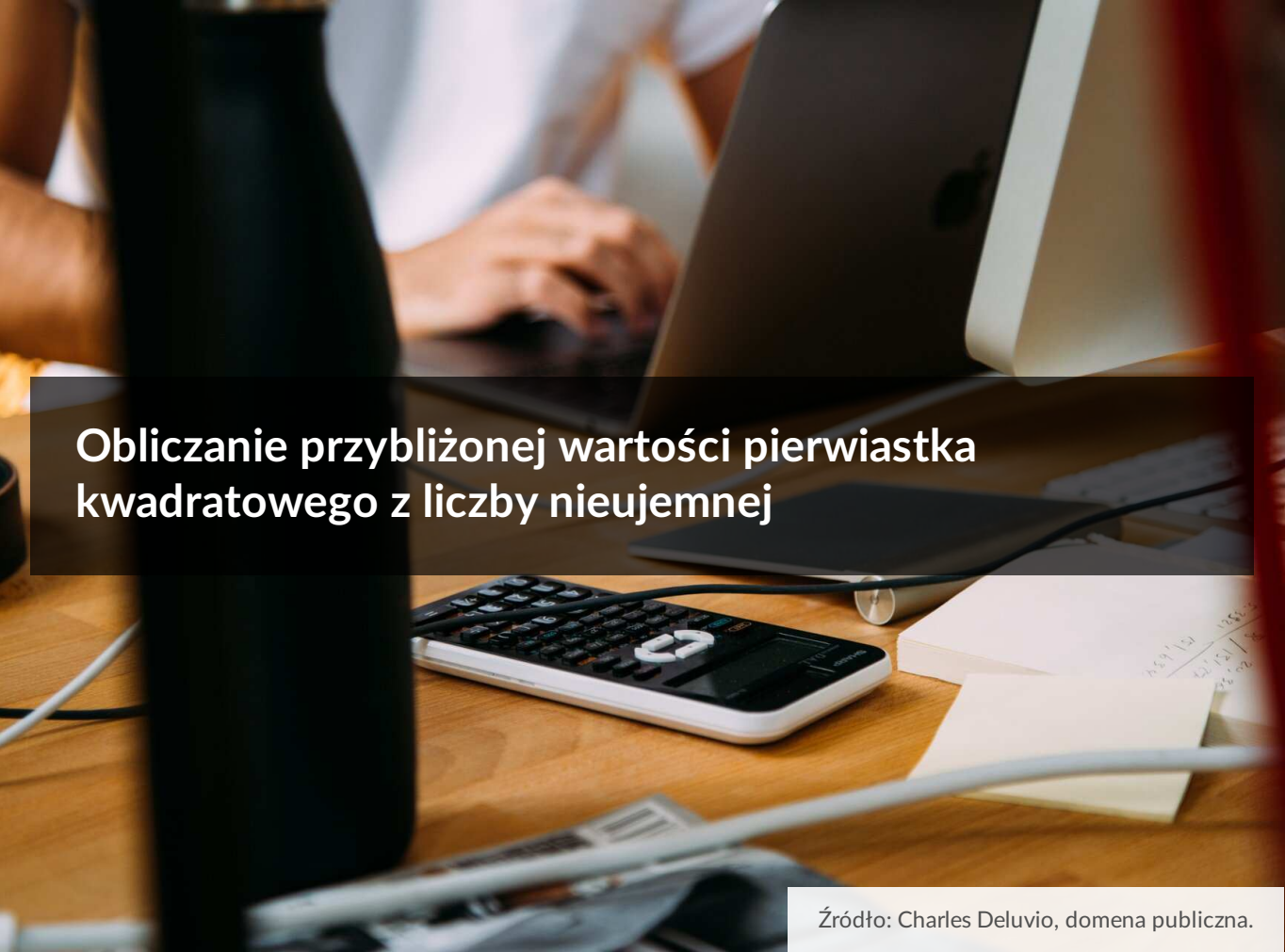




Obliczanie przybliżonej wartości pierwiastka kwadratowego z liczby nieujemnej

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Obliczanie przybliżonej wartości pierwiastka kwadratowego z liczby nieujemnej

Źródło: Charles Deluvio, domena publiczna.

Wiesz z lekcji matematyki, na czym polega operacja pierwiastkowania. W tym e-materiale zapoznamy się z jednym z algorytmów obliczania wartości pierwiastka kwadratowego, znanym jako metoda Newtona-Raphsona. Metoda ta pozwala wyznaczyć przybliżoną wartość pierwiastka kwadratowego z nieujemnej liczby rzeczywistej.

Implementację tego algorytmu w poszczególnych językach programowania przedstawiamy w e-materiałach:

- [Obliczanie przybliżonej wartości pierwiastka kwadratowego z liczby nieujemnej w języku C++](#),
- [Obliczanie przybliżonej wartości pierwiastka kwadratowego z liczby nieujemnej w języku Java](#),
- [Obliczanie przybliżonej wartości pierwiastka kwadratowego z liczby nieujemnej w języku Python](#).

Więcej zadań? Przejdź do e-materiału [Obliczanie przybliżonej wartości pierwiastka kwadratowego z liczby nieujemnej – zadania maturalne](#).

Twoje cele

- Scharakteryzujesz algorytm „liczenia w słupku” – prostą metodę obliczania pierwiastka kwadratowego z liczby nieujemnej.

- Przeanalizujesz algorytm Newtona-Raphsona, wyznaczający przybliżoną wartość pierwiastka kwadratowego z liczby nieujemnej.
- Wyjaśnisz, jak powinna wyglądać konstrukcja algorytmu Newtona-Raphsona w arkuszach kalkulacyjnych oraz w programach.

