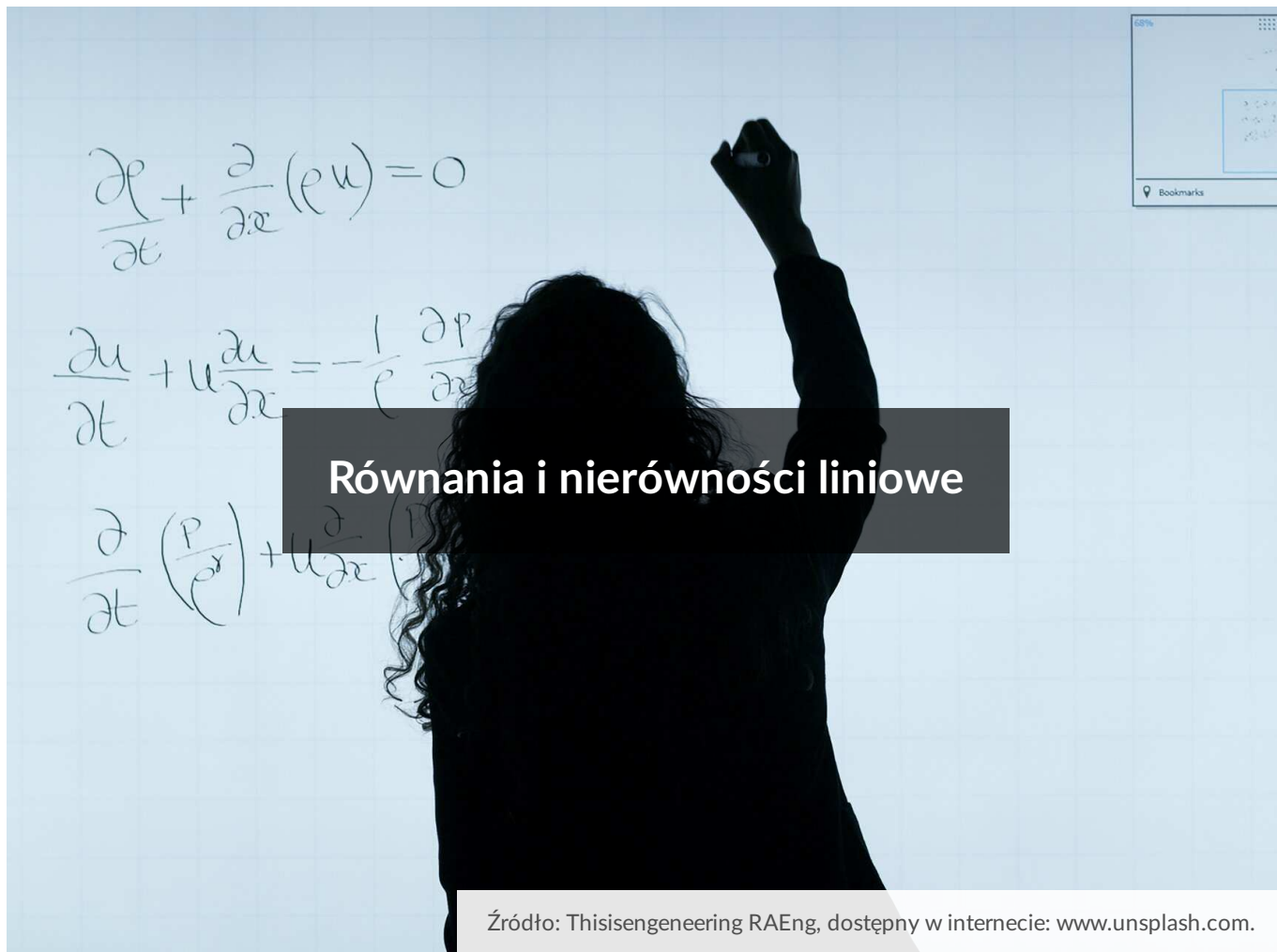




Równania i nierówności liniowe

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Test samosprawdzający](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Równania i nierówności liniowe spotykaliśmy na wielu etapach edukacji z różnym poziomem trudności. Rozwiązywanie ich jest stosunkowo łatwe, wystarczy trzymać się kilku prostych zasad, których zastosowanie poznasz w dalszej części materiału.

Równania i nierówności można wykorzystywać w rozwiązywaniu problemów spotykanych w życiu codziennym. Przykładowo, możemy wyznaczyć wiek dzieci, znając sumę ich lat i wiedząc, które dziecko jest starsze i o ile lat. Możemy też określić, ile zeszytów możemy kupić za ustaloną kwotę, wiedząc ile kosztuje jeden z nich.

