



Zadania na dowodzenie prowadzące do rozwiązywania nierówności wielomianowych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zadania na dowodzenie prowadzące do rozwiązywania nierówności wielomianowych

Źródło: Kelli Tungay, dostępny w internecie: unsplash.com, domena publiczna.

W tym materiale zajmiemy się rozwiązywaniem zadań na dowodzenie z zastosowaniem nierówności wielomianowych. Szczególną uwagę poświęcimy zadaniom typu „wykaż, że”, dotyczącym udowodnienia, że nierówność nie posiada rozwiązania lub rozwiązania są kolejnymi liczbami całkowitymi. Rozwiążemy też nierówności z parametrem.

Twoje cele

- Rozwiążesz nierówność wielomianową opisującą zależność między danymi.
- Udowodnisz, że nierówność wielomianowa ma rozwiązanie spełniające dany warunek.
- Wykażesz, że dana nierówność wielomianowa nie posiada rozwiązań lub zbiorem rozwiązań nierówności jest zbiór liczb rzeczywistych.

Przeczytaj

Definicja: Nierówność wielomianowa

Nierównością wielomianową stopnia n nazywamy każdą z nierówności postaci:

$$W(x) > 0 \text{ lub } W(x) \geq 0 \text{ lub } W(x) < 0 \text{ lub } W(x) \leq 0,$$

gdzie:

W – jest wielomianem stopnia n .

Aby rozwiązać nierówność wielomianową, postępujemy podobnie, jak podczas rozwiązywania równań. Jeżeli nierówność jest przedstawiona w postaci iloczynowej, obliczamy pierwiastki odpowiednich równań, a następnie za pomocą siatki znaków lub metodą graficzną odczytujemy, dla jakich x przyjmuje nierówność żądane wartości.

Przykład 1

Udowodnimy, że nierówność wielomianowa $x^4 + 2x^4 + x^2 < 0$ nie posiada rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.

$$x^4 + 2x^4 + x^2 < 0$$

Wyłączmy przed nawias jednomian x^2 .

$$x^2(x^2 + 2x + 1) < 0$$

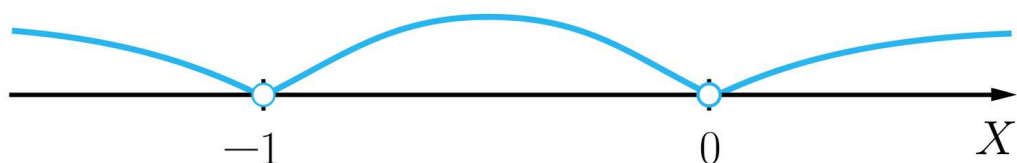
$$x^2(x + 1)^2 < 0$$

Szkicujemy wykres wielomianu $W(x) = x^2(x + 1)^2$, obliczając najpierw miejsca zerowe wielomianu $W(x)$.

$$x^2(x + 1)^2 = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x = -1$$

Oba pierwiastki wielomianu $W(x)$ są podwójne, więc wykres jest styczny do osi X .



$$x \in \emptyset$$

Nierówność nie posiada rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.

Przykład 2

Wykażemy, że zbiór rozwiązań nierówności $x^4 - 12x^3 + 52x^2 - 96x + 64 \leq 0$ składa się z dwóch kolejnych liczb parzystych.

Zapiszemy nierówność w postaci równoważnej tak, abyśmy mogli pogrupować wyrazy i wyłączyć wspólny czynnik przed nawias.

$$x^4 - 2x^3 - 10x^3 + 20x^2 + 32x^2 - 64x - 32x + 64 \leq 0$$

$$x^3(x - 2) - 10x^2(x - 2) + 32x(x - 2) - 32(x - 2) \leq 0$$

$$(x - 2)(x^3 - 10x^2 + 32x - 32) \leq 0$$

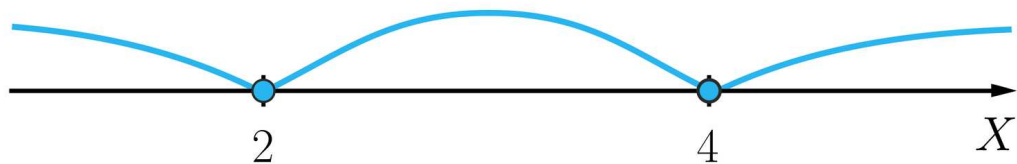
$$(x - 2)(x^3 - 2x^2 - 8x^2 + 16x + 16x - 32) \leq 0$$

$$(x - 2)[x^2(x - 2) - 8x(x - 2) + 16(x - 2)] \leq 0$$

$$(x - 2)(x - 2)(x^2 - 8x + 16) \leq 0$$

$$(x - 2)^2(x - 4)^2 \leq 0$$

$$x = 2 \text{ lub } x = 4$$



$$x \in \{2, 4\}$$

Zatem zbiór rozwiązań nierówności składa się z dwóch kolejnych liczb parzystych.