Przeczytaj

Pierwiastek kwadratowy

Pierwiastkowanie to operacja odwrotna do potęgowania. Pierwiastek stopnia n z liczby a będzie równy liczbie b , która podniesiona do potęgi n , da nam liczbę a .

$$\sqrt[n]{a} = b$$

$$b^n = a$$

W przypadku, gdy stopień pierwiastka n równy jest 2, mówimy o pierwiastku kwadratowym. Oznaczamy go za pomocą symbolu $\sqrt{}$, pomijając wpisywanie stopnia w lewym górnym rogu znaku. Pamiętajmy, że w wypadku pierwiastka kwadratowego zakładamy, że liczby a oraz b są nieujemne. Przeanalizujmy prosty przykład:

Przykład 1

Wybraną liczbę poddamy operacji pierwiastkowania kwadratowego. Będzie to 36. Znajdźmy liczbę nieujemną, której podniesienie do kwadratu da 36. W tym wypadku wystarczy znajomość tabliczki mnożenia – szukaną wartością będzie oczywiście 6.

$$\sqrt{36} = 6$$

$$6^2 = 6 \cdot 6 = 36$$

Przypomnieliśmy, czym są pierwiastki kwadratowe, zatem możemy przejść do algorytmu ich obliczania.

Obliczanie pierwiastka kwadratowego

Algorytm matematyczny – „liczenie w słupku”

Obliczając wartość pierwiastka kwadratowego, zwykle sięgamy do swojej pamięci bądź – w przypadku trudniejszych przykładów – korzystamy z kalkulatora. Tworząc programy, możemy stosować też biblioteki, dzięki którym da się przeprowadzić pierwiastkowanie z użyciem jednej funkcji. W rzeczywistości istnieje sporo algorytmów, których użycie umożliwia ręczne obliczenie wartości pierwiastków. Przeanalizujmy jedną z prostszych

Przykład 2

Mamy obliczyć pierwiastek kwadratowy z liczby 207, 0721, dysponując jedynie kartką papieru i długopisem. Czekające nas obliczenia mogą wydawać się skomplikowane, jednak by ułatwić sobie zadanie, skorzystamy z omawianego algorytmu.

Kolejne kroki algorytmu:

Kolejne kroki algorytmu:

- Kolejne cyfry wyniku będziemy wpisywać nad pierwiastkowaną liczbą, przy czym nad każdą parą pojawiać się będzie dokładnie jedna odpowiadająca jej cyfra. Dodatkowo sam przecinek również zachowa swoją pozycję.

02 | 07 | , | 07 | 21 |

- Możemy teraz przejść do właściwych obliczeń. Wykonamy serię identycznych działań dla każdej z par, rozpoczynając od pierwszego segmentu z lewej strony i przemieszczając się w prawo. Będziemy operować na wartości tzw. reszty – zmiennej oznaczanej literą r . Dotychczasową resztę (która w przypadku rozpatrywania pierwszego segmentu jest zawsze równa 0) mnożymy razy 100 i dodajemy do niej daną parę. Wynik tej operacji jest nową resztą. Dla pierwszej pary – czyli |02| – opisane działanie prezentuje się następująco:

$$100 \cdot 0 + 2 = 2$$

- Otrzymaną resztę zapiszemy pod rozpatrywaną parą:

			,		
--	--	--	---	--	--

02	07	,	07	21
----	----	---	----	----

02

Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

- Od teraz dotychczasowy wynik pierwiastkowania oznaczać będziemy jako w (nie uwzględniamy w nim przecinka). Naszym celem jest znalezienie największej naturalnej liczby a oraz liczby b , opisywanych przez warunki:

$$b = (20 \cdot w + a) \cdot a$$

$$b \leq r$$

- Podstawiamy dane:

$$b = (20 \cdot 0 + a) \cdot a = a^2$$

$$a^2 \leq 2$$

- Największą liczbą naturalną spełniającą ten warunek jest 1, w takim razie $a = 1$. Wartości liczby a dla kolejnych par są poszukiwanymi cyframi wyniku. Obliczamy teraz wartość b :

$$b = (20 \cdot 0 + 1) \cdot 1 = 1^2 = 1$$

- Pierwszą serię działań zakończy odjęcie liczby b od obecnej wartości reszty, a następnie nadpisanie otrzymanym wynikiem wartości reszty. Jeżeli po przeprowadzeniu działania uzyskaliśmy liczbę 0 i rozpatrzyliśmy już każdą z par, wówczas algorytm kończy się, a zapisany na górze słupka wynik uznajemy za końcowy. Jeśli zaś wynik reszty nie jest równy 0, a rozpatrzyliśmy już każdą z dotychczasowych par, niezbędne jest dopisanie kolejnego segmentu wypełnionego zerami – |00|.

Uzyskana cyfra wyniku

1		,		
02	07	,	07	21
- 01 01				

Obliczona wartość reszty

Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Przedstawione działania powtarzamy dla kolejnych par, aż do otrzymania pełnego wyniku. Poniżej zaprezentowane zostały wyniki oraz konstrukcja słupka dla każdego z segmentów.

$$\begin{array}{r}
 | \quad 1 \quad | \quad | \quad , \quad | \quad | \quad | \\
 \hline
 | \quad 02 \quad | \quad 07 \quad | \quad , \quad | \quad 07 \quad | \quad 21 \quad | \\
 \\
 \begin{array}{r}
 02 \\
 - 01 \\
 \hline
 01
 \end{array}
 \end{array}$$

Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Pierwsza seria działań (dla pary |02|):

$$b = (20 \cdot 1 + a) \cdot a = 20a + a^2$$

$$a^2 \leq 2$$

$$a = 1$$

$$b = (20 \cdot 0 + 1) \cdot 1 = 1$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 4 & , & \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 02 & 07 & , & 07 & 21 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{r}
 02 \\
 - 01 \\
 \hline
 01 \quad 07 \\
 - 00 \quad 96 \\
 \hline
 11
 \end{array}
 \end{array}$$

Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Druga seria działań (dla pary |07|):

$$b = (20 \cdot 1 + a) \cdot a = 20a + a^2$$

$$20a + a^2 \leq 107$$

$$a \leq 4,39$$

$$a = 4$$

$$b = (20 \cdot 1 + 4) \cdot 4 = 96$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 4 & , & 3 & \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 02 & 07 & , & 07 & 21 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{r}
 02 \\
 - 01 \\
 \hline
 01 \quad 07 \\
 - 00 \quad 96 \\
 \hline
 11 \quad 07 \\
 - 08 \quad 49 \\
 \hline
 02 \quad 58
 \end{array}
 \end{array}$$

Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Trzecia seria działań (dla pary |07|):

$$b = (20 \cdot 14 + a) \cdot a = 280a + a^2$$

$$280a + a^2 \leq 1107$$

$$a \leq 3,90$$

$$a = 3$$

$$b = (20 \cdot 14 + 3) \cdot 3 = 849$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 4 & , & 3 & 9 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 02 & 07 & , & 07 & 21 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 02 \\ - 01 \\ \hline 01 \ 07 \\ - 00 \ 96 \\ \hline 11 \ 07 \\ - 08 \ 49 \\ \hline 02 \ 58 \ 21 \\ - 02 \ 58 \ 21 \\ \hline 00 \end{array}$$

Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Czwarta seria działań (dla pary |21|):

$$b = (20 \cdot 143 + a) \cdot a = 2860a + a^2$$

$$2860a + a^2 \leq 25821$$

$$a \leq 9$$

$$a = 9$$

$$b = (20 \cdot 143 + 9) \cdot 9 = 25821$$

Realizacja algorytmu w programie – metoda Newtona-Raphsona

Algorytm „liczenia w słupku” należy do metod dokładnych, których implementacja jest czasochłonna i wymaga zaangażowania dużej ilości pamięci obliczeniowej komputera. W sytuacji gdy nie zależy nam na precyzyjnym wyniku, optymalną decyzją jest wybór [metody przybliżonej](#). Jedną z nich jest metoda Newtona-Raphsona.

Przeanalizujemy przedstawioną specyfikację oraz pseudokod, a następnie zapoznajmy się z opisem całego algorytmu.

Specyfikacja problemu:

Dane:

- a – liczba podpierwiastkowa; pole kwadratu, którego długość boku jest poszukiwanym pierwiastkiem; nieujemna liczba rzeczywista
- ϵ – bezwzględna wartość różnicy pomiędzy bokami prostokąta o polu powierzchni a , po której osiągnięciu przerywamy dalsze wyznaczanie pierwiastka i zwracamy ostatni otrzymany wynik; określa dokładność obliczeń; nieujemna liczba rzeczywista

Wynik:

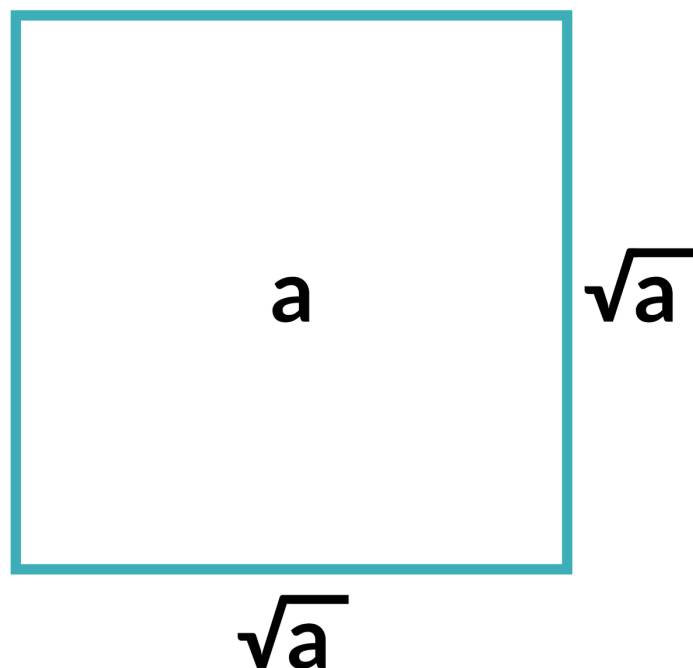
- b – wynik pierwiastkowania liczby a dla określonej wartości zmiennej ϵ ; liczba rzeczywista

```

1 a ← wprowadź liczbę
2 epsilon ← wprowadź liczbę
3 b ← a / 2
4 c ← a / b
5
6 dopóki |b - c| > epsilon wykonuj:
7     b ← (b + c) / 2
8     c ← a / b
9
10 zwróć b

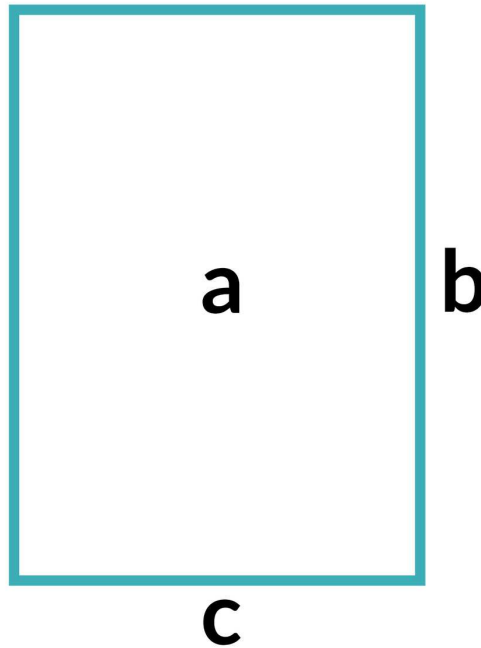
```

Podstawowym założeniem omawianej metody jest fakt, że wynik pierwiastkowania danej liczby będzie taki sam jak długość boku kwadratu o polu równym pierwiastkowanej liczbie.



