



Przykłady stycznych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Prezentacja multimedialna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Styczną do okręgu można zdefiniować jako prostą mającą z okręgiem dokładnie jeden punkt wspólny. W przypadku stycznej do wykresu funkcji takie określenie nie jest poprawne.

W tym materiale wyznaczymy styczne do wykresów różnych typów funkcji, odpowiemy również na pytanie, czy na pewno styczna ma tylko jeden punkt wspólny z wykresem funkcji oraz czy zawsze istnieje.

Twoje cele

- Wyznaczysz równania stycznych do wykresów wybranych funkcji.
- Wskażesz przykłady funkcji, dla których istnieją styczne mające z wykresem funkcji więcej niż jeden punkt wspólny.
- Podasz przykłady funkcji, dla których nie istnieje styczna do ich wykresu w określonym punkcie.

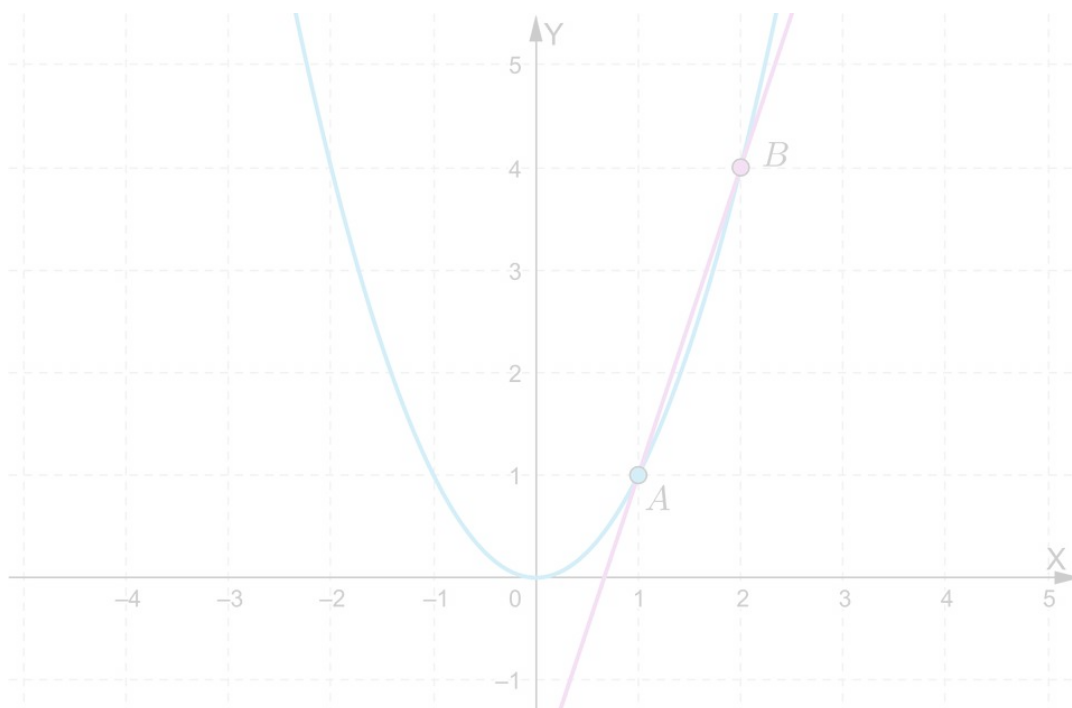
Geometryczna konstrukcja stycznej

Styczna do krzywej w zadanym punkcie to taka prosta, która w małym otoczeniu tego punktu ma przebieg podobny do przebiegu krzywej oraz w tym małym otoczeniu ma dokładnie jeden punkt wspólny z krzywą. Spróbujmy narysować taką styczną w przypadku konkretnej funkcji, a później wyznaczyć jej równanie.