Twoje cele

- Rozwiążesz równania i nierówności liniowe.
- Wykorzystasz wiedzę dotyczącą rozwiązywania równań i nierówności liniowych do rozwiązywania zadań tekstowych.

Przeczytaj

Na początek przypomnijmy, co to jest równanie liniowe i jak się je rozwiązuje.

Definicja: równanie liniowe

Równaniem liniowym (lub równaniem I stopnia) z niewiadomą x nazywamy równanie, które da się zapisać w postaci:

$$ax + b = 0,$$

gdzie a oraz b to ustalone liczby rzeczywiste.

Ważne!

Liczba rzeczywista jest **rozwiązaniem** równania, jeśli po jej podstawieniu w miejsce niewiadomej otrzymujemy prawdziwą równość.

Przykład 1

Rozpatrzmy równanie $3x + 9 = 0$. Rozstrzygniemy, która z liczb: $0, -1, 2$ czy -3 jest jego rozwiązaniem.

Rozwiązanie

Zauważmy, że:

- $3 \cdot 0 + 9 = 9 \neq 0$,
- $3 \cdot (-1) + 9 = 6 \neq 0$,
- $3 \cdot 2 + 9 = 15 \neq 0$,
- $3 \cdot (-3) + 9 = 0$.

Zatem liczba (-3) jest rozwiązaniem tego równania.

Aby wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania z jedną niewiadomą, przekształcamy je metodą przekształceń równoważnych, czyli takich, które nie zmieniają zbioru rozwiązań tego równania.

Ważne!

Dane równanie przekształcamy równoważnie, gdy:

- do obu stron równania dodajemy (lub odejmujemy) to samo wyrażenie;
- mnożymy (lub dzielimy) obie strony równania przez tę samą liczbę różną od zera;

- pozbywamy się nawiasów, stosując prawo rozdzielności mnożenia (w szczególności – wzory skróconego mnożenia).

Przeniesienia wyrażenia z jednej strony równania na drugą dokonujemy ze zmianą znaku, co odpowiada odjęciu od obu stron równania tego samego wyrażenia. Jest to więc przekształcenie równoważne.

Przykład 2

Rozwiążemy równanie $6x + 14 = -2(x + 1)$.

Rozwiązanie

Najpierw pozbywamy się nawiasów, stosując prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania:

$$6x + 14 = -2x - 2.$$

Następnie do obu stron dodajemy wyrażenie $2x$:

$$8x + 14 = -2,$$

od obu stron odejmujemy liczbę 14:

$$8x = -16,$$

i ostatecznie dzielimy obie strony równania przez 8:

$$x = -2.$$

Oznacza to, że dane równanie ma jedno rozwiązanie, $x = -2$.

Podobne przekształcenia, choć z jedną bardzo znaczącą różnicą, stosować można także w rozwiązywaniu nierówności z jedną niewiadomą.

Najprostszą z nich jest tzw. **nierówność I stopnia**, zwana też **nierównością liniową**.

Definicja: nierówność liniowa

Nierównością liniową z niewiadomą x nazywamy nierówność, którą można zapisać w jednej z następujących postaci:

$$ax + b < 0, ax + b \leq 0, ax + b > 0, ax + b \geq 0,$$

gdzie a oraz b to ustalone liczby rzeczywiste.

Ważne!

Liczba rzeczywista jest **rozwiązaniem nierówności** z jedną niewiadomą x , jeśli po podstawieniu tej liczby w miejsce x , otrzymujemy nierówność prawdziwą. Mówimy też wtedy, że liczba ta spełnia daną nierówność. Zbiór wszystkich liczb, które są rozwiązaniem danej nierówności, nazywamy **zbiorem rozwiązań** tej nierówności.

Przykład 3

Sprawdźmy, czy liczba 5 spełnia nierówność $2x + 1 > 3$.

Rozwiązanie

Sprawdzamy, że:

$$2 \cdot 5 + 1 = 11 > 3.$$

Zatem liczba 5 spełnia nierówność $2x + 1 > 3$.

Aby rozwiązać nierówność (czyli znaleźć zbiór jej rozwiązań), możemy dodawać do obu jej stron lub odejmować od obu jej stron to samo wyrażenie.

Przykład 4

Zauważmy, że jeżeli do obu stron prawdziwej nierówności

$$7 > 5$$

dodamy jednocześnie dwie liczby: przeciwną do liczby 5 oraz przeciwną do liczby 7:

$$7 + (-7) + (-5) > 5 + (-5) + (-7)$$

to otrzymamy nierówność prawdziwą

$$-5 > -7,$$

którą możemy zapisać w postaci

$$-7 < -5.$$

Wobec tego gdy obie strony prawdziwej nierówności:

$$7 > 5$$

pomnożymy przez (-1) , to po jednoczesnej zmianie zwrotu nierówności otrzymamy prawdziwą nierówność:

$$-7 < -5.$$

Należy więc pamiętać, że:

- mnożąc lub dzieląc obie strony nierówności przez tę samą liczbę **dodatnią**, pozostawiamy zwrot nierówności bez zmian;
- mnożąc lub dzieląc obie strony nierówności przez tę samą liczbę **ujemną**, należy zmienić zwrot nierówności na przeciwny.

