



Miejsce zerowe funkcji i sposoby jego wyznaczania

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Miejsce zerowe funkcji i sposoby jego wyznaczania

Źródło: dostępny w internecie: piqsels.com, domena publiczna.

Czy miejsce zerowe funkcji jest punktem?

Ile miejsc zerowych może posiadać funkcja?

Czy każda funkcja posiada miejsce zerowe?

W jaki sposób możemy wyznaczyć miejsce zerowe funkcji opisanej za pomocą grafu, tabelki, zbioru par uporządkowanych, wzoru lub wykresu?

Czy funkcja przedstawiona za pomocą opisu słownego też może posiadać miejsce zerowe?

Odpowiedzi na te pytania uzyskasz, analizując poniższy materiał.

Twoje cele

- Wyznaczysz miejsce zerowe funkcji opisanej różnymi sposobami.
- Sprawdzisz, czy dana liczba jest miejscem zerowym funkcji.
- Udowodnisz, że dana liczba jest miejscem zerowym funkcji.

Przeczytaj

Definicja: Miejsce zerowe funkcji

Miejszem zerowym funkcji nazywamy argument, dla którego wartość funkcji jest równa 0.

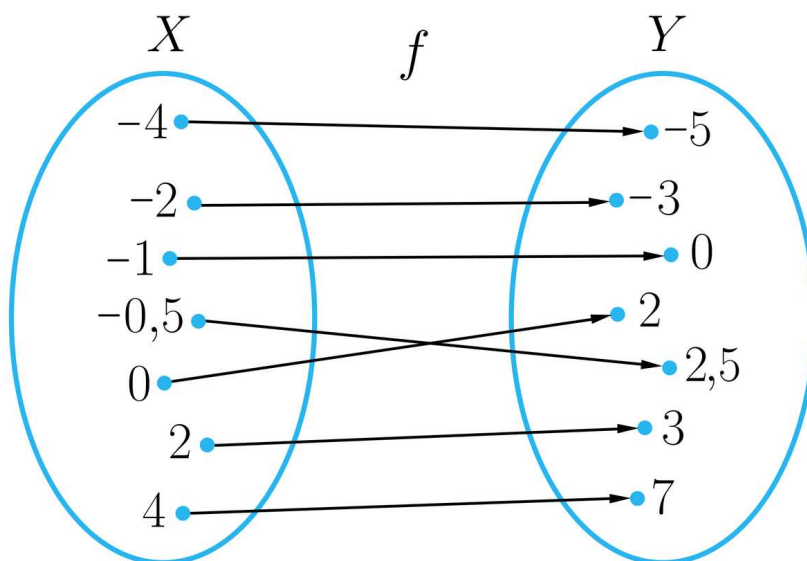
Definicja: Zbiór miejsc zerowych funkcji

Zbiorem miejsc zerowych funkcji nazywamy zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartość 0.

Wiemy, że funkcję możemy opisywać różnymi sposobami. Poznamy sposoby wyznaczania miejsca zerowego funkcji w zależności od sposobu jej opisu. Pomogą nam w tym poniższe przykłady.

Przykład 1

Funkcja f opisana jest za pomocą grafu.



Wyznamy jej miejsce zerowe.

Rozwiązanie

Wśród wartości funkcji f , które są umieszczone w prawej części grafu oznaczonej literą Y , szukamy liczby 0.

W następnym kroku przesuwamy się wzdłuż strzałki do lewej części grafu oznaczonej literą X .

Liczba $0 \in Y$ połączona jest z liczbą $-1 \in X$.

Stąd możemy zapisać, że miejscem zerowym funkcji f jest liczba -1 . Często miejsce zerowe oznaczamy x_0 . Możemy więc zapisać, że $x_0 = -1$.

Przykład 2

Funkcja f opisana jest za pomocą tabelki.

x	5, 5	-3, 6	-1, 4	0	1, 3	2, 6	3	4, 7	5
$f(x)$	-2	-1	0	2	3, 5	4, 6	5, 8	6	8

Wyznamy jej miejsce zerowe.

Rozwiązanie

W drugim wierszu, oznaczonym symbolem $f(x)$, szukamy liczby 0.

Następnie w wierszu pierwszym, oznaczonym symbolem x , szukamy odpowiedniego argumentu.

Jest nim liczba $-1, 4$.

Stąd możemy zapisać, że miejscem zerowym funkcji f jest liczba $-1, 4$.

Zapisujemy to symbolicznie $x_0 = -1, 4$.

Przykład 3

Funkcja f przedstawiona jest za pomocą opisu słownego. Funkcja f każdej liczbie rzeczywistej x , takiej, że $x \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ przyporządkowuje różnicę wartości bezwzględnej liczby x i liczby 3.