Poprawne narysowanie stycznej w danym punkcie wymaga najpierw narysowania siecznych wykresu w okolicy tego punktu. Zróbmy to na konkretnym przykładzie – wyznaczmy równanie stycznej do wykresu funkcji $y = x^2$ w punkcie $(1, 1)$. Przypomnijmy sobie najpierw, że równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) jest postaci

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

Weźmy teraz pod uwagę punkt na wykresie, położony blisko wybranego punktu $(1, 1)$, na przykład $(1, 1; 1, 21)$. Sieczna, przechodząca przez te dwa punkty, będzie postaci $y = 2,1x - 1,1$. Rozważmy jeszcze bliższy punkt: $(1, 01; 1, 0201)$. Sieczna, przechodząca przez ten punkt oraz przez punkt początkowo wybrany $(1, 1)$, będzie dana wzorem $y = 2,01x - 1,01$. Podobnie, sieczna przechodząca przez ustalony punkt $(1, 1)$ oraz jeszcze bliższy $(1, 001; 1, 002001)$, będzie miała postać $y = 2,001x - 1,001$. Możemy ten proces prześledzić na poniższej symulacji.



Udowodnimy, że gdy będziemy się zbliżać z drugim punktem nieskończenie blisko do punktu $(1, 1)$, to równanie prostej siecznej będzie się nieskończenie mało różnić od równania $y = 2x - 1$, więc będzie to równanie prostej stycznej w tym punkcie.

Weźmy dowolnie małą liczbę dodatnią h i rozważmy dwa punkty: $A = (1, 1)$ i $B = (1 + h, (1 + h)^2)$, położone na wykresie funkcji $y = x^2$. Wyznamy najpierw współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty A i B . Będzie on wynosił

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(1+h)^2 - 1}{(1+h) - 1} = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h,$$

co jest zgodne z naszymi oczekiwaniami.

Współczynnik b będzie równy:

$$b = a \cdot (-x_1) + y_1 = (2 + h)(-1) + 1 = -1 - h,$$

co również jest zgodne z naszymi oczekiwaniami.

Jeżeli założymy teraz, że wybrana liczba h będzie dążyć do zera, to wartość a będzie dążyć do 2, a wartość b do (-1) i ostatecznie równanie prostej stycznej będzie postaci $y = 2x - 1$.

Przykład 1

Wyznamy równanie **stycznej do wykresu funkcji** $f(x) = x^3$ w punkcie $(1, 1)$.

Rozwiązanie

Weźmy dowolnie małą liczbę dodatnią h i rozważmy dwa punkty: $A = (1, 1)$ i $B = (1 + h, (1 + h)^3)$, położone na wykresie funkcji $f(x) = x^3$.

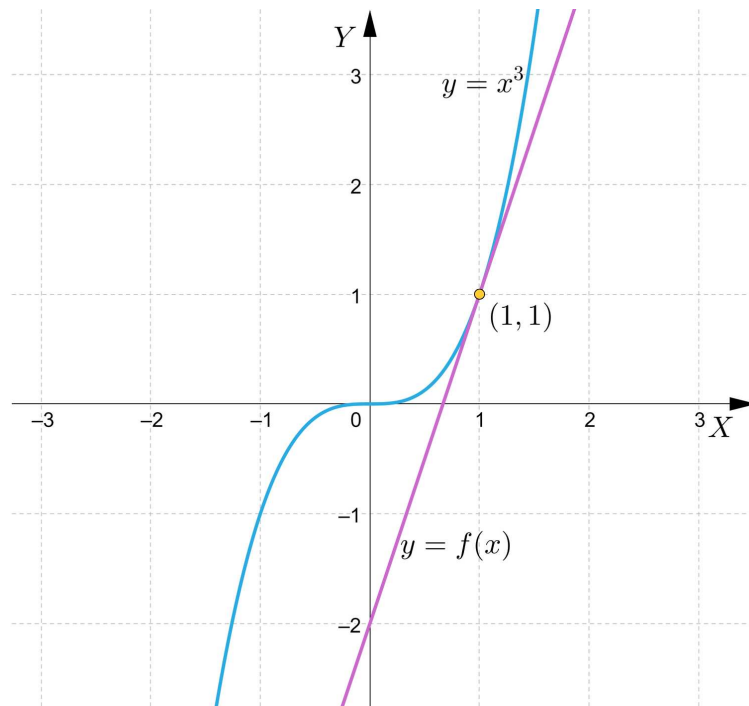
Wyznamy najpierw współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty A i B :

