



## Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta $30^\circ$

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta $30^\circ$

Źródło: Jf Martin, dostępny w internecie: [www.unsplash.com](http://www.unsplash.com), domena publiczna.

Koloseum, czyli amfiteatr Flawiuszy, jest jednym z najbardziej znanych symboli Rzymu i jedną z najwspanialszych budowli antycznych. Jego budowę rozpoczęto prawdopodobnie ok. 72 roku n.e.

Nachylenie niższych poziomów widowni pod kątem  $30^\circ$  umożliwiało widzom dokładną obserwację wydarzeń rozgrywających się na arenie.

W tym materiale wyprowadzimy wartości funkcji trygonometrycznych kąta  $30^\circ$ .

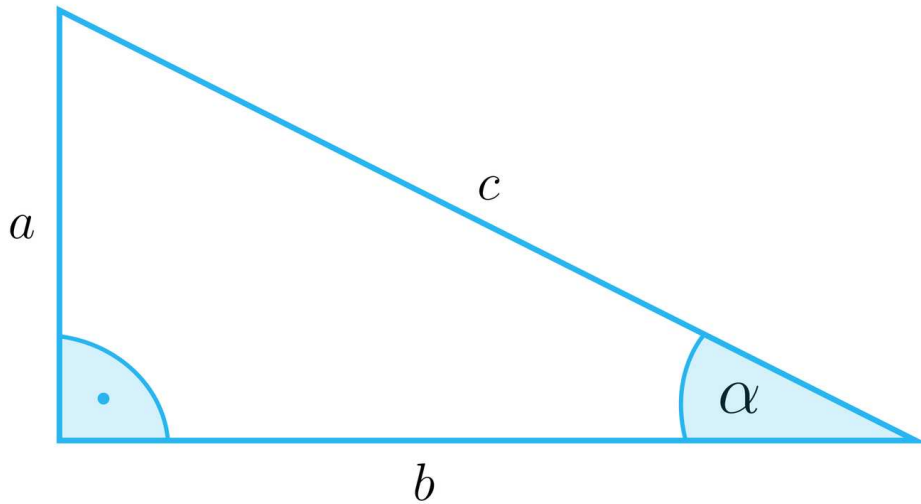
### Twoje cele

- Poznasz metodę wyprowadzania wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta  $30^\circ$ .
- Wykorzystasz wartości funkcji trygonometrycznych kąta  $30^\circ$  do rozwiązywania trójkątów.
- Zastosujesz funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur.

# Przeczytaj

---

Przypomnijmy definicje funkcji trygonometrycznych:



gdzie:

$c$  – przeciwprostokątna,

$a$  – przyprostokątna przeciwległa do kąta  $\alpha$ ,

$b$  – przyprostokątna przyległa do kąta  $\alpha$ .

## Definicja: Sinus kąta $\alpha$

Sinusem kąta  $\alpha$  w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej  $a$  przeciwległej do kąta  $\alpha$  do przeciwprostokątnej  $c$ :

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

## Definicja: Cosinus kąta $\alpha$

Cosinusem kąta  $\alpha$  w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej  $b$  przyległej do kąta  $\alpha$  do przeciwprostokątnej  $c$ :

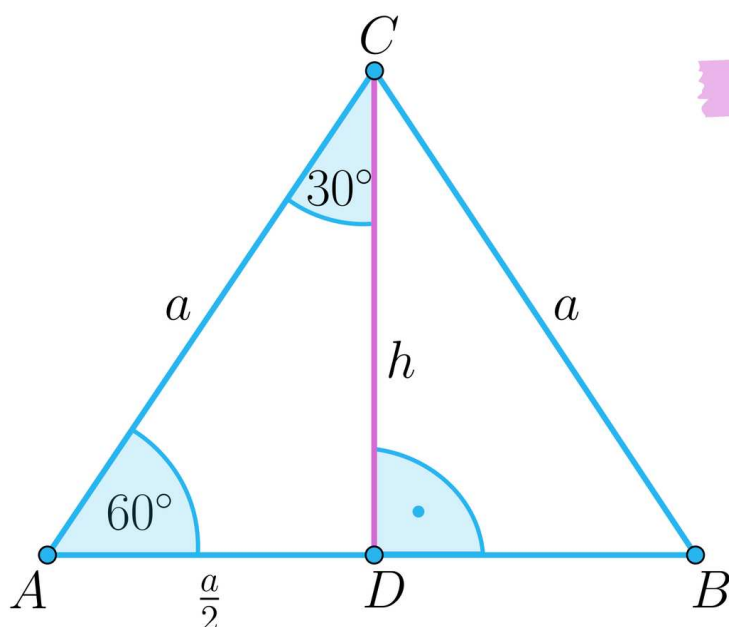
$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