Wyznamy jej miejsce zerowe.

Rozwiązanie

Przykład ten możemy rozwiązać dwoma sposobami.

Sposób pierwszy

Ponieważ do dziedziny należy tylko siedem liczb, to możemy wykonać tabelkę i z tabelki odczytać miejsce zerowe.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1	0	-1	-2	-3	-2	-1

Zauważamy, że miejscem zerowym funkcji f jest liczba -3 .

Zapisujemy symbolicznie $x_0 = -3$.

Sposób drugi

Zapiszemy funkcję f za pomocą wzoru.

$$f(x) = |x| - 3, \text{ gdy } x \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}.$$

Rozwiążemy równanie $f(x) = 0$.

$$|x| - 3 = 0$$

$$|x| = 3$$

$$x = -3 \text{ lub } x = 3.$$

Równanie jest spełnione przez dwie liczby 3 i -3 .

Sprawdzamy, która z liczb spełniających równanie, należy do dziedziny funkcji.

Do dziedziny funkcji należy liczba -3 .

Stąd miejscem zerowym funkcji f jest liczba -3 .

Zapisujemy symbolicznie $x_0 = -3$.

Przykład 4

Funkcja f opisana jest za pomocą zbioru par uporządkowanych.

$$\{(-4,4; -2,4), (-3,7; -1,7), (-2; 0), (1; 1), (3,3; 5,3), (5; 7)\}$$

Wyznamy **miejsce zerowe funkcji f** .

Rozwiązanie

Para uporządkowana jest postaci $(x, f(x))$, tzn., że na pierwszym miejscu w każdej parze znajduje się element należący do dziedziny funkcji, a na drugim odpowiadająca temu elementowi wartość funkcji.

Wśród elementów zbioru par uporządkowanych wybieramy tę parę, w której na drugim miejscu jest 0.

Jest to para to para $(-2, 0)$.

Stąd miejscem zerowym funkcji f jest liczba -2 .

Zapisujemy symbolicznie $x_0 = -2$.

Ile miejsc zerowych może posiadać funkcja liczbowa?

Odpowiedź na to pytanie uzyskamy analizując kolejne przykłady.

Przykład 5

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru.

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot |x - 3| + 3, \text{ gdy } x \in \langle -4, 10 \rangle.$$

Wyznamy jej miejsce zerowe.

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć **miejsce zerowe funkcji** f należy rozwiązać równanie $f(x) = 0$ i sprawdzić, czy otrzymane pierwiastki równania należą do dziedziny funkcji.

$$-\frac{1}{2} \cdot |x - 3| + 3 = 0$$

$$-\frac{1}{2} \cdot |x - 3| = -3 \quad | \cdot (-2)$$

$$|x - 3| = 6$$

$$x - 3 = -6 \vee x - 3 = 6$$

$$x = -3 \vee x = 9$$

Otrzymaliśmy dwie liczby, które spełniają równanie $f(x) = 0$.

Sprawdzamy, która z liczb należy do dziedziny funkcji f .

Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle -4, 10 \rangle$.

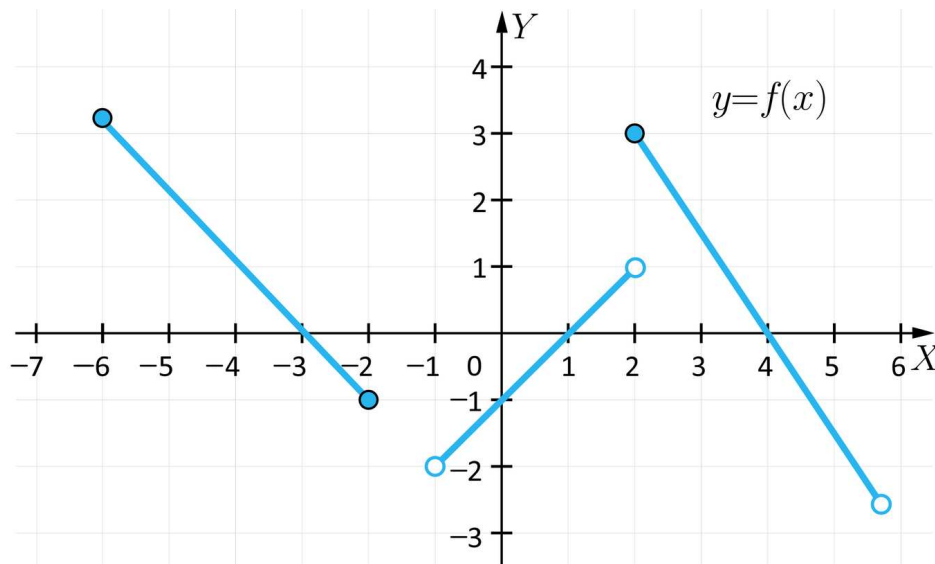
Zarówno liczba -3 , jak i liczba 9 należą do dziedziny funkcji.