Zatem jeżeli chcemy obliczyć pierwiastek z a , znajdujemy bok kwadratu o polu równym a .

Poszukiwania rozpoczynamy od prostokąta o bokach długości b i c .



Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Wartości te są równe:

$$b = \frac{a}{c}$$

$$c = \frac{a}{b}$$

W każdym kolejnym kroku wyznaczamy bok b ze średniej arytmetycznej długości boków b i c z poprzedniego kroku.

$$b = \frac{(b + c)}{2}$$

Długość boku c uzyskujemy, dzieląc pole przez długość boku b .

$$c = \frac{a}{b}$$

Etap ten powtarzamy, aż wartość bezwzględna różnicy pomiędzy obydwooma bokami osiągnie określoną przez nas precyzję. Wtedy końcowym wynikiem pierwiastkowania

będzie wartość b . Pamiętajmy jednocześnie, że im mniejsza jest wartość precyzji, tym dokładniejszy będzie końcowy rezultat.

$$|a - b| < \epsilon$$

Osiągnięcie konkretnej precyzji jest tylko jednym z dostępnych wariantów warunku zakończenia algorytmu. Dalsze wyznaczanie wartości pierwiastka b może być przerwane np. po wykonaniu zadanej maksymalnej liczby iteracji. Należy podkreślić, że te warunki niekoniecznie będą spełnione jednocześnie. Najprawdopodobniej program skończy się wówczas po wykonaniu maksymalnej liczby iteracji albo po osiągnięciu konkretnej precyzji. Pisząc program, możemy zatem zdecydować się z góry na zaimplementowanie tylko jednego z tych wariantów.

W sekcji „Symulacja interaktywna” dowiesz się, jak zrealizować omawiany algorytm za pomocą arkusza kalkulacyjnego.

Podsumowując: algorytm Newtona–Raphsona należy do tzw. metod iteracyjnych. Wyróżniamy dla niego dwa kryteria zakończenia obliczeń:

- wykonanie podanej liczby iteracji;
- sytuację, w której dwa kolejne przybliżenia leżą dostatecznie blisko siebie.

Słownik

część całkowita liczby

dla określonej liczby a największa liczba całkowita c spełniająca warunek:

$$c \leq a$$

część ułamkowa liczby

różnica określonej liczby a oraz jej części całkowitej c

metoda przybliżona

metoda, której celem nie jest dokładny wynik, a jedynie oszacowanie przybliżonego wyniku

stopień pierwiastka

wykładnik potęgi będącej operacją odwrotną do konkretnego przypadku pierwiastkowania (np. potęga o wartości wykładnika równej 5 będzie operacją odwrotną w stosunku do pierwiastka o stopniu równym 5)

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Zapoznaj się z procesem implementacji metody Newtona-Raphsona realizującej w programach Microsoft Excel oraz LibreOffice obliczanie przybliżonej wartości pierwiastka kwadratowego z liczby nieujemnej. Przeanalizuj kolejne kroki tego procesu, starając się jednocześnie zastosować poszczególne operacje we własnym arkuszu kalkulacyjnym.

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/PaUc6Sc9b>

1

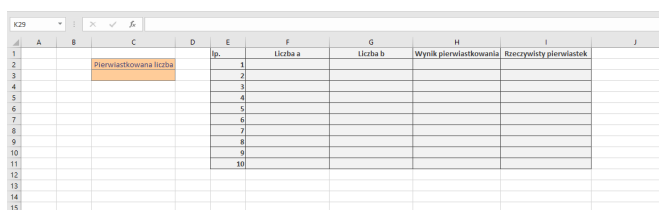
Zapoznaliśmy się już z metodą Newtona-Raphsona oraz dowiedzieliśmy się, jak powinna wyglądać jej implementacja w programie. Przeanalizujemy teraz proces realizacji algorytmu w programach Microsoft Excel oraz LibreOffice (w obu przypadkach przebiega ona identycznie, różnią się jedynie nazwy funkcji).

2

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/PaUc6Sc9b>

W pierwszym kroku przygotujemy komórkę, której zadaniem będzie przechowywanie naszej danej wejściowej, czyli pierwiastkowanej liczby. W celu uproszczenia algorytmu zrezygnujemy z ustalania odgórnej precyzji, zamiast tego obliczymy wynik pierwiastkowania dziesięciokrotnie dla kolejnych obliczanych wartości parametrów **a** i **b**. Dodatkowo wyliczymy, jaki rezultat otrzymamy, podnosząc wynik uzyskany w danym kroku do kwadratu. W ten sposób możliwe będzie stwierdzenie, w którym obiegu pętli otrzymaliśmy wartość zbliżoną lub równą danej wejściowej.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1			Pierwiastkowana liczba		lp.	Liczba a	Liczba b	Wynik pierwiastkowania	Rzeczywisty pierwiastek	
2					1					
3					2					
4					3					
5					4					
6					5					
7					6					
8					7					
9					8					
10					9					
11					10					
12										
13										
14										
15										

3

Graficzny format przygotowanych komórek

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/PaUc6Sc9b>

4

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/PaUc6Sc9b>

Zacznijmy od wyliczenia pierwszej wartości parametru **a**. Musimy pamiętać, że wciąż korzystamy z tych samych wzorów, które opisywaliśmy w przypadku pseudokodu. Wystarczy odwołać się więc do komórki, w której znajduje się pierwiastkowana wartość (C3), a następnie podzielić ją przez dwa ($=C3 / 2$).