### Definicja: Tangens kąta $\alpha$

Tangensem kąta  $\alpha$  w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej  $a$  przeciwległej do kąta  $\alpha$  do przyprostokątnej  $b$  przyległej do kąta  $\alpha$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

Aby wyznaczyć wartości funkcji trygonometrycznych kąta  $30^\circ$ , posłużymy się trójkątem równobocznym  $ABC$  o boku  $a$ .



Zauważmy, że w trójkącie prostokątnym długość przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta  $30^\circ$  jest połową długości przeciwprostokątnej.

Zauważmy, że wysokość  $CD$  dzieli trójkąt na dwa przystające trójkąty prostokątne stąd  $|AD| = |DB| = \frac{a}{2}$  oraz kąt  $ACD$  ma miarę  $30^\circ$ .

Stosując twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta  $ADC$ , wyznaczmy wysokość trójkąta  $ABC$ :

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2, \text{ stąd}$$

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2 \text{ i ostatecznie}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Wobec powyższego:

$$\sin 30^\circ = \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{|CD|}{|AC|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{|AD|}{|CD|} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\operatorname{tg} 30^\circ$  możemy również wyliczyć, wykorzystując następujący związek:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

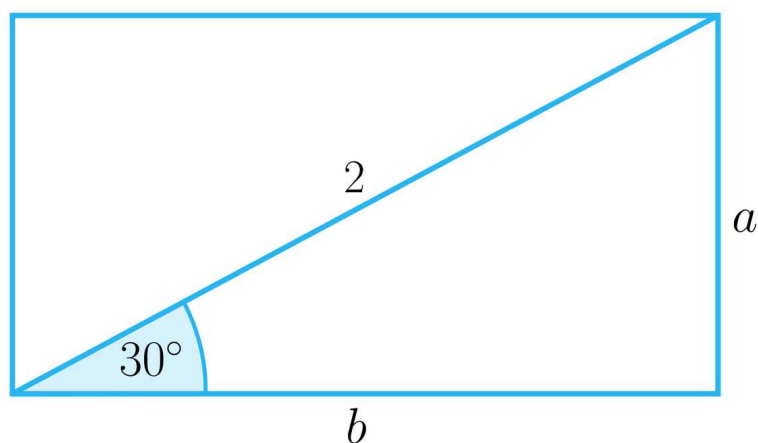
Zbierzmy wyliczone wartości funkcji trygonometrycznych w tabeli:

| $\alpha$                   | $30^\circ$           | $60^\circ$           |
|----------------------------|----------------------|----------------------|
| $\sin \alpha$              | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos \alpha$              | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        |
| $\operatorname{tg} \alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$           |

### Przykład 1

Przekątna prostokąta ma długość 2 i tworzy z dłuższym bokiem kąt  $30^\circ$ .  
Obliczmy pole tego prostokąta.

Wprowadzamy oznaczenia jak na rysunku:



Pole prostokąta wyliczymy ze wzoru:

$$P = a \cdot b$$

Przekątna dzieli prostokąt na dwa przystające trójkąty prostokątne – możemy do wyznaczenia długości boków zastosować funkcje trygonometryczne. Długość boku  $a$  wyznaczymy z funkcji sinus:

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{2} \text{ i } \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \text{ więc } \frac{1}{2} = \frac{a}{2},$$

$$2 \cdot a = 1 \cdot 2, \text{ stąd } a = 1.$$

**Możemy  $a$  wyznaczyć również wykorzystując fakt, że długość przyprostokątnej trójkąta prostokątnego leżącej naprzeciw kąta  $30^\circ$  jest połową długości przeciwprostokątnej czyli  $a = 2 : 2 = 1$ .**

Bok  $b$  wyznaczymy z funkcji cosinus:

$$\cos 30^\circ = \frac{b}{2} \text{ i } \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ czyli } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{2},$$