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(1+h)^3 - 1}{(1+h) - 1} = \frac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 1}{h} = \frac{3h + 3h^2 + h^3}{h} = 3 + 3h + h^2$$

Wyraz wolny jest równy:

$$b = a \cdot (-x_1) + y_1 = (3 + 3h + h^2)(-1) + 1 = -2 - 3h - h^2.$$

Zakładamy, że h dąży do zera, zatem wartość a będzie dążyć do 3, a wartość b do (-2) i ostatecznie równanie prostej stycznej jest postaci $y = 3x - 2$.



Przykład 2

Wyznamy równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = 2x^2 + x$ w punkcie $(0, 0)$.

Rozwiązanie

Weźmy dowolnie małą liczbę dodatnią h i rozważmy dwa punkty: $A = (0, 0)$ i $B = (h, 2h^2 + h)$, położone na wykresie funkcji $f(x) = 2x^2 + x$.

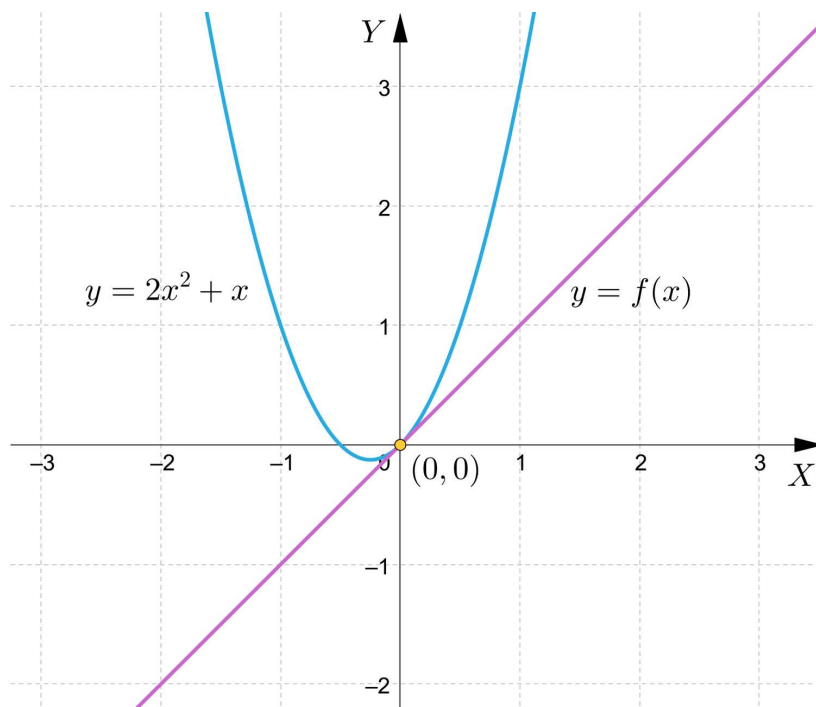
Wyznamy najpierw współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty A i B :

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2h^2 + h - 0}{h - 0} = \frac{2h^2 + h}{h} = 2h + 1$$

Wyraz wolny jest równy:

$$b = a \cdot (-x_1) + y_1 = (2h + 1) \cdot 0 + 0 = 0.$$

Zakładamy, że h dąży do zera, zatem wartość a będzie dążyć do 1, zaś wartość b jest równa 0 i ostatecznie równanie prostej stycznej jest postaci $y = x$.



Powyższa metoda jest skomplikowana i czasochłonna. Gdybyśmy chcieli w ten sposób wyznaczyć styczną do wykresu funkcji $f(x) = x^5 - 4x^2 + 3x - 7$, byłoby to możliwe, ale uciążliwe. Istnieje na szczęście metoda analityczna wyznaczania równania stycznej do wykresu funkcji, której zasadniczą częścią jest obliczenie pochodnej funkcji w danym punkcie.