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/PaUc6Sc9b>

5

Parametr **b** obliczamy w każdym przypadku tak samo, czyli dzielimy liczbę przekazaną do pierwiastkowania (C3) przez aktualną wartość **a** (F2). Powtarzalność tej metody pozwala błyskawicznie zastosować ją do przedstawionych komórek. Należy jednak pamiętać, że przy adresacji względnej

opisywana opcja dynamicznie zmienia komórki zawarte w naszej formule – np. jeżeli w komórce G2 zastosowaliśmy formułę $=C3/F2$, to w komórce G3 będzie ona już odwoływała się do komórek C4 oraz F3 i będzie wyglądać następująco $=C4/F3$. Zdajemy sobie sprawę, że wartość parametru a będzie ulegać zmianie, natomiast pierwiastkowana liczba już nie, dlatego w formule należy ją „zablokować” poprzez zastosowanie adresacji bezwzględnej $\$C\3 . Cała formuła zawarta w komórce G2 wygląda następująco: $=\$C\$3/F2$. Możemy teraz zastosować ją dla komórek w kolejnych wierszach.

6

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/PaUc6Sc9b>

Wciąż brakuje nam pozostałych wartości parametru a . Do ich pozyskania wykorzystamy wzór $a = \frac{a+b}{2}$. W komórce F3 zapisujemy formułę $= (F2+G2) / 2$, a następnie zastosowujemy ją do następnych komórek. Wiemy, że za wynik pierwiastkowania przyjmowana będzie wartość parametru a , dlatego w H2 stosujemy formułę $=F2$ i ponownie błyskawicznie wypełniamy komórki w wierszach.

7

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/PaUc6Sc9b>

Ostatnim krokiem będzie wypełnienie kolumny „Rzeczywisty pierwiastek” wartościami kolumny „Wynik pierwiastkowania”

podniesionymi do kwadratu (należy wykorzystać formułę $H2^2$ i zastosować ją do kolejnych komórek). Możemy już teraz sprawdzić, jak nasz algorytm radzi sobie z przykładową wartością pierwiastka, np. 16.

8

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1					lp.	Liczba a	Liczba b	Wynik pierwiastkowania	Rzeczywisty pierwiastek
2			Pierwiastkowana liczba		1	8	2	8	64
3			16,00		2	5	3,2	5	25
4					3	4,1	3,902439024	4,1	16,81
5					4	4,001219512	3,998780859	4,001219512	16,00975758
6					5	4,000000186	3,999999814	4,000000186	16,000000149
7					6	4	4	4	16
8					7	4	4	4	16
9					8	4	4	4	16
10					9	4	4	4	16
11					10	4	4	4	16
12									
13									
14									

Wyniki dla przykładowej wartości pierwiastka równej 16

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/PaUc6Sc9b>

Materiał audio dostępny pod adresem:

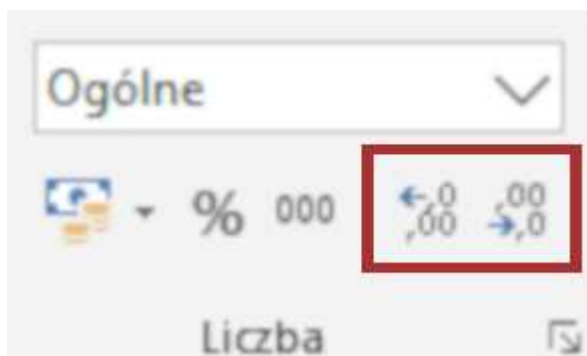
<https://zpe.gov.pl/b/PaUc6Sc9b>

9

Musimy pamiętać, że na dokładność wyświetlanych wyników ma wpływ również formatowanie komórek, w tym głównie funkcje:

- o „Zwiększ dziesiętne” i „Zmniejsz dziesiętne” dla Microsoft Excel
- o „Dodaj miejsce dziesiętne” i „Usuń miejsce dziesiętne” dla LibreOffice

10



Opcje „Zwiększ dziesiętne” i „Zmniejsz dziesiętne”

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/PaUc6Sc9b>



11

Opcje „Dodaj miejsce dziesiętne” i „Usuń miejsce dziesiętne”

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/PaUc6Sc9b>

Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Realizacja arkusza w programie Microsoft Excel:

Plik o rozmiarze 10.40 KB w języku polskim

Realizacja arkusza w oprogramowaniu LibreOffice:

Plik o rozmiarze 35.46 KB w języku polskim

Polecenie 2

Przygotuj symulację przedstawiającą, jak zmienia się przybliżona wartość pierwiastka liczby a obliczonego za pomocą algorytmu Newtona–Raphsona z dokładnością ϵ dla n iteracji. Symulacja powinna przedstawiać wykres dla $a = 27$.

Po ilu iteracjach algorytm powinien skończyć działanie dla $\epsilon = 0.0001$?

Specyfikacja problemu:

Dane:

ϵ – nieujemna liczba rzeczywista

n – liczba naturalna

a – nieujemna liczba rzeczywista

Wynik:

b – liczba rzeczywista

Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Rozwiązanie

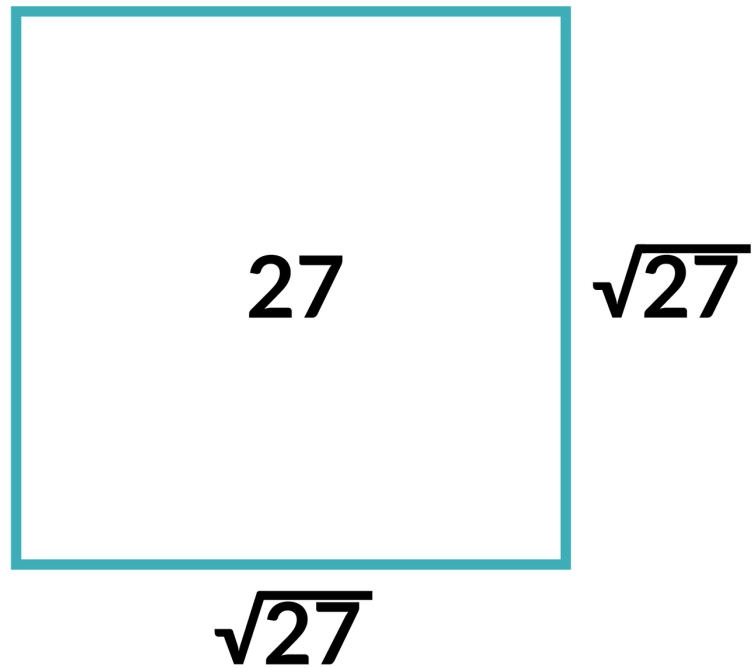
Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Ważne!