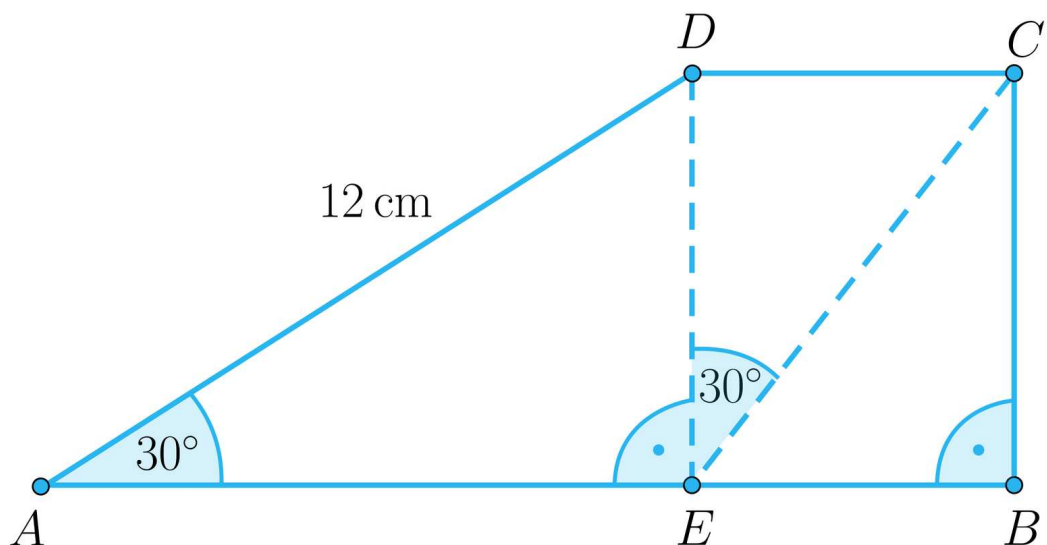
$$b \cdot 2 = \sqrt{3} \cdot 2, \text{ więc } b = \sqrt{3}$$

Odpowiedź:

Przyprostokątne mają długość:  $a = 1$  i  $b = \sqrt{3}$ .

## Przykład 2

Obliczymy pole i obwód trapezu prostokątnego przedstawionego na rysunku:



Zauważmy, że bok  $BC$  jest wysokością trapezu  $ABCD$ .

Aby rozwiązać zadanie, musimy policzyć długości wszystkich boków powyższego trapezu.

Z trójkąta prostokątnego  $AED$  wyliczamy długość boku  $|ED|$ :

$$\frac{|ED|}{|AD|} = \sin 30^\circ, \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ i } |AD| = 12 \text{ cm, więc po podstawieniu mamy}$$

$$\frac{|ED|}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\text{czyli } |ED| = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6 \text{ cm}$$

Z rysunku wynika, że  $|BC| = |ED|$

więc  $|BC| = 6 \text{ cm}$ .

Długość odcinka  $|AE|$  (będącego przyprostokątną trójkąta prostokątnego  $AED$ ) wyliczymy korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$|AE|^2 + |ED|^2 = |AD|^2$$

Podstawiając  $|AD| = 12$  cm i  $|ED| = 6$  cm otrzymujemy.

$$|AE|^2 + 6^2 = 12^2, \text{ stąd}$$

$$|AE|^2 = 144 - 36 = 108 \text{ czyli}$$

$$|AE| = \sqrt{108} = \sqrt{36 \cdot 3} = 6\sqrt{3} \text{ cm.}$$

Z trójkąta prostokątnego  $EDC$  wyliczamy długość boku  $|DC|$ :

$$\frac{|DC|}{|ED|} = \operatorname{tg} 30^\circ, \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ i } |ED| = 6 \text{ cm, więc}$$

$$\frac{|DC|}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ stąd}$$

$$|DC| = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \text{ cm.}$$

Z rysunku wynika, że:

$$|AB| = |AE| + |EB| \text{ i } |EB| = |DC| = 2\sqrt{3} \text{ cm, więc}$$

$$|AB| = |AE| + |EB| = 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \text{ cm.}$$

Ponieważ  $|AB| = 8\sqrt{3}$  cm,  $|BC| = 6$  cm,  $|DC| = 2\sqrt{3}$  cm i  $|AD| = 12$  cm, to obwód trapezu będący sumą jego boków wynosi:

$$L = 8\sqrt{3} + 6 + 2\sqrt{3} + 12 = (10\sqrt{3} + 18) \text{ cm.}$$

Ze wzoru na pole trapezu:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h,$$

gdy  $a = |AB| = 8\sqrt{3}$  cm,  $b = |CD| = 2\sqrt{3}$  cm i  $h = |BC| = 6$  cm

otrzymujemy  $P = \frac{8\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = \frac{10\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 30\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>.