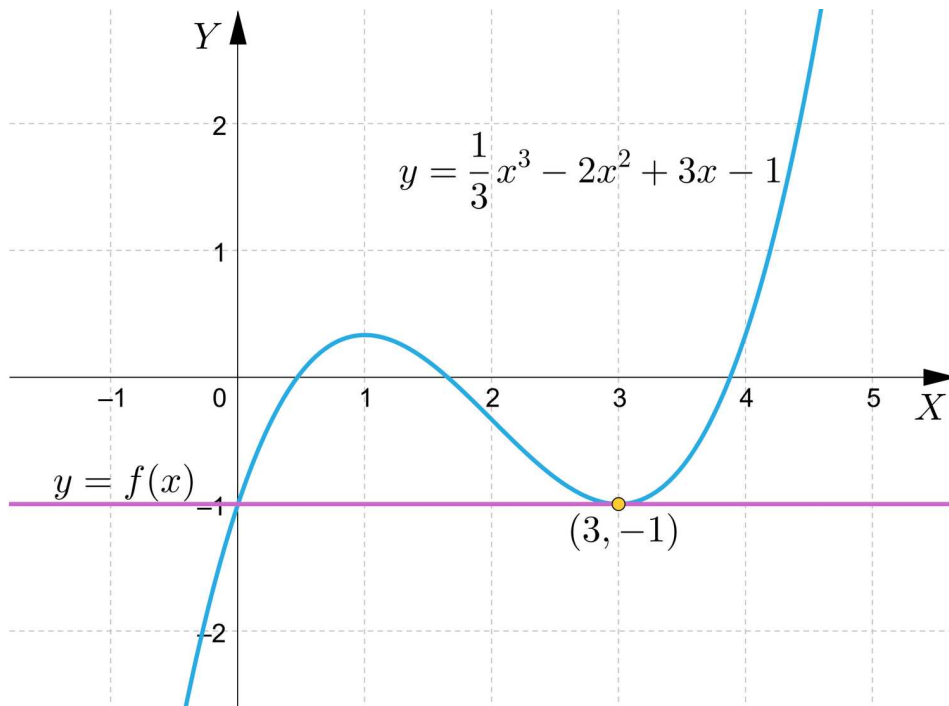
Podamy teraz przykłady funkcji, których styczne do ich wykresu mają więcej niż 1 punkt wspólny z tym wykresem.

Przykład 3

Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ i narysujmy styczną do jej wykresu w punkcie $(3, -1)$. Sprawdźmy, ile punktów wspólnych ma ta styczna z wykresem funkcji f .

Rozwiązanie

Rysujemy wykres tej funkcji oraz prowadzimy styczną w punkcie $(3, -1)$:



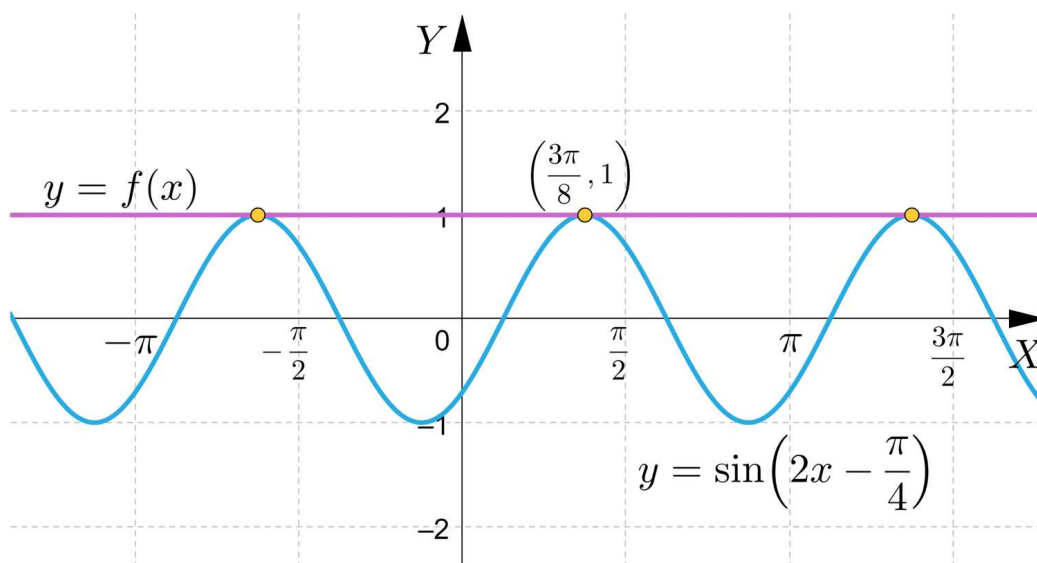
Widzimy, że styczna do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ w punkcie $(3; -1)$ ma jeszcze 1 punkt wspólny z wykresem funkcji f .