W rozwiązaniu pominięto trzy ostatnie wiersze tabeli – wartości powtarzają się.

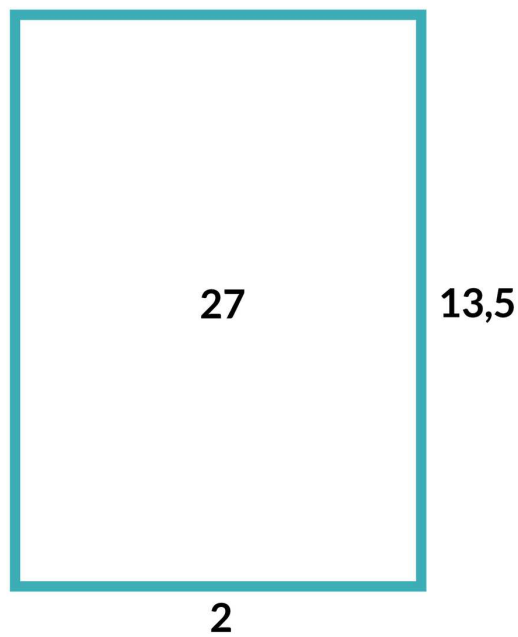
Interpretacja graficzna rozwiązania

Na początku działania algorytmu



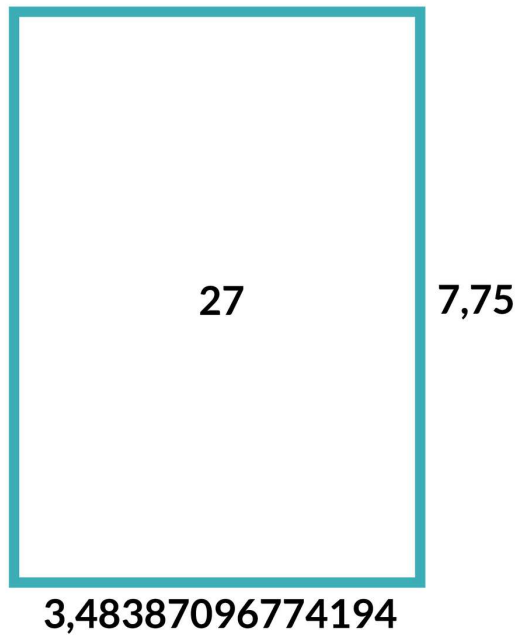
Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Po pierwszej iteracji



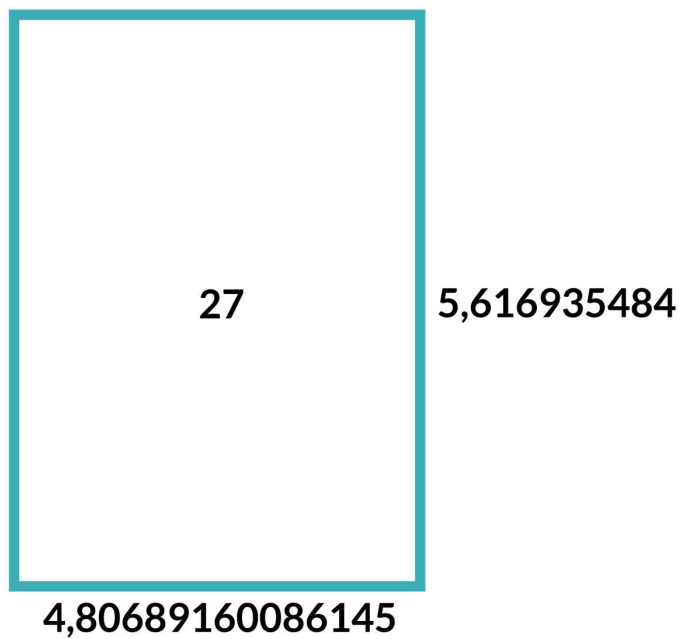
Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Po drugiej iteracji



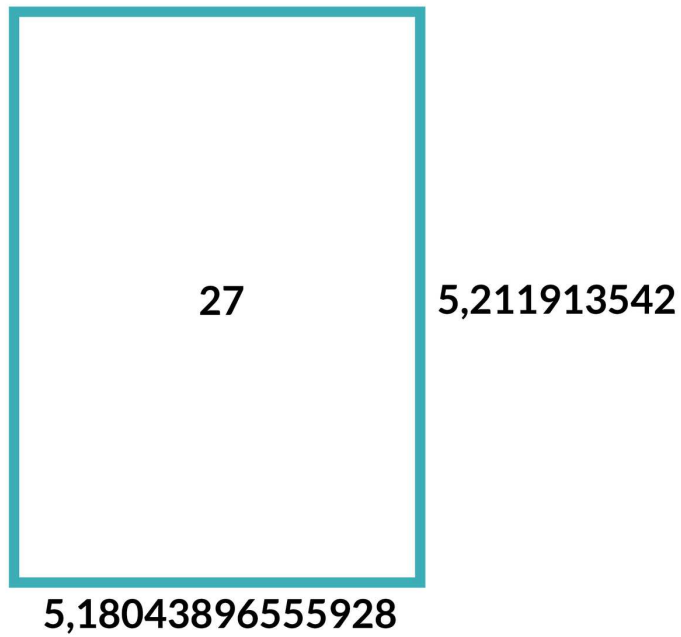
Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Po trzeciej iteracji