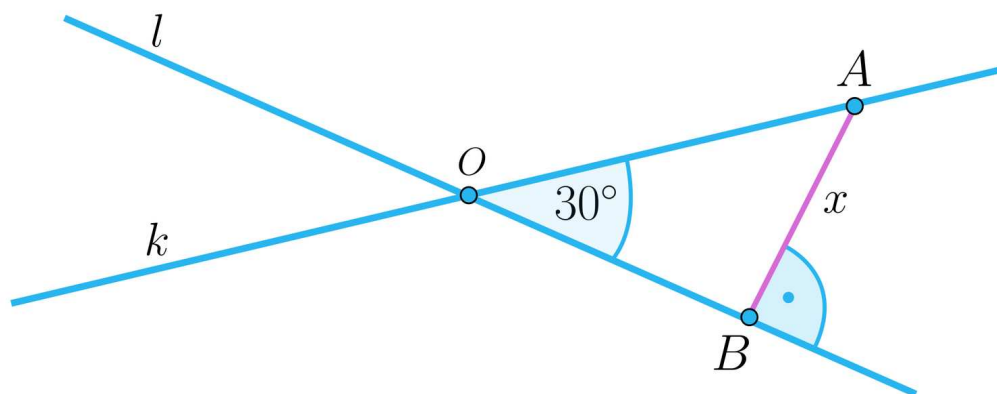
Odpowiedź:

Pole trapezu wynosi  $30\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>, a jego obwód  $(10\sqrt{3} + 18)$  cm.

### Przykład 3

Proste  $k$  i  $l$  przecinają się w punkcie  $O$  i tworzą kąt o mierze  $30^\circ$ . Na prostej  $k$  obieramy punkt  $A$ . Obliczmy odległość tego punktu od prostej  $l$  wiedząc, że  $|OA| = 8$  cm.

*Odległość punktu  $P$  od prostej  $k$  – długość odcinka prostej prostopadłej do  $k$ , którego końcami są punkt  $P$  i punkt przecięcia z prostą  $k$ .*



Przyjmijmy następujące oznaczenie:

$x$  – odległość punktu  $A$  od prostej  $l$

$|OA| = 8$  cm

Trójkąt  $OAB$  jest prostokątny – możemy, wykorzystując funkcję trygonometryczną sinus, obliczyć  $x$ :

$\frac{x}{|OA|} = \sin 30^\circ$ ,  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$  i  $|OA| = 8$  cm, więc

$$\frac{x}{8} = \frac{1}{2}$$

$x = 8 \cdot \frac{1}{2}$ , stąd  $x = 4$  cm.

Odpowiedź:

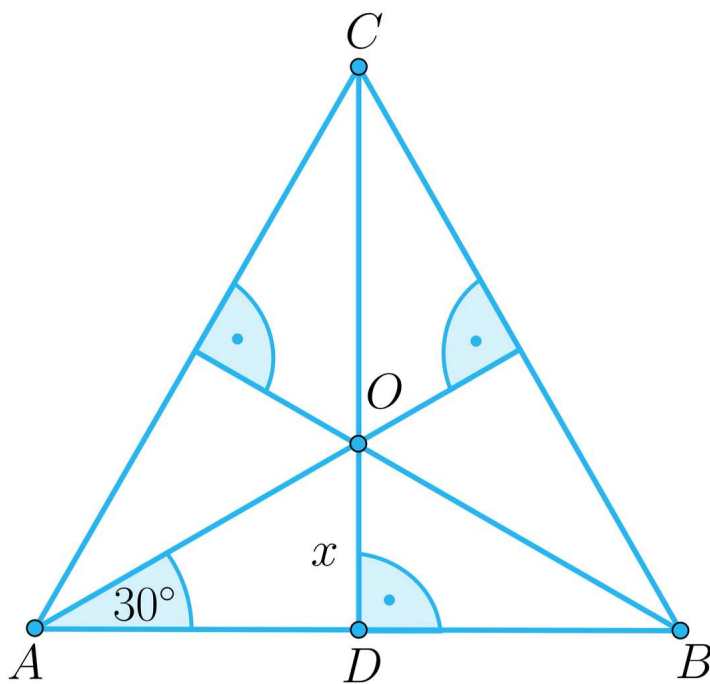
Odległość punktu  $A$  od prostej  $l$  wynosi 4 cm.