Przykład 4

Narysujemy styczną do wykresu funkcji $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ w punkcie $\left(\frac{3}{8}\pi, 1\right)$. Sprawdźmy, ile punktów wspólnych ma ta styczna z wykresem funkcji f .

Rozwiązanie

Rysujemy wykres funkcji $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ i prowadzimy styczną do tego wykresu w punkcie $\left(\frac{3}{8}\pi, 1\right)$:



Styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(\frac{3}{8}\pi, 1)$ ma z tym wykresem nieskończenie wiele punktów wspólnych.

Przedstawimy teraz przykład funkcji, która nie ma stycznej w podanym punkcie

Przykład 5

Sprawdźmy, czy wykres funkcji $y = |x|$ ma styczną w punkcie $(0, 0)$.

Rozwiązanie

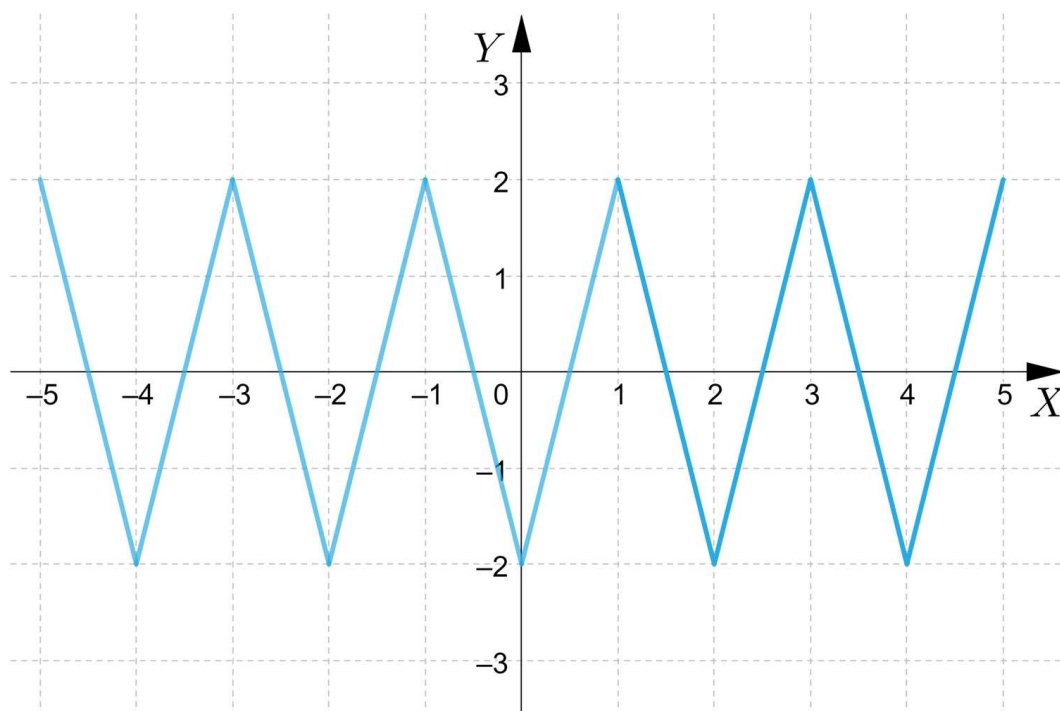
Wyznaczamy sieczne do wykresu tej funkcji w pobliżu punktu $(0, 0)$:

- jeżeli będziemy się do niego zbliżać z lewej strony, sieczne zawsze będą tej samej postaci: $y = -x$,
- gdy będziemy się zbliżać z prawej strony, to przyjmą inną, ale również cały czas tę samą postać: $y = x$.