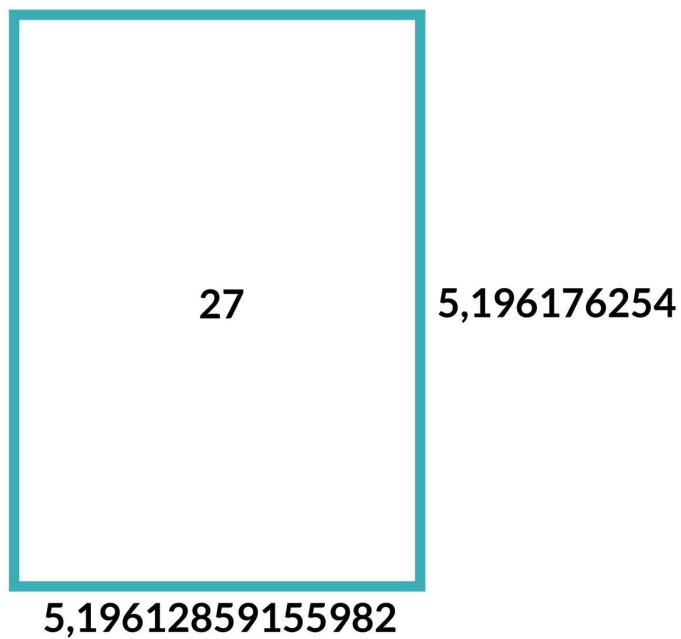
Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Po czwartej iteracji



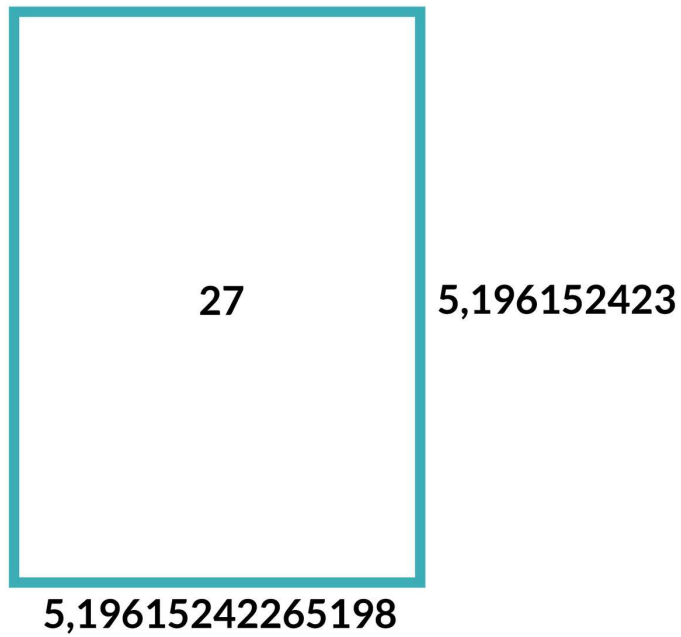
Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Po piątej iteracji



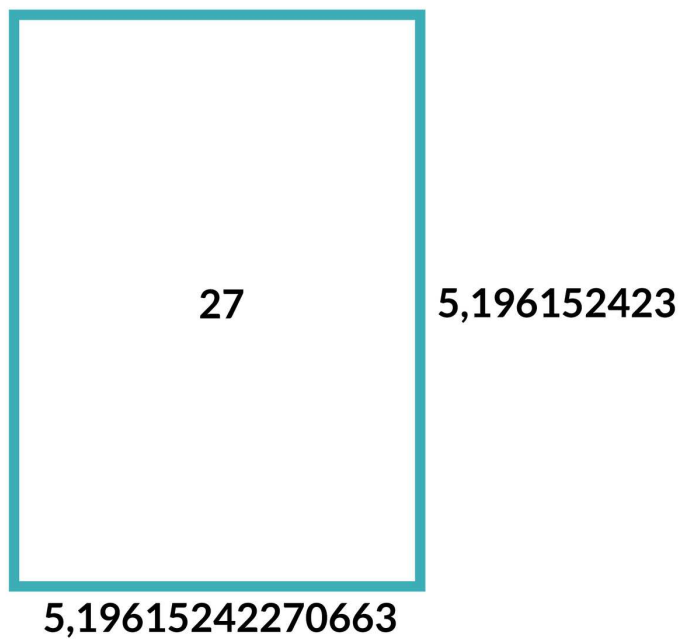
Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Po szóstej iteracji



Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Po siódmej iteracji



Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wskaż, które zdania na temat pierwiastków są prawdziwe. Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

- ☐ Stopień pierwiastka kwadratowego może przyjmować dowolne wartości.
- ☐ Implementacja pierwiastkowania w programach komputerowych jest możliwa tylko z użyciem konkretnych bibliotek.
- ☐ Istnieją algorytmy pozwalające obliczyć pierwiastek kwadratowy ręcznie.
- ☐ Potęgowanie jest operacją odwrotną w stosunku do pierwiastkowania.

Ćwiczenie 2



Zaznacz poprawną odpowiedź. Wskaż, która z metod nie służy do obliczania wartości pierwiastka kwadratowego.

- ☐ liczenie w słupku
- ☐ cyfra po cyfrze
- ☐ metoda Newtona-Raphsona
- ☐ metoda najmniejszych kwadratów

Ćwiczenie 3



Uporządkuj kolejne kroki fragmentu algorytmu „liczenia w słupku”.

Dotychczasową resztę mnożymy przez 100 i dodajemy do niej rozpatrywaną parę.



Jeżeli nowa wartość reszty wynosi 0 i rozpatrzyliśmy już wszystkie pary, algorytm dobiega końca.