Pamiętając tę ważną zasadę, możemy już zacząć rozwiązywać nierówności liniowe.

Przykład 5

Rozwiążemy nierówność $-2x + 1 < 5$.

Rozwiązanie

Przekształcamy ją równoważnie następująco:

Najpierw od obu stron nierówności odejmujemy liczbę 1:

$$-2x < 4.$$

Następnie dzielimy obie strony przez (-2) , zmieniając przy tym zwrot nierówności:
 $x > -2$.

Zbiorem rozwiązań rozpatrywanej nierówności jest więc przedział nieograniczony $(-2, +\infty)$.



Przykład 6

Rozwiążemy nierówność $\frac{x+5}{3} - \frac{x}{5} \leq \frac{x+1}{10}$.

Rozwiązanie

Mnożymy obie strony nierówności przez 30 (najmniejsza wspólna wielokrotność liczb znajdujących się w mianownikach ułamków), a następnie przekształcamy równoważnie:

$$30 \cdot \frac{x+5}{3} - 30 \cdot \frac{x}{5} \leq 30 \cdot \frac{x+1}{10}$$

$$10(x+5) - 6x \leq 3(x+1)$$

$$10x + 50 - 6x \leq 3x + 3$$

$$10x - 6x - 3x \leq 3 - 50$$

$$x \leq -47.$$

Zatem zbiorem rozwiązań danej nierówności jest przedział $(-\infty, -47]$.



Słownik

najmniejsza wspólna wielokrotność danych liczb

najmniejsza liczba różna od zera, która jest jednocześnie wielokrotnością każdej rozważanej liczby

przedział nieograniczony

zbiór wszystkich liczb większych (większych bądź równych, mniejszych bądź równych lub mniejszych) od danej liczby

Test samosprawdzający

Polecenie 1

Rozwiąż test. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.



Test

Równania liniowe, nierówności liniowe

Sprawdzisz swoją wiedzę dotyczącą:

- rozwiązywania równań liniowych,
- rozwiązywania nierówności liniowych,
- wskazywania liczb należących do zbioru rozwiązań nierówności liniowej,
- wykorzystywania równości i nierówności liniowych do rozwiązywania zadań tekstowych.

Liczba pytań:

6

Limit czasu:

15 min

Twój ostatni

wynik:

-

Uruchom

Polecenie 2

Cegła waży kilogram i pół cegły. Ile waży cegła?

Polecenie 3

Na osi liczbowej zaznacz przedział, który jest zbiorem rozwiązań nierówności

$$-3x + 2 \leq x + 1$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Do dwóch sklepów trzeba przewieźć 2,5 t towaru, przy czym do pierwszego z nich o 0,7 t więcej niż do drugiego.

Zapisz poniżej, ile kg towaru trzeba przewieźć do każdego z tych sklepów.

Odpowiedź: Pierwszy sklep: kg, drugi sklep: kg.

Ćwiczenie 2



Każdemu z równań wypisanych w lewej kolumnie przyporządkuj jego rozwiązanie.

$$3(x - 4) = 5x - 16$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$7(x - 4) = 4(x - 5) - 14$$

$$x = 2$$

$$3(x + 18) - 5(11 - 3x) = 16x$$

$$x = -2$$

$$4(2x - 9) = 2(5x + 6) - 47$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Ćwiczenie 3



Pewna liczba dwucyfrowa ma następujące własności:

- jej cyfra jedności jest dwa razy większa od cyfry dziesiątek,
- po przestawieniu jej cyfr otrzymujemy liczbę o 27 od niej większą.

Jaka to liczba?

Odpowiedź: Ta liczba to .

Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Suma trzech liczb wynosi 27. Wyznacz te liczby, wiedząc, że druga z nich stanowi 75% trzeciej i jest o 5 większa od pierwszej liczby.

Zapisz poniżej rozwinięcie dziesiętne każdej z tych liczb.

Odpowiedź: Pierwsza liczba: , druga liczba: , trzecia liczba:

Ćwiczenie 6



Jacek ma 320 zł w banknotach o nominatach 50 zł, 20 zł i 10 zł, przy czym banknotów pięćdziesięciotowych ma dwa razy więcej niż banknotów dwudziestotowych i o 4 mniej niż banknotów dziesięciotowych.

O ile mniej pieniędzy miałby Jacek, gdyby wszystkie posiadane banknoty zamienił na banknoty o nominale 10 zł?

Odpowiedź: Po zamianie Jacek miałby mniej o zł.

Ćwiczenie 7



Suma S liczby uczniów w trzech klasach: Ia, Ib i Ic jest liczbą dwucyfrową większą od 80. Wiadomo też, że w klasie Ia jest o 3 uczniów mniej niż w klasie Ib, a liczba uczniów klasy Ic jest o 25% większa od liczby uczniów klasy Ia.

Spośród podanych poniżej wybierz i wstaw w kolejności rosnącej dwie wartości S , które spełniają warunki zadania.

Liczba wszystkich uczniów może być równa: lub .

Ćwiczenie 8



Wytwórnia rozlewa sok pomarańczowy do kartonowych pojemników dwóch rodzajów: o pojemności 0,5 litra oraz o pojemności 2 litry.

Hurtownik zakupił 300 litrów soku, przy czym okazało się, że pojemników mniejszych było w zakupionym zestawie o 90 mniej niż pojemników dwulitrowych.

Ile pojemników półlitrowych było wśród zakupionych przez hurtownika?

Odpowiedź: Hurtownik zakupił pojemników półlitrowych.

Ćwiczenie 9



Rozwiązaniem równania $(x + 2)(x - 2) = x(x + 1)$ jest liczba a ,
natomiast rozwiązaniem równania $(x + 2)^2 = (x - 8)^2$ jest liczba b .

Oblicz $10 \cdot b^a$.

Zakoduj poniżej kolejno trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej liczby.

Odpowiedź: $10 \cdot b^a = 0,$...

Ćwiczenie 10



Rozpatrzmy nierówność

$$(2x - 1)^2 - (\sqrt{3}x - 1)^2 > x^2 - 10$$

Ile jest równa suma s wszystkich dodatnich liczb całkowitych, które znajdują się w zbiorze rozwiązań tej nierówności?

☐ $s = 151$

☐ $s = 161$

☐ $s = 141$

☐ $s = 171$

Ćwiczenie 11



Najdłuższy bok trójkąta ma 15 cm, a dwa pozostałe boki różnią się o 3 cm.

Cztery liczby spośród podanych poniżej to wartości, które może przyjmować długość najkrótszego boku tego trójkąta.

Wybierz te liczby i ustaw je w kolejności rosnącej. Skorzystaj z nierówności trójkąta.

Odpowiedź: , , oraz .

$\sqrt[4]{444}$

$3 + \sqrt{11}$

$\frac{71}{6}$

$8 - \sqrt{5}$

$\frac{41}{7}$

$\sqrt[3]{333}$

$15 - \sqrt{17}$

$9 + \sqrt{10}$

Dla nauczyciela

Autor: Witold Sadowski, Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równania i nierówności liniowe

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Cele kształcenia – wymagania ogólne:

I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:

6) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej;

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy. Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$, $(a + b)^3$, $(a - b)^3$, $a^3 - b^3$, $a^n - b^n$.

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy. Uczeń:

1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny;

3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje równania i nierówności liniowe.
- wykorzystuje wiedzę dotyczącą rozwiązywania równań i nierówności liniowych do rozwiązywania zadań tekstowych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona lekcja
- dyskusja
- konkurs zadaniowy

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- projektor multimedialny,
- arkusze papieru, pisaki

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie będą pracować metodą odwróconej klasy. W domu zapoznają się z materiałem w części „Przeczytaj”

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie w grupach ustalonych przez nauczyciela omawiają przygotowane w domu informacje, dyskutują nad problemami, które się pojawiały, np.: jak jest różnica pomiędzy rozwiązaniem nierówności a zbiorem rozwiązań.

Faza realizacyjna:

1. Przedstawiciele grup omawiają poszczególne problemy na forum klasy. Uczniowie wspólnie wyjaśniają wątpliwości, konsultując je w razie potrzeby z nauczycielem.
2. Uczniowie pracują indywidualnie metodą konkursu zadaniowego. Rozwiązują ćwiczenia interaktywne 4-11 w sekcji „Sprawdź się”. Rozwiązania zadań uczniowie

zapisują w zeszycie, sprawdzając w materiale ich poprawność. Osoby, które rozwiążą zadania bezbłędnie, otrzymują oceny z aktywności.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie rozwiązują test samosprawdzający.
2. Wskazany przez nauczyciela uczeń krótko podsumowuje najważniejsze informacje z lekcji.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują ćwiczenia interaktywne 1-3 w sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Równanie liniowe](#)
- [Nierówność liniowa](#)

Wskazówki metodyczne:

Test samosprawdzający może zostać wykorzystany na lekcji poświęconej rozwiązywaniu zadań tekstowych z wykorzystaniem równań i nierówności liniowych.