Przykład 3

Wykażemy, że **nierówność wielomianowa** $x^8 + x^6 - 2x^5 - 2x^3 + x^2 + 1 \geq 0$ jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą.

$$x^8 + x^6 - 2x^5 - 2x^3 + x^2 + 1 \geq 0$$

$$x^2(x^6 - 2x^3 + 1) + x^6 - 2x^3 + 1 \geq 0$$

$$(x^6 - 2x^3 + 1)(x^2 + 1) \geq 0$$

$$(x^3 - 1)^2(x^2 + 1) \geq 0$$

Ustalimy znak iloczynu na podstawie znaków czynników.

Wyrażenie $(x^3 - 1)^2 \geq 0$, bo kwadrat dowolnej liczby jest liczbą nieujemną.

Suma algebraiczna $x^2 + 1 > 0$, bo suma liczby nieujemnej i dodatniej jest dodatnia. Iloczyn liczby dodatniej i nieujemnej jest liczbą nieujemną.

Zatem nierówność jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą.

Przykład 4

Wykażemy, że nierówność $x^4 - 3x^2 - 4x + 9 \leq 0$ jest sprzeczna dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Zapiszemy nierówność w postaci równoważnej.

$$x^4 - 4x^2 + 4 + x^2 - 4x + 4 + 1 \leq 0$$

$$(x^2 - 2)^2 + (x - 2)^2 + 1 \leq 0$$

Lewa strona nierówności przyjmuje zawsze wartości dodatnie, bo $(x^2 - 2)^2 \geq 0$ i $(x - 2)^2 \geq 0$. Po dodaniu liczby 1 wynik będzie dodatni.

Zatem nierówność nie posiada rozwiązania.

Przykład 5

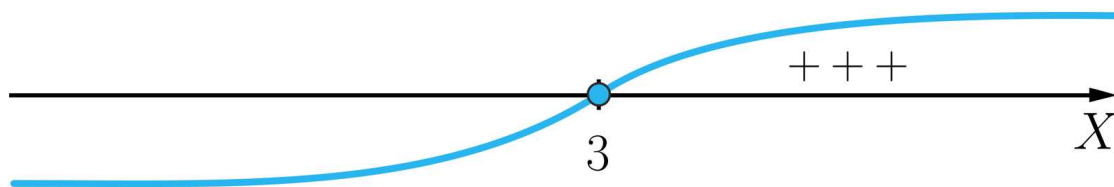
Wykażemy, że dla $k = 3$ zbiorem rozwiązań nierówności wielomianowej $(x - 3)(x^2 - 2kx + k^2) \geq 0$ jest zbiór $\langle 3, \infty \rangle$.

Dla $k = 3$ otrzymujemy :

$$(x - 3)(x^2 - 6x + 9) \geq 0$$

$$(x - 3)(x - 3)^2 \geq 0$$

$$(x - 3)^3 \geq 0$$



$$x \in \langle 3, \infty \rangle$$

Przykład 6

Wykażemy, że dla dowolnego $m \neq 0$ równanie $-m^2x^2 + (m^2 + 2)x + (m^2 - 1) = 0$ ma dwa różne rozwiązania.

Aby równanie kwadratowe miało dwa różne rozwiązania $\Delta > 0$. Zatem musimy rozwiązać pewną nierówność wielomianową.

$$\Delta = (m^2 + 2)^2 + 4m^2(m^2 - 1) = m^4 + 4m^2 + 4 + 4m^4 - 4m^2 = 5m^4 + 4.$$

Wyrażenie $5m^4 + 4 > 0$ dla dowolnego m .

Zatem dla $m \neq 0$ równanie ma dwa różne rozwiązania.

Słownik

nierówność wielomianowa

każda z nierówności postaci:

$$W(x) > 0 \text{ lub } W(x) \geq 0 \text{ lub } W(x) < 0 \text{ lub } W(x) \leq 0,$$

gdzie:

W – jest wielomianem stopnia n

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją oraz z zawartymi w nim sposobami rozwiązywania zadań na dowodzenie.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1Go0hIzj>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej dowodzenia nierówności wielomianowych.

Polecenie 2

Wykaż, że dla $p > 0$ nierówność $x^4 + (3 + p)x^2 + 3p > 0$ jest zawsze prawdziwa.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Aby wykazać, że nierówność $x^4 - 2x^3 + x^2 < 0$ nie posiada rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych, można zapisać nierówność w postaci równoważnej:

☐ $x^2(x + 1)^2 \geq 0$

☐ $x^2(x + 1)^2 < 0$

☐ $x^2(x - 1)^2 < 0$

☐ $x^2(x - 1)^2 > 0$

Ćwiczenie 2



Wstaw w wyznaczone miejsce odpowiednie wyrażenie.

Aby pokazać, że zbiorem rozwiązań nierówności $x^4 + 4x^3 + 4x^2 \geq 0$ są wszystkie liczby rzeczywiste, sprowadzimy nierówność do postaci: $x^2 \cdot \boxed{} \geq 0$.

$(x - 2)^2$

$(x + 3)^2$

$(x - 1)^2$

$(x + 2)^2$

Ćwiczenie 3



Dana jest nierówność $(x - 1)^2(x^2 - 2kx + k) \leq 0$. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Dla $k = 1$ nierówność jest postaci $(x - 1)^2(x^2 - 2x + 1) \leq 0$.

☐ Dla $k = 1$ nierówność jest postaci $(x - 1)^4 \leq 0$.

☐ Dla $k = 1$ nierówność jest postaci $(x - 1)^2(x - 1)^2 \leq 0$.

☐ Dla $k = 1$ nierówność jest postaci $(x - 1)^2(x^2 - 2x + 1) \geq 0$.

Ćwiczenie 4



Wykaż, że zbiór rozwiązań nierówności $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9 \leq 0$ składa się z dwóch kolejnych liczb nieparzystych.

Ułóż etapy rozwiązania w odpowiedniej kolejności oraz naszkicuj zbiór rozwiązań nierówności.

$$(x - 1)[x^2(x - 1) - 6x(x - 1) + 9(x - 1)] \leq 0$$



$$(x - 1)(x^3 - 7x^2 + 15x - 9) \leq 0$$



$$x^4 - x^3 - 7x^3 + 7x^2 + 15x^2 - 15x - 9x + 9 \leq 0$$



$$x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9 \leq 0$$



$$(x - 1)(x - 1)(x^2 - 6x + 9) \leq 0$$



$$(x - 1)^2(x - 3)^2 \leq 0$$



$$x^3(x - 1) - 7x^2(x - 1) + 15x(x - 1) - 9(x - 1) \leq 0$$



$$x \in \{1, 3\}$$



Ćwiczenie 5



Przeciągnij w wyznaczone miejsce odpowiednie wyrażenie.

Aby udowodnić, że nierówność $x^4 - x^2 - 4x + 6 \leq 0$ nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych, można nierówność doprowadzić do postaci:

$$(x^2 - 1)^2 + \boxed{} + 1 \leq 0$$

$(x + 1)^2$

$(x - 1)^2$

$(x - 2)^2$

$(x - 3)^2$

Ćwiczenie 6



Wykaż, że zbiór rozwiązań nierówności $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 \leq 0$ składa się z dwóch kolejnych liczb całkowitych.

Wpisz liczby w kolejności rosnącej.

Liczby te to , .

Ćwiczenie 7



Zaznacz poprawną odpowiedź. Aby wykazać, że dla dowolnego $m \neq 0$ równanie $-m^2x^2 + (m^2 + 8)x + (m^2 - 4) = 0$ ma dwa różne rozwiązania, trzeba obliczyć wyróżnik trójmianu kwadratowego, który jest równy:

☐ $\Delta = 5m^2 + 64$

☐ $\Delta = 5m^2 + 8$

☐ $\Delta = -3m^2 + 64$

☐ $\Delta = 5m^2 - 64$

Ćwiczenie 8



Wykaż, że zbiorem rozwiązań nierówności $5|x| + 2|x|^3 \geq 0$ jest $\mathbb{R}$.

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zadania na dowodzenie prowadzące do rozwiązania nierówności wielomianowych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

1) rozwiązuje nierówności wielomianowe typu $W(x) > 0$, $W(x) \geq 0$, $W(x) < 0$, $W(x) \leq 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje nierówność wielomianową opisującą zależności między danymi
- dowodzi, że nierówność wielomianowa ma zbiór rozwiązań spełniający dany warunek
- dobiera model rozwiązania do określonego typu zadania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa

- dyskusja
- burza mózgów

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Wybrany przez nauczyciela uczeń przypomina sposoby rozwiązywania zadań na dowodzenie, zwraca uwagę na odróżnienie założeń i tezy występujących w zadaniu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą odwróconej klasy. Najpierw wymieniają się między sobą wiadomościami dotyczącymi sposobów rozwiązywania zadań na dowodzenie z zastosowaniem nierówności wielomianowych, które przygotowali w domu.
2. Uczniowie oglądają animację i rozwiązują przykład.
3. Uczniowie w parach wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące rozwiązywania zadań na dowodzenie z zastosowaniem nierówności wielomianowych.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej. Omawia ewentualne problemy, które powstały podczas rozwiązywania ćwiczeń interaktywnych.

Praca domowa:

Uczniowie dobierają się w pary i tworzą dla drugiej osoby zadania analogiczne do zadań 6 i 7 z części „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Pierwiastki równań](#)

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać jako powtórzenie przed pracą klasową.