Wyliczamy liczby **a** oraz **b** opisywane m.in. zależnością $b = (20 \cdot w + a) \cdot a$.



Liczbę **a** zapisujemy jako kolejną cyfrę naszego wyniku, zaś liczbę **b** wykorzystujemy do obliczenia nowej wartości reszty.



Ćwiczenie 4



Oblicz, z użyciem dowolnego algorytmu, wartości pierwiastków kwadratowych, a następnie wpisz rozwiązania w pustych miejscach. Do obliczeń możesz wykorzystać algorytm Newtona-Raphsona.

$$\sqrt{3249} = \text{[input box]}$$

$$\sqrt{2,89} = \text{[input box]}$$

$$\sqrt{46,24} = \text{[input box]}$$

Ćwiczenie 5



Wskaż, która z nierówności opisuje jeden z warunków wykonywania obliczeń pierwiastka metodą Newtona-Raphsona.

☐ $\varepsilon < \frac{(a+b)}{2}$

☐ $\varepsilon < |a - b|$

☐ $\varepsilon < a + b$

☐ $\varepsilon > (a + b) \cdot a$

Ćwiczenie 6



Wskaż, jaką uzyskamy wartość, obliczając pierwiastek kwadratowy z liczby 4,212 za pomocą metody Newtona-Raphsona oraz precyzji $\epsilon = 0,1$.

☐ 2

☐ 4

☐ 2,106

☐ 2,053

Ćwiczenie 7



Uzupełnij tekst właściwymi fragmentami.

Metoda „liczenia w słupku” określana jest również jako . Za jej pomocą można obliczyć . Dokładność naszych obliczeń .

metoda Newtona-Raphsona

wyznaczanie „cyfra po cyfrze”

dowolne pierwiastki

zależy od ustalonej precyzji

jest zawsze taka sama

tylko pierwiastki będące liczbami całkowitymi

Ćwiczenie 8



Uporządkuj wymiary prostokątów uzyskiwane podczas kolejnych kroków algorytmu, w którym wyliczamy pierwiastek kwadratowy z liczby 25 z użyciem metody Newtona-Raphsona.

7,25 x 3,45



5,01 x 4,99



5 x 5



5,35 x 4,67



12,5 x 2



Dla nauczyciela

Autor: Maurycy Gast

Przedmiot: Informatyka

Temat: Obliczanie przybliżonej wartości pierwiastka kwadratowego z liczby nieujemnej

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Cele kształcenia – wymagania ogólne

I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów na bazie logicznego i abstrakcyjnego myślenia, myślenia algorytmicznego i sposobów reprezentowania informacji.

II. Programowanie i rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem komputera oraz innych urządzeń cyfrowych: układanie i programowanie algorytmów, organizowanie, wyszukiwanie i udostępnianie informacji, posługiwanie się aplikacjami komputerowymi.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów.

Zakres podstawowy. Uczeń:

4) porównuje działanie różnych algorytmów dla wybranego problemu, analizuje algorytmy na podstawie ich gotowych implementacji;

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) do realizacji rozwiązania problemu dobiera odpowiednią metodę lub technikę algorytmiczną i struktury danych;

I + II. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) zapisuje za pomocą listy kroków, schematu blokowego lub pseudokodu, i implementuje w wybranym języku programowania, algorytmy poznane na wcześniejszych etapach oraz algorytmy:

g) obliczania przybliżonej wartości pierwiastka kwadratowego,

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne (językiem ucznia):

- Scharakteryzujesz algorytm „liczenia w słupku” – prostą metodę obliczania pierwiastka kwadratowego z liczby nieujemnej.
- Przeanalizujesz algorytm Newtona-Raphsona, wyznaczający przybliżoną wartość pierwiastka kwadratowego z liczby nieujemnej.
- Wyjaśnisz, jak powinna wyglądać konstrukcja algorytmu Newtona-Raphsona w arkuszach kalkulacyjnych oraz w programach.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem multimediu i ćwiczeń interaktywnych;
- ćwiczenia praktyczne.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. **Przygotowanie do zajęć.** Nauczyciel loguje się na platformie i udostępnia e-materiał: „Obliczanie przybliżonej wartości pierwiastka kwadratowego z liczby nieujemnej”. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Metodą burzy mózgów uczniowie referują najważniejsze informacje, jakie znaleźli w sekcji „Przeczytaj”, przygotowując się do lekcji.
2. Nauczyciel wprowadza uczniów szczegółowo w temat lekcji i jej cele. Może posłużyć się wyświetloną na tablicy zawartością sekcji „Wprowadzenie”.
3. Prowadzący prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią swoje pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. **Praca z tekstem.** Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Przeczytaj”. Na forum klasy uczniowie analizują przedstawione w niej rozwiązania Przykładów 1 i 2.
2. **Praca z multimediami.** Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Symulacja interaktywna”. Uczniowie wspólnie zapoznają się z przedstawionym krok po kroku procesem implementacji algorytmu Newtona-Raphsona w arkuszu kalkulacyjnym. Analizują go, jednocześnie starając się przenieść kolejne operacje do własnego arkusza kalkulacyjnego.
3. **Ćwiczenie umiejętności.** Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1–7 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel ponownie wyświetla na tablicy temat lekcji zawarty w sekcji „Wprowadzenie” i inicjuje krótką rozmowę na temat zrealizowanych celów (czego uczniowie się nauczyli).
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenie 8 z sekcji „Sprawdź się”.
2. Uczniowie wykonują Polecenie 2 z sekcji „Symulacja interaktywna”.

Wskazówki metodyczne:

- Uczniowie mogą wykorzystać treści w sekcjach: „Przeczytaj”, „Symulacja interaktywna”, „Sprawdź się” jako materiał do lekcji powtórkowej.