



## Szeregi geometryczne w geometrii

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

A background image featuring several large, pink, spherical lanterns with horizontal ridges, hanging from above. The lanterns are out of focus, creating a bokeh effect. A dark purple rectangular box is overlaid on the image, containing the title text.

## Szeregi geometryczne w geometrii

Źródło: dostępny w internecie: [www.maxpixel.net](http://www.maxpixel.net), domena publiczna.

W tym materiale zapoznamy się z klasycznymi zadaniami związanymi z szeregiem geometrycznym w kontekście zadań geometrycznych. Będziemy używać charakterystycznego sposobu konstrukcji zbiorów, poprzez opis jednego lub dwóch kroków konstrukcji i zapisanie, że pozostałe kroki konstrukcji są analogiczne do podanych pierwszych kroków.

### Twoje cele

- Nauczysz się rozwiązywać zadania geometryczne za pomocą szeregów geometrycznych.
- Przypomnisz sobie podstawowe związki w metryczne w figurach geometrycznych.

# Przeczytaj

Zaprezentujemy kilka charakterystycznych przykładów zastosowań szeregu geometrycznego do rozwiązywania zadań geometrycznych.

## Przykład 1

Odcinek długości 1 dzielimy na 3 równe części i usuwamy środkowy odcinek otwarty. Sumę długości odcinków, które pozostały oznaczamy przez  $a_1$ . Następnie każdy z tych odcinków ponownie dzielimy na 3 równe części i usuwamy z każdego z nich środkowy odcinek otwarty