Stąd wniosek, że funkcja f ma dwa miejsca zerowe: -3 i 9 .

Zapisujemy to symbolicznie $x_{0_1} = -3$, $x_{0_2} = 9$.

Przykład 6

Funkcja f opisana jest za pomocą wykresu.



Wyznamy jej miejsce zerowe.

Rozwiązanie

Wykres funkcji f przecina oś X w trzech punktach: $(-3, 0)$, $(1, 0)$, $(4, 0)$.

Funkcja ta ma trzy miejsca zerowe: $-3, 1, 4$.

Podsumujmy nasze wiadomości

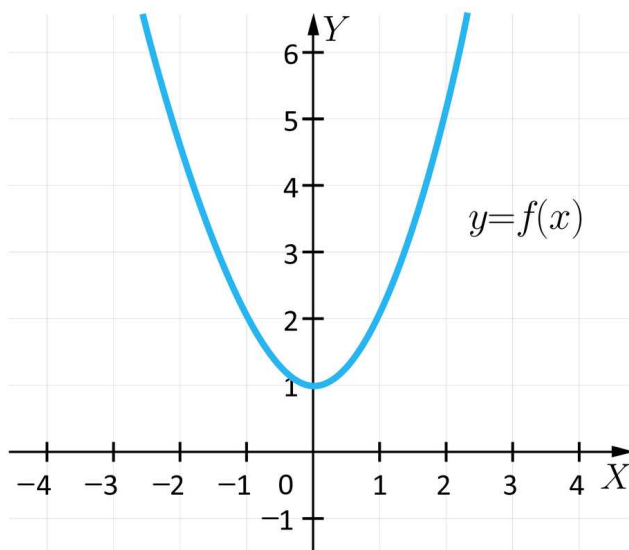
- Jeżeli funkcja opisana jest za pomocą grafu, to miejscem zerowym funkcji jest argument, należący do zbioru oznaczonego literą X , który jest połączony strzałką z liczbą 0 znajdującą się w zbiorze Y .
- Jeżeli funkcja opisana jest za pomocą tabelki, to miejscem zerowym funkcji jest argument, zapisany w wierszu pierwszym, oznaczonym symbolem x , któremu odpowiada wartość funkcji równa 0 .
- Jeżeli funkcja opisana jest za pomocą wzoru, to **miejscem zerowym funkcji** jest pierwiastek równania $f(x) = 0$ wtedy, gdy należy on do dziedziny funkcji f .
- Jeżeli funkcja opisana jest za pomocą wykresu, to miejscem zerowym funkcji jest pierwsza współrzędna wykresu funkcji i osi X .
- Jeżeli funkcja opisana jest za pomocą zbioru par uporządkowanych, to miejscem zerowym funkcji jest liczba, zapisana na pierwszym miejscu w tej parze, w której na drugim miejscu znajduje się 0 .

Czy każda funkcja liczbowa posiada miejsce zerowe?

W odpowiedzi na powyższe pytanie pomoże nam kolejny przykład.

Przykład 7

Funkcja f opisana jest za pomocą wykresu.



Wyznamy, o ile istnieje, miejsca zerowe funkcji f .

Rozwiązanie

Wyznamy zbiór wartości funkcji f .

Odczytujemy go na osi Y .

$$ZW_f = \langle 1, \infty \rangle.$$

Możemy zauważyć, że $0 \notin ZW_f$.

Wynika z tego, że funkcja f nie posiada miejsca zerowego.

Ważne!

Pamiętajmy, że funkcja będzie posiadała miejsce zerowe tylko wtedy, gdy do zbioru wartości tej funkcji będzie należała liczba 0.

Słownik

miejsce zerowe funkcji

argument, dla którego wartość funkcji jest równa zero

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj uważnie przykłady przedstawione w animacji. Spróbuj samodzielnie rozwiązać wskazane zadania, następnie porównaj swoje rozwiązania z tymi, które przedstawione są w animacji.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DerLpIZ5U>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego miejsca zerowego funkcji.

Po przeanalizowaniu przykładów przedstawionych w animacji, wykonaj poniższe polecenia.

Polecenie 2

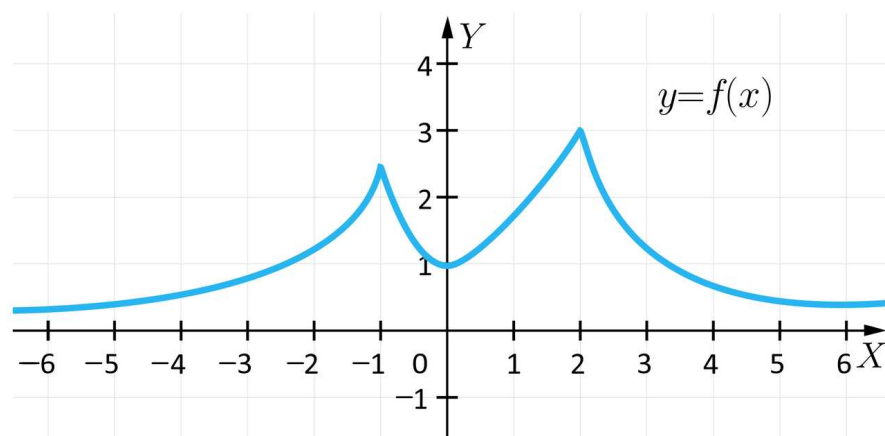
Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru.

$$f(x) = |x + 4| - 1, \text{ gdy } x \in \langle -4, 6 \rangle.$$

Wyznacz jej miejsce zerowe.




Polecenie 3

Funkcja f opisana jest za pomocą wykresu.



Wyznacz jej miejsce zerowe.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1

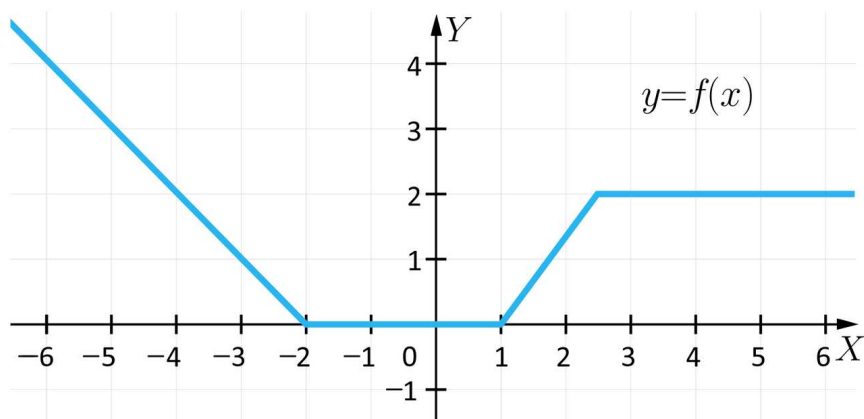


Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3

Funkcja f opisana jest za pomocą wykresu.



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Anna Jeżewska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Miejsce zerowe funkcji i sposoby jego wyznaczania

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje. Zakres podstawowy.

Uczeń:

2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym;

3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł informacji.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza miejsca zerowe funkcji opisanej różnymi sposobami
- sprawdza, czy dana liczba jest miejscem zerowym funkcji
- udowadnia, że dana liczba jest miejscem zerowym funkcji

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- metoda diamentowego uszeregowania
- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele lekcji oraz ustala z uczniami kryteria osiągnięcia sukcesu.
2. Uczniowie, pracując w grupach, metodą diamentowego uszeregowania porządkują poznane dotychczas sposoby wyznaczania zbioru wartości funkcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie samodzielnie analizują przykłady zamieszczone w sekcji „Przeczytaj”.
2. Po upływie wyznaczonego czasu łączą się w pary i porównują między sobą własne przypuszczenia. Następnie, podzieleni na dwie grupy, uzgadniają wnioski i przedstawiają je na forum klasy.
3. Uczniowie oglądają animację przedstawiającą sposoby wyznaczania miejsca zerowego funkcji opisanej za pomocą wzoru, grafu, tabelki, zbioru par uporządkowanych oraz wykresu i rozwiązują samodzielnie wskazane polecenia.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela i wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jeden z uczniów podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazując na mocne i słabe strony pracy uczniów.
3. Nauczyciel ocenia indywidualną pracę i zaangażowanie poszczególnych uczniów.

Praca domowa:

1. Uczniowie rozwiązują w domu ćwiczenia, których nie rozwiązywali w czasie zajęć.

2. Zadanie dla chętnych:

Wyznacz miejsce zerowe funkcji przedstawionej za pomocą opisu słownego. Funkcja f każdej liczbie rzeczywistej x takiej, że $x \in (-4, 8)$, przyporządkowuje różnicę połowy jej kwadratu i liczby 8.

Materiały pomocnicze:

[Miejsce zerowe funkcji](#)

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może wykorzystać animację do pracy w parach lub w grupach. Uczniowie przygotowują swoje propozycje, a następnie prezentują je na forum klasy.