Tym samym nie istnieje możliwość ustalenia jednej stycznej, czyli takiej, która będzie miała w okolicy wyznaczonego punktu jeden punkt wspólny z wykresem oraz której wykres będzie przebiegał podobnie do wykresu funkcji.

Podsumowując, styczna do wykresu funkcji $y = |x|$ w punkcie $(0, 0)$ nie istnieje.

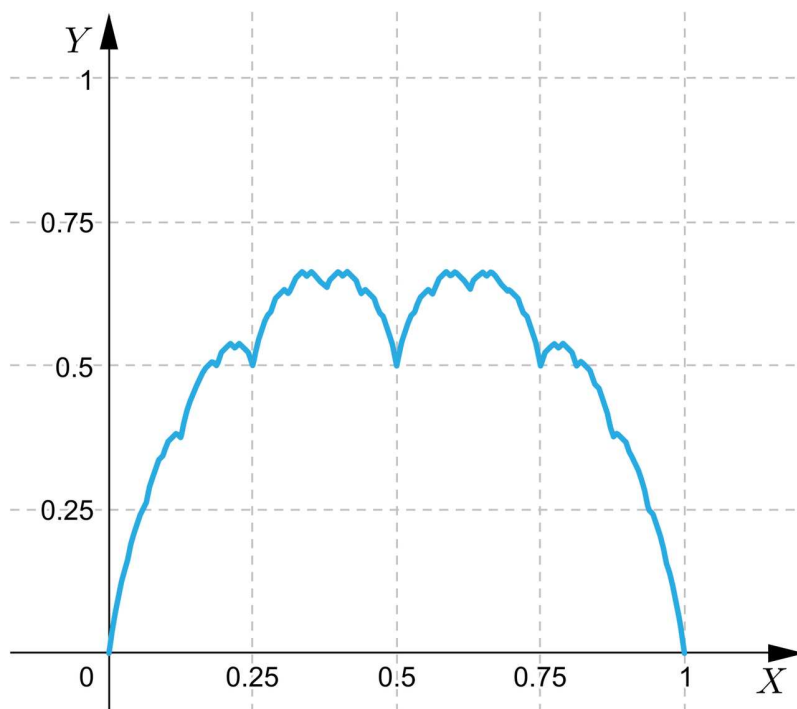
Zauważmy, że istnieją funkcje ciągłe, które nie mają stycznych w nieskończenie wielu punktach swojego wykresu. Poniżej przedstawiamy przykład takiej funkcji:



W żadnym punkcie o całkowitych odciętych styczna do wykresu funkcji f nie istnieje.

Ciekawostka

Istnieje funkcja ciągła, która nie ma stycznej w żadnym punkcie swojego wykresu. Jest to **funkcja Takagiego**. Jest ona przykładem funkcji, dla której nie istnieje pochodna w żadnym punkcie dziedziny. Przy konstrukcji tej funkcji „zagęszczamy ostrza” zmodyfikowanej funkcji $f(x) = |x|$.



