



Podział proporcjonalny - teoria i przykłady, ćwiczenia

Podział proporcjonalny - teoria i przykłady, ćwiczenia

Źródło: Pixabay.com, domena publiczna.



Źródło: dostępny w internecie: Wikipedia.org, domena publiczna.

Jednym z najbardziej znanych problemów z historii matematyki jest problem podziału stawki, który prezentuje opisana poniżej gra dwuosobowa.

Polega ona na rozgrywaniu kolejnych partii, przy czym w każdej z nich obaj zawodnicy mają jednakowe szanse zwycięstwa. Ostatecznie zwycięzcą zostanie ten, kto pierwszy wygra 5 partii. Rozgrywki zostały przerwane w momencie gdy gracz **A** miał na swoim koncie 4 wygrane partie, a gracz **B**: 3. Jak należy podzielić stawkę, o którą toczyła się gra?

Rozwiązanie tego problemu wiąże się bezpośrednio z podziałem proporcjonalnym danej wielkości, czyli zagadnieniem, którym będziemy się zajmować w tym materiale.

1. Interaktywna treść merytoryczna
2. Prezentacja multimedialna
3. Zestaw ćwiczeń interaktywnych

4. Słownik

Twoje cele

- Podzielisz daną wielkość w określonym stosunku.
- Wykorzystasz podział proporcjonalny w zdaniach z kontekstem realistycznym.

Jeśli zmieszamy trzy szklanki soku pomarańczowego z dwiema szklankami wody, to otrzymamy napój, w którym trzy części soku przypadają na dwie części wody.



Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Oznacza to, że stosunek ilości soku pomarańczowego do ilości wody w napoju jest równy trzy do dwóch, co zapisujemy w postaci ilorazu: $3 : 2$.

Jeśli deskę długości 20 dm podzielimy na dwie części, z których jedna ma długość 5 dm, a druga 15 dm, to stosunek długości tych części jest równy $5 : 15$.



Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Iloraz $5 : 15$ możemy zapisać też w postaci ułamka zwykłego: $\frac{5}{15}$. Ponieważ $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, to stosunek długości otrzymanych części możemy zapisać jako $1 : 3$.

Porównując dwie wielkości, wyrażamy je w tej samej jednostce miary. Wtedy stosunek dwóch **wielkości tego samego rodzaju** to iloraz miar tych wielkości.

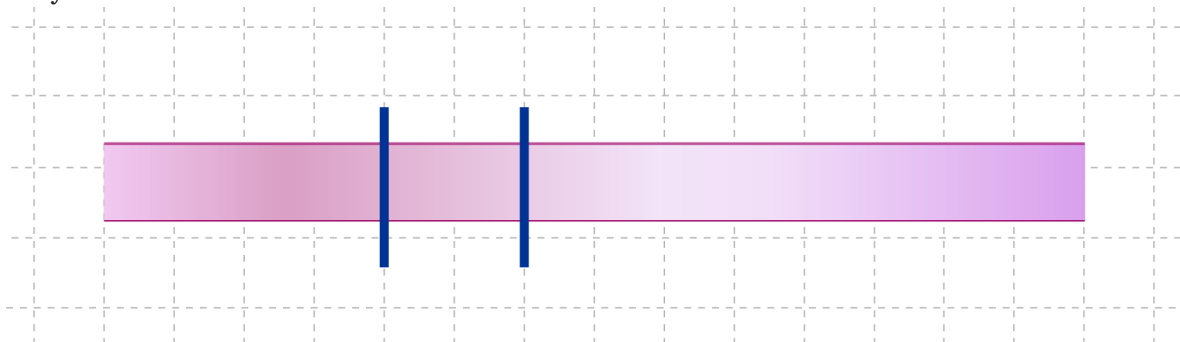
Stosunek dwóch wielkości dodatnich a, b możemy zapisać w postaci $a : b$ lub w postaci ułamka $\frac{a}{b}$.

Podział proporcjonalny to podział danej wielkości na części w podanym stosunku.

Przykład 1

Tasiemkę długości 14 cm należy podzielić na trzy części w stosunku 2 : 1 : 4. Obliczmy, jaką długość będzie miała każda z tych części.

Ponieważ $2 + 1 + 4 = 7$, więc gdybyśmy podzielili tasiemkę na siedem jednakowych części, to musielibyśmy wziąć dwie z tych części, aby otrzymać pierwszy kawałek tasiemki, jedną z tych części, aby otrzymać drugi kawałek tasiemki i cztery z tych części, aby otrzymać ostatni kawałek.



Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

$14 \text{ cm} : 7 = 2 \text{ cm}$ – taką długość będzie miała każda z siedmiu części tasiemki.

$2 \cdot 2 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$ – taką długość będzie miała pierwsza część tasiemki.

$1 \cdot 2 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$ – taką długość będzie miała druga część tasiemki.

$4 \cdot 2 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$ – taką długość będzie miała trzecia część tasiemki.

Pierwsza część tasiemki będzie miała długość 4 cm, druga 2 cm, a trzecia 8 cm.

Przykład 2

Ania i Frania rzucały piłką do kosza. Ania wykonała 20 rzutów i trafiła 8 razy. Frania wykonała 15 rzutów i trafiła do kosza 7 razy. Która z dziewcząt rzucała celniej?

Obliczmy stosunek liczby trafień do liczby wszystkich rzutów dla każdej z dziewcząt.

Ania: $\frac{8}{20}$.

Frانيا: $\frac{7}{15}$.

Porównujemy otrzymane liczby.

$$\frac{8}{20} = \frac{2}{5} = \frac{6}{15}$$

$$\frac{6}{15} < \frac{7}{15}$$

Celniej rzucała Frania.

Przykład 3

W pewnym stopie złota z miedzią stosunek masy czystego złota do masy całego stopu wynosił 3 : 8.

Stop miał masę 56 g. Obliczmy, ile miedzi było w tym stopie.

Stosunek masy złota do masy całego stopu jest równy 3 : 8. Oznacza to, że w stopie są 3 części złota i jest $8 - 3 = 5$ części miedzi.

$$\frac{5}{8} \cdot 56 = 35$$

W tym stopie jest 35 g miedzi.

Poznane sposoby obliczeń wykorzystamy teraz do rozważenia zagadnienia związanego z podziałem stawki.

Przykład 4

Marek, Mariusz i Marcin brali udział w zespołowej *Grze o wszystko*, w której wygrali 8000 zł.

Marek odpowiedział na 6 pytań, Mariusz na 4 pytania, a Marcin na 10 pytań. Jak powinni podzielić wygraną?

Razem chłopcy odpowiedzieli na $6 + 4 + 10 = 20$ pytań.

Dzielimy wygraną na 20 równych części.

$$8000 \text{ zł} : 20 = 400 \text{ zł}$$

Aby podział był sprawiedliwy, każdy powinien dostać tyle z wyznaczonych części, na ile pytań odpowiedział.

$$\text{Marek: } 6 \cdot 400 \text{ zł} = 2400 \text{ zł}$$

$$\text{Mariusz: } 4 \cdot 400 \text{ zł} = 1600 \text{ zł}$$

$$\text{Marcin: } 10 \cdot 400 \text{ zł} = 4000 \text{ zł}$$

Marek powinien otrzymać 2400 zł, Mariusz 1600 zł, a Marcin 4000 zł.

Pan Tadeusz opisując swoją nową działkę podał jej pole powierzchni i kwotę, jaką za nią zapłacił. Dla każdej z tych wielkości określił inną miarę – odpowiednio metr kwadratowy i złoty. O takich wielkościach mówimy, że są to **wielkości różnego rodzaju**. Dla takich wielkości możemy również obliczać stosunek miar.

Przykład 5

Samochód pani Renaty zużył 12 l paliwa na pokonanie 150 km. Samochód pani Beaty zużył 15 l paliwa na pokonanie 200 km. Obliczmy, który z tych samochodów zużył więcej paliwa na pokonanie 1 km.

Aby określić, który z samochodów zużył więcej paliwa na pokonanie 1 km, wystarczy porównać stosunki: $\frac{12}{150}$ i $\frac{15}{200}$.

$$\frac{12}{150} = 0,08 \frac{1}{\text{km}}$$

$$\frac{15}{200} = 0,075 \frac{1}{\text{km}}$$

Zatem:

$$\frac{12}{150} > \frac{15}{200}$$

Mniej paliwa na pokonanie kilometra potrzebuje samochód pani Beaty.

Notatnik

Miejsce na Twoje notatki

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją, w której zaprezentowane są przykłady zadań związanych z podziałem proporcjonalnym.

Spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązać podane tam przykłady i dopiero porównaj z rozwiązaniami.

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.



Kliknij, aby uruchomić w trybie pełnoekranowym.

Polecenie 2

Wzorując się na rozwiązaniu Przykładu 4 podanego w prezentacji, rozwiąż poniższe zadanie.

Budynek szkoły remontują trzy brygady robotników. Stosunek liczby osób wchodzących w skład poszczególnych brygad jest równy $7 : 3 : 10$. W pierwszej brygadzie jest o 9 osób mniej niż w trzeciej. Oblicz, ilu łącznie robotników pracuje przy remoncie szkoły.

Polecenie 3

Wzorując się na rozwiązaniu problemu z Przykładu 3 podanego w prezentacji, rozwiąż poniższe zadanie.

Zmieszano dwa rodzaje cukierków: czekoladowe w cenie 24 zł za kilogram i pistacjowe w cenie 28 zł za kilogram.

Otrzymano 10 kg mieszanki, w której stosunek masy cukierków czekoladowych do masy cukierków pistacjowych wynosił 2 : 3. Oblicz, ile powinien kosztować kilogram tej mieszanki.

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Polecenie 4

Zmieszano kwas octowy z wodą w stosunku 4 : 6. Oblicz, jakie jest stężenie tak otrzymanego roztworu.

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Zestaw ćwiczeń interaktywnych

Ćwiczenie 1

Zaznacz poprawną odpowiedź. W pewnej klasie 25% dzieci uprawia gimnastykę artystyczną. Stosunek liczby dzieci, które **nie** uprawiają gimnastyki artystycznej do liczby dzieci, które uprawiają gimnastykę artystyczną, jest równy

☐ 4 : 3

☐ 3 : 1

☐ 1 : 3

☐ 3 : 4

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2

Zaznacz poprawną odpowiedź. Na parkingu stoją samochody osobowe i ciężarowe, razem 169 sztuk. Stosunek liczby samochodów osobowych do liczby samochodów ciężarowych jest równy 8 : 5.

O ile mniej samochodów ciężarowych niż osobowych stoi na tym parkingu?

☐ O 104.

☐ O 65.

☐ O 3.

☐ O 39.

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3

Zaznacz poprawną odpowiedź. Na stole leżą pomarańcze i banany. Stosunek liczby pomarańczy do liczby bananów jest równa $3 : 2$. Ile procent wszystkich owoców leżących na stole stanowią banany?

☐ 60%

☐ 30%

☐ 40%

☐ 20%

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4

Wiadomo, że $A = 15$, $B = 20$, $C = 35$, $D = 40$. Połącz w pary stosunki danych liczb i odpowiadające im wartości liczbowe.

$C : B$

$3 : 8$

$D : C$

$4 : 3$

$A : C$

$\frac{3}{7}$

$B : A$

$7 : 4$

$B : D$

$\frac{8}{7}$

$A : D$

$\frac{1}{2}$

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5

Anka, Basia i Celina mają razem 38 lat. Stosunek wieku Anki do wieku Basi jest równy 5 : 6. Celina ma o 6 lat więcej od Anki. Zaznacz każde zdanie prawdziwe.

☐ Celina nie ma 12 lat.

☐ Celina ma 14 lat.

☐ Basia nie ma 12 lat.

☐ Anka ma 10 lat.

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6

Należy rozlać 84 l oleju do trzech pojemników, w stosunku 5 : 2 : 7. Ile litrów oleju należy wlać do każdego z pojemników? Uzupełnij rozwiązanie zadania, przeciągając odpowiednie liczby.

Podział w stosunku 5 : 2 : 7 zaczynamy od dzielenia na równych części 84 l litrów oleju. Jedna z tych części ma objętość litrów. Zatem do pierwszego pojemnika należy wlać litrów oleju, do drugiego litrów, a do trzeciego litry oleju.

12

14

6

42

30

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7

Panowie **A**, **B**, **C** kwotę, którą otrzymali za pomalowanie ścian, podzielili w stosunku 2 : 3 : 4. Zaznacz, które zdanie jest prawdziwe, a które fałszywe.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Pan B otrzymał najmniejszą kwotę.	☐	☐
Pan C otrzymał dwa razy tyle, co pan A .	☐	☐
Pan B otrzymał o 400 zł więcej od pana C .	☐	☐
Pan A otrzymał najmniejszą kwotę.	☐	☐

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8

Stosunek długości boków prostokąta M jest równy $4 : 1$. Gdyby długość krótszego boku zwiększyć o 6, to otrzymalibyśmy kwadrat K . Oblicz stosunek pola kwadratu K do pola prostokąta M .

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9

Ewelina przeszła 12,8 km w ciągu 4 h, a Zenek przeszedł 2,7 km w ciągu 45 minut. Która z tych osób szła z większą prędkością?

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Słownik

stosunek dwóch wielkości

Stosunkiem dwóch wielkości nazywamy iloraz odpowiadających sobie wartości tych wielkości. Zapisuje się go zwykle w postaci ilorazu liczb naturalnych.

Bibliografia

Romanowicz Z., Piegat E., (1997), *100 zadań z błyskiem*, Wrocław: Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne.