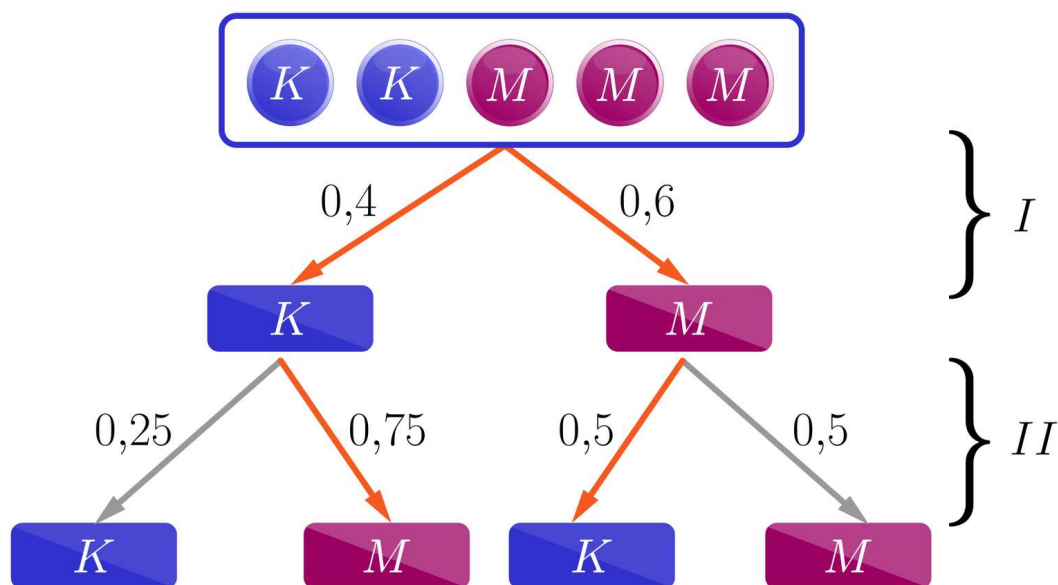
Oznaczmy:

K – wyjęta czekoladka jest kawowa,

M – wyjęta czekoladka jest miodowa,

A – zdarzenie polegające na wyjęciu dokładnie jednej czekoladki kawowej.

Przebieg rozpatrywanego doświadczenia zilustrujemy za pomocą drzewa.



Prawdopodobieństwa zdarzenia A obliczamy, mnożąc prawdopodobieństwa zapisane przy zaznaczonych na czerwono krawędziach i dodając otrzymane liczby.

$$P(A) = 0,4 \cdot 0,75 + 0,6 \cdot 0,5 = 0,3 + 0,3 = 0,6$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo wyjęcia dokładnie jednej czekoladki kawowej jest równe 0,6.

W ostatnich dwóch przykładach rozważymy sytuacje probabilistyczne, zawierające zwrot *co najwyżej*.

Przykład 4

Rzucamy dwiema kostkami do gry. Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia: suma liczb oczek, jakie wypadły na obu kostkach jest co najwyżej równa 5.

Zaczynamy od wyznaczenia liczby zdarzeń elementarnych w tym doświadczeniu.

$$|\Omega| = 6^2 = 36$$

Jeśli suma liczb oczek na obu kostkach ma być co najwyżej równa 5 (możemy też powiedzieć – nie większa od 5) to może być równa 2, 3, 4 lub 5.

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$$

Zatem

$$|A| = 10$$

Korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo klasyczne.

$$P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo, że w rzucie dwiema kostkami suma liczb wyrzuconych oczek będzie co najwyżej równa 5, jest równe $\frac{5}{18}$.

Przykład 5

Rakieta zaopatrzona jest w pięć silników. Prawdopodobieństwo zepsucia się każdego z nich jest równe $\frac{1}{3}$. Silniki psują się niezależnie od siebie. Obliczmy prawdopodobieństwo tego, że zepsuje się co najwyżej jeden silnik.

Zadanie rozwiążemy, korzystając ze schematu Bernoulliego:

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

gdzie $p = \frac{1}{3}$, $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $n = 5$.

Chcemy obliczyć prawdopodobieństwo tego, że zepsuje się co najwyżej jeden silnik. Mamy dwie możliwości – nie zepsuje się żaden silnik, bądź zepsuje się jeden silnik.

Prawdopodobieństwo tego, że nie zepsuje się żaden silnik jest równe:

$$P(S_5 = 0) = \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{32}{243} = \frac{32}{243}$$

Prawdopodobieństwo tego, że zepsuje się jeden silnik jest równe:

$$P(S_5 = 1) = \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{81} = \frac{80}{243}$$

Prawdopodobieństwo tego, że zepsuje się co najwyżej jeden silnik jest równe:

$$P(S_5 \leq 1) = P(S_5 = 0) + P(S_5 = 1) = \frac{32}{243} + \frac{80}{243} = \frac{112}{243}$$

Odpowiedź:

Szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{112}{243}$.

Słownik

klasyczna definicja prawdopodobieństwa

niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych; prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia $A \subset \Omega$

nazywamy liczbę

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Film samouczek

Polecenie 1

Przeanalizuj przykłady wyznaczania liczby liczb wielocyfrowych spełniających określone warunki. Zwróć uwagę, w których miejscach pominięcie zwrotu *dokładnie* nie spowodowało niejednoznaczności sformułowania problemu.

Następnie, korzystając z poznanych sposobów zliczania obiektów kombinatorycznych, rozwiąż zadania zawarte w Poleceniu 2, Poleceniu 3 i Poleceniu 4.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DNnSdzAGg>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej wykorzystania kombinacji do zliczania liczb spełniających określone warunki.

Polecenie 2

Spośród wszystkich liczb ośmiocyfrowych wybieramy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosujemy liczbę, w której cyfra 2 występuje dokładnie 5 razy, a na pozostałych pozycjach wystąpi cyfra 7.

Polecenie 3

Spośród wszystkich liczb ośmiocyfrowych wybieramy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosujemy liczbę, do zapisu której użyto cyfr ze zbioru $\{3, 5, 7, 9\}$ i cyfra 9 występuje dokładnie 4 razy.

Polecenie 4

Spośród wszystkich liczb ośmiocyfrowych wybieramy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosujemy liczbę, w zapisie której występują dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie trzy cyfry 3.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



W urnie znajduje się 100 losów, a wśród nich losy które upoważniają do odbioru nagrody pieniężnej. Jeden upoważniający do odbioru nagrody w wysokości 100 zł, trzy upoważniające do odbioru nagrody w kwocie 40 zł, sześć – w kwocie 20 zł i piętnaście – w kwocie 10 zł. Kupiono jeden los. Wynika z tego, że prawdopodobieństwo wygrania co najmniej 40 zł jest mniejsze od prawdopodobieństwa wygrania co najwyżej 40 zł o:

☐ 0,96

☐ 0,04

☐ 0,24

☐ 0,92

Ćwiczenie 2



Dwaj zawodnicy rzucili jednocześnie strzałkami do tej samej tarczy. Pierwszy trafia do tarczy z prawdopodobieństwem 0,8, drugi z prawdopodobieństwem 0,9. Prawdopodobieństwo tego, że tarcza została trafiona co najmniej raz, jest równe:

☐ 0,98

☐ 0,1

☐ 1,7

☐ 0,72

Ćwiczenie 3



Na półce stoją trzy powieści przygodowe i pięć tomików wierszy. Wyciągamy w sposób losowy dwie książki.

Uzupełnij, przeciągając odpowiednie wyrażenia, wyznaczania prawdopodobieństwa p tego, że żadna z wylosowanych książek nie jest powieścią.

$$p = \boxed{} : \boxed{} = \boxed{}$$

$\binom{2}{5}$

$\frac{30}{392}$

$\binom{8}{2}$

$\binom{3}{2} \cdot \binom{5}{2}$

$\frac{3}{28}$

$\binom{3}{2}$

$\binom{2}{8}$

$3 \cdot 5$

$\frac{5}{14}$

$\binom{5}{2}$

Ćwiczenie 4



W żyrandolu pali się pięć żarówek. Prawdopodobieństwo, że popsuje się każda z nich, jest równe $\frac{1}{4}$. Żarówki psują się niezależnie od siebie. Włączamy żyrandol.

Zaznacz, czy dane zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Prawdopodobieństwo, że zepsują się dokładnie dwie żarówki jest równe $\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{3}$.	☐	☐
Prawdopodobieństwo, że zepsuje się dokładnie jedna żarówka jest równe $\binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4$.	☐	☐
Prawdopodobieństwo, że zepsuje się co najwyżej jedna żarówka jest równe $\cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5$.	☐	☐
Prawdopodobieństwo, że zepsuje się co najmniej jedna żarówka jest równe $\binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$.	☐	☐

Ćwiczenie 5



Wśród dwudziestoosobowej grupy uczniów, wśród których jest 6 dziewczynek rozlosowano pięć karnetów na basen.

Uzupełnij zdanie, wpisując odpowiednie liczby tak, aby otrzymany ułamek był nieskracalny. Prawdopodobieństwo p tego, że wśród posiadaczy karnetów znajdą się dokładnie 3 dziewczyny jest równe:

$$p = \boxed{} : \boxed{}$$

Ćwiczenie 6



W partii towaru składającej się z N sztuk jabłek znajduje się M jabłek robaczywych.

Wybieramy losowo n ($n \leq N$) jabłek. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród nich znajdzie się dokładnie m ($m \leq n$) jabłek robaczywych.

Ćwiczenie 7



W partii towaru składającej się z N sztuk jabłek znajduje się M jabłek robaczywych.

Wybieramy losowo n ($n \leq N$) jabłek. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród nich znajdzie się co najmniej m ($m \leq n$) jabłek robaczywych.

Ćwiczenie 8



Rzucasz pięć razy symetryczną kostką do gry.

Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:

a. co najwyżej trzech „trójek”,

b. „trójki” dokładnie trzy razy.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Co najmniej, co najwyżej, dokładnie – w rachunku prawdopodobieństwa

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XI. Kombinatoryka

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;

2) stosuje współczynnik dwumianowy (symbol Newtona) i jego własności przy rozwiązywaniu problemów kombinatorycznych.

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe i stosuje wzór Bayesa, stosuje twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym;

2) stosuje schemat Bernoulliego.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza prawdopodobieństwo zdarzenia, korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo klasyczne
- wykorzystuje aparat kombinatoryczny do wyznaczania liczby zdarzeń elementarnych i liczby zdarzeń sprzyjających
- rozwiązuje tekstowe zadania probabilistyczne, zawierające sformułowania *co najmniej, co najwyżej, dokładnie*
- stosuje obiekty matematyczne i operuje nimi, interpretuje pojęcia matematyczne
- dobiera i tworzy modele matematyczne przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- technika CPM
- technika obserwacji migawkowych
- mapa myśli

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu komputery w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Zadaniem uczniów było sporządzenie mapy myśli, zbierającej wiadomości na temat poznanych do tej pory wzorów kombinatorycznych.
2. Ochotnicy przedstawiają swoje mapy, w wyniku czego zostaje stworzona jedna, wspólna mapa myśli, z której wszyscy uczniowie będą korzystać na lekcji.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach techniką CPM. Ich zadaniem jest zaplanowanie działań związanych z szukaniem prawdopodobieństwa zajścia danych zdarzeń w sytuacjach, w których występuje zwrot – *co najmniej, co najwyżej lub dokładnie*.
2. Warto, aby uczniowie uwzględnili w swoich planach czas na samodzielne dochodzenie do wiedzy, a dopiero później zapoznanie się z materiałem z sekcji „Przeczytaj”.
3. Po ustaleniu planu i zapoznaniu się z filmem samoucukiem, uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne.

Faza podsumowująca:

1. Każda z grup techniką obserwacji migawkowych rejestruje najważniejsze elementy pracy grupy, zwracając szczególną uwagę na sposób komunikowania się i strategie wykorzystywane do rozwiązywania problemów.
Liderzy grup dzielą się refleksjami na temat metod wykorzystywanych przez grupy w celu sprawdzenia poprawności uzyskanego wyniku (bez zaglądania do odpowiedzi), organizacji pracy, jej intensywności i ukształtowanych umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest przygotowanie diagramu Ishikawy pokazującego klasyfikację zadań „na” co najmniej, co najwyżej, dokładnie.

Materiały pomocnicze:

[Zastosowanie klasycznego modelu prawdopodobieństwa](#)

Wskazówki metodyczne:

Film samouczek może być wykorzystany na zajęciach pokazujących zastosowanie kombinatoryki do ustalania liczby elementów sprzyjających danemu zdarzeniu losowemu.