Słownik

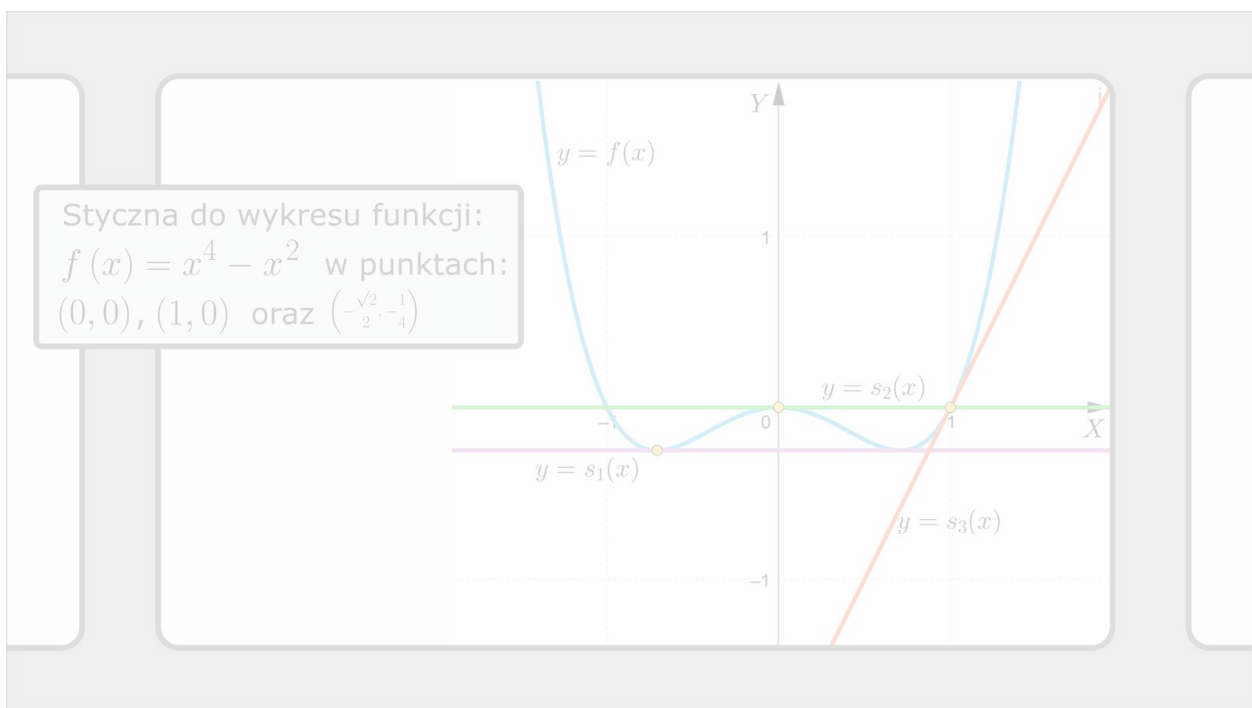
styczna do krzywej

prosta, która w małym otoczeniu tego punktu ma przebieg zbliżony do przebiegu krzywej, oraz ma w tym otoczeniu dokładnie jeden punkt wspólny z krzywą

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją przedstawiającą wykresy różnych funkcji i styczne do nich w wybranych punktach.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DmYSPQXI3>

Polecenie 2

Ile punktów wspólnych z wykresem funkcji $f(x) = \tan x$ ma styczna do tej tangensoidy w punktach o odciętych równych $k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Jaką wartość ma współczynnik kierunkowy prostej stycznej w punkcie $(1, -1)$ do wykresu funkcji $f(x) = 2x^2 - 3$?

Współczynnik kierunkowy jest równy:

Ćwiczenie 2



Wskaż współczynnik kierunkowy prostej stycznej w punkcie $(-1, 1)$ do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5$.

☐ ☐ ☐ ☐

Ćwiczenie 3



Wskaż równanie prostej stycznej w punkcie $(0, -3)$ do wykresu funkcji $f(x) = 2x^2 - 3$.

☐ $y = -3$

☐ funkcja nie posiada stycznej w tym punkcie

☐ $y = 4x$

☐ $x = 0$

Ćwiczenie 4



Wskaż punkt, w którym styczna do wykresu funkcji $f(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x + 3\frac{1}{3}$ będzie miała współczynnik kierunkowy równy 4.

☐ $(1, 5)$

☐ $(0, 3\frac{1}{3})$

☐ nie istnieje taki punkt

☐ $(-1, 3\frac{2}{3})$

Ćwiczenie 5



Założmy, że dana jest różniczkowalna funkcja f , stale rosnąca, której wartości w wybranych punktach są równe $f(-1) = 1$, $f(1) = 3$, $f(3) = 19$. Co można powiedzieć o prostej stycznej do jej wykresu w punkcie $(1, 3)$? Wskaż poprawną odpowiedź.

- ☐ Styczna jest prostą równoległą do osi X .
- ☐ Równanie stycznej jest postaci $y = -x - 8$.
- ☐ Wykres funkcji nie posiada stycznej w tym punkcie.
- ☐ Współczynnik kierunkowy stycznej jest dodatni.

Ćwiczenie 6



Niech dana będzie funkcja, do której wykresu styczną w punkcie $(2, 0)$ jest prosta $y = -x + 2$. Zaznacz wszystkie opisy pasujące do tej funkcji.

- ☐ Funkcja musi być malejąca.
- ☐ Funkcja może być malejąca.
- ☐ Funkcja musi przechodzić przez punkt $(2, 0)$.
- ☐ Pochodna tej funkcji dla $x = 2$ jest równa -1 .
- ☐ Taka funkcja nie istnieje.
- ☐ Funkcja nie jest różniczkowalna dla $x = 2$.

Ćwiczenie 7



Połącz w pary wzory funkcji i informacje o stycznej.

$$y = 1 - 2x^2$$

styczna w punkcie $(1, 0)$ jest równoległa do osi X

$$y = x + 1 \text{ dla } -1 \leq x < 0, y = 0 \text{ dla } y = 0 \text{ i } y = x - 1 \text{ dla } 0 < x \leq 1$$

styczna w punkcie $(0, 1)$ jest równoległa do osi X

$$y = (x - 1)^2$$

nie istnieje prosta styczna w punkcie $(0, 0)$

$$y = 2 - x$$

styczna w każdym punkcie ma równanie: $y = 2 - x$

Ćwiczenie 8



Dana jest funkcja $y = c^2x^4 - cx^2$ z parametrem rzeczywistym c . Połącz wartości parametru c z odpowiednimi opisami sytuacji.

$$c < 0$$

styczna do wykresu funkcji w punkcie $(0, 0)$ przecina ten wykres w dokładnie dwóch innych punktach

nie ma takiej wartości c

styczna do wykresu funkcji w punkcie $(0, 0)$ nie przecina tego wykresu w żadnym innym punkcie

$$c = 0$$

wykres funkcji jest prostą styczną do samej siebie

$$c > 0$$

wykres funkcji ma styczną przecinającą go w sześciu punktach

Dla nauczyciela

Autor: Jarosław Woźniak, Aneta Rogalska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Przykłady stycznych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, poziom rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Zakres rozszerzony. Uczeń:

3) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza równania stycznych do wykresów wybranych funkcji;
- wskazuje przykłady funkcji, dla których istnieją styczne mające z wykresem funkcji więcej niż jeden punkt wspólny;
- podaje przykłady funkcji, dla których nie istnieje styczna do ich wykresu w określonym punkcie.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- pokaz multimedialny;
- rozwiązywanie zadań pod kontrolą nauczyciela.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery multimedialne z dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.
2. Uczniowie przypominają definicję stycznej do okręgu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 5 grup. Każda grupa ma zapoznać się z jednym przykładem z sekcji „Przeczytaj”, a następnie przedstawić przykład pozostałym uczniom.
2. Nauczyciel w razie potrzeby pomaga uczniom w wyjaśnianiu zagadnienia.
3. Nauczyciel wyświetla uczniom prezentację, a uczniowie próbują podać swoje przykłady funkcji dla których styczna ma 1, 2 lub nieskończenie wiele punktów wspólnych z wykresem.
4. Następnie uczniowie pracują indywidualnie – wykonują Polecenie nr 2 z sekcji „Prezentacja multimedialna” oraz rozwiązują wskazane przez nauczyciela ćwiczenia z sekcji „Sprawdź się”. W razie pytań nauczyciel wyjaśnia niejasności.

Faza podsumowująca:

1. Wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych wskazanych przez nauczyciela.
2. Uczniowie określają, co było dla nich trudne lub niezrozumiałe, a nauczyciel udziela wyjaśnień.
3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

- Uczniowie mają za zadanie wykonać pozostałe ćwiczenia zawarte w sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Pochodne funkcji elementarnych](#)
- [Pochodne funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym](#)

Wskazówki metodyczne:

- Prezentację multimedialną można wykorzystać jako powtórzenie i utrwalenie wiadomości o stycznych do wykresu funkcji lub w czasie zajęć dotyczących interpretacji geometrycznej pochodnej funkcji.