#### Przykład 4

Obliczmy odległość środka ciężkości trójkąta równobocznego o boku długości 6 cm od jego boków.

Środek ciężkości powstaje w miejscu przecięcia się środkowych trójkąta, czyli odcinków łączących wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.

W trójkącie równobocznym każda środkowa jest wysokością i dwusieczną kąta.



Wprowadźmy oznaczenia:

$O$  - środek ciężkości trójkąta  $ABC$

$$|AB| = |BC| = |CA| = a$$

$$|OD| = x$$

Możemy zapisać wnioski:

1)  $|AD| = |DB| = \frac{a}{2}$ , bo  $DC$  jest środkową,

2) kąt  $OAD$  ma miarę:  $\frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$ , bo  $AO$  jest dwusieczną kąta,

3) trójkąt  $ADO$  jest prostokątny, bo  $DC$  jest wysokością trójkąta.

Z trójkąta  $ADO$  obliczamy długość odcinka  $x$ :

$$\frac{x}{\frac{a}{2}} = \operatorname{tg} 30^\circ, \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ i } a = 6 \text{ cm, czyli } \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ więc } x = \sqrt{3} \text{ cm.}$$

Ponieważ  $O$  jest środkiem ciężkości trójkąta równobocznego, to odległość tego punktu od każdego boku jest taka sama.

Odpowiedź:

Odległość środka ciężkości od każdego boku trójkąta równobocznego o boku długości 6 cm wynosi  $\sqrt{3}$  cm.

**Zauważmy, że:**

$$\frac{|OD|}{\frac{a}{2}} = \operatorname{tg} 30^\circ \text{ i } \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ stąd}$$

$$|OD| = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$$

$$|OD| = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \cdot h$$

$$|OC| = h - |OD| = \frac{2}{3} \cdot h, \text{ czyli } \frac{|OC|}{|OD|} = \frac{\frac{2}{3} \cdot h}{\frac{1}{3} \cdot h} = 2.$$

Środek ciężkości dzieli środkową na dwa odcinki: odcinek, którego jeden koniec jest wierzchołkiem trójkąta, jest dwa razy dłuższy od drugiej części środkowej.

### Przykład 5

Uprośćmy wyrażenie:  $\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha}$ , a następnie obliczmy jego wartość dla  $\alpha = 30^\circ$ .

Przekształcając wyrażenie wykorzystamy wzory:

$$1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

przekształcamy do postaci:  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ ,

2)  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ , gdzie po podstawieniu za  $a = 1$  i  $b = \cos \alpha$  otrzymamy:

$$1^2 - \cos^2 \alpha = (1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{1 - \cos \alpha} = 1 + \cos \alpha \text{ przy założeniu: } 1 - \cos \alpha \neq 0.$$

Ponieważ  $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  więc  $1 + \cos 30^\circ = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Odpowiedź:

Wartość wyrażenia wynosi  $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

## Słownik

trapez

czworokąt, który ma przynajmniej jedną parę boków równoległych; boki równoległe nazywamy podstawami trapezu

### **wysokość trapezu**

odległość między podstawami trapezu

### **środek ciężkości trójkąta**

punkt przecięcia się środkowych trójkąta, czyli odcinków łączących wierzchołki trójkąta ze środkami przeciwległych boków

### **odległość punktu $P$ od prostej $k$**

długość odcinka prostej prostopadłej do  $k$ , którego końcami są punkt  $P$  i punkt przecięcia z prostą  $k$

# Animacja

---

## Polecenie 1

Zapoznając się z animacją utrwalisz wyprowadzenie wartości funkcji trygonometrycznych kąta  $30^\circ$ . Następnie rozwiąż zadania i porównaj z odpowiedziami.

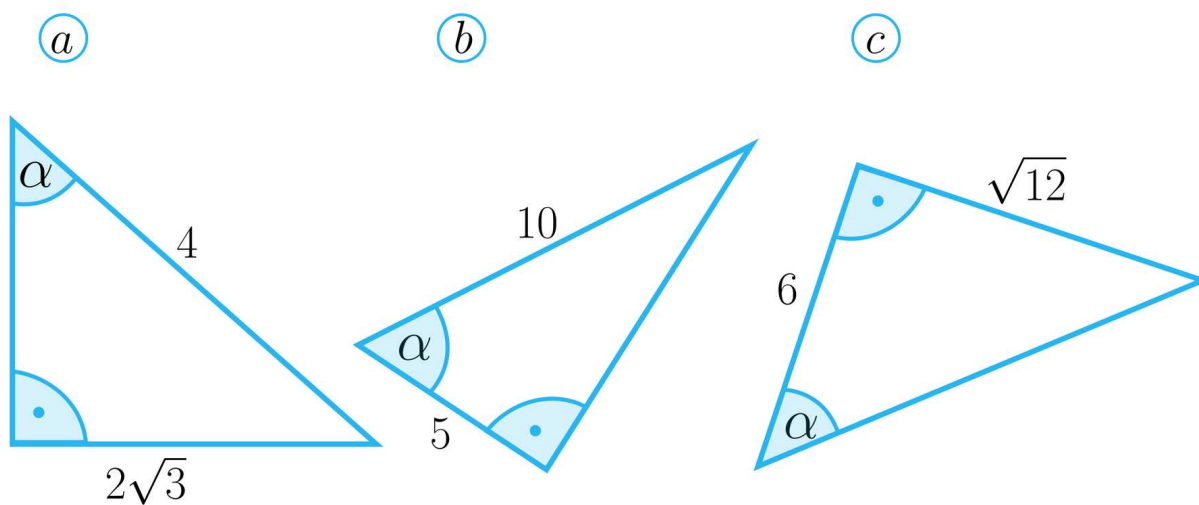
## Wystąpił błąd

Film nawiązujący do treści materiału

---

## Polecenie 2

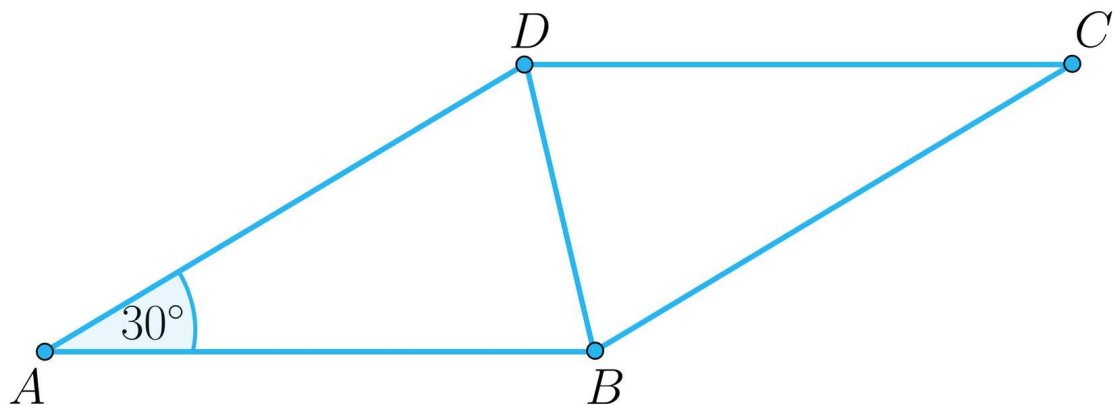
Dany jest trójkąt prostokątny:



Czy kąt  $\alpha$  ma miarę  $30^\circ$ ?

### Polecenie 3

Oblicz pole równoległoboku przedstawionego na rysunku:



Gdy  $|AD| = 6$  cm,  $|BD| = 5$  cm.

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



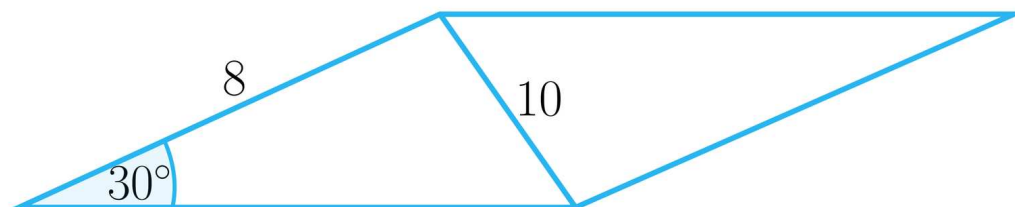
Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



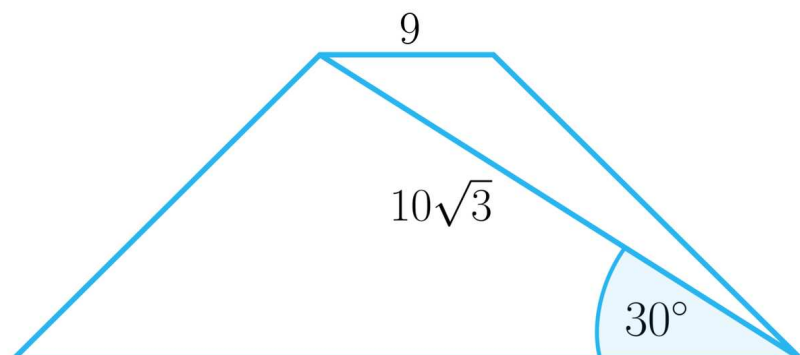
Dany jest równoległobok o kącie ostrym  $30^\circ$ , którego krótsza przekątna jest równa 10, a krótszy bok ma długość 8 (jak na rysunku poniżej).



## Ćwiczenie 8



Dany jest trapez równoramienny (jak na rysunku poniżej) o krótszej podstawie długości 9. Przekątna tego trapezu jest równa  $10\sqrt{3}$  i tworzy z dłuższą podstawą kąt  $30^\circ$ .



# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Anna Wołoszyn

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta  $30^\circ$

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

VII. Trygonometria. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od  $0^\circ$  do  $180^\circ$ , w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  i  $60^\circ$ ;

6) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty).

VIII. Planimetria. Zakres podstawowy.

Uczeń:

4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach;

11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- poznaje metodę wyprowadzenia wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta  $30^\circ$
- wykorzystuje wartości funkcji trygonometrycznych kąta  $30^\circ$  do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich
- analizuje zadania oraz wybiera najefektywniejszą metodę prowadzącą do ich rozwiązania

### **Strategie nauczania:**

- konstruktywizm
- konektywizm

### **Metody i techniki nauczania:**

- wykład informacyjny
- burza mózgów
- pokaz multimedialny

### **Formy pracy:**

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z dostępem do Internetu
- projektor multimedialny
- e-podręcznik

### **Przebieg lekcji**

#### **Faza wstępna:**

1. Uczniowie podają definicje funkcji trygonometrycznych (zapisują je na tablicy).
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 3-osobowe grupy.
2. Nauczyciel prezentuje materiał „Konstrukcje kątów o miarach  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ” e-podręcznika w części dotyczącej konstrukcji kąta  $30^\circ$ .
3. Każda z grup otrzymuje zadanie polegające na analizie materiału zawartego w sekcji „Przeczytaj”.
4. Uczniowie w grupach analizują przykłady zawarte w sekcji „Przeczytaj”.
5. Nauczyciel kontroluje pracę uczniów udzielając im wskazówek.
6. Uczniowie oglądają animację i omawiają ją wraz z nauczycielem.

7. Uczniowie rozwiązują zadania znajdujące się pod animacją.
8. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela.

### **Faza podsumowująca:**

1. Wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych wskazanych przez nauczyciela.
2. Uczniowie określają co było dla nich trudne lub niezrozumiałe a nauczyciel udziela wyjaśnień.
3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

### **Praca domowa:**

Zadaniem uczniów jest wykonanie ćwiczeń interaktywnych, które nie zostały rozwiązane na lekcji.

### **Materiały pomocnicze:**

- [Konstrukcje kątów o miarach  \$15^\circ\$ ,  \$30^\circ\$ ,  \$45^\circ\$ ,  \$60^\circ\$](#)
- [Trójkąty i ich własności](#)
- [Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego](#)

### **Wskazówki metodyczne:**

Nauczyciel może polecić przyniesienie cyrkli i na tych zajęciach uczniowie skonstruują kąt  $30^\circ$ .

Nauczyciel może zaproponować chętnym uczniom udowodnienie twierdzenia Napoleona. Materiały zawarte w multimedium uczniowie mogą wykorzystać w przygotowaniu się do lekcji. Umożliwi im to wystąpienie na zajęciach w roli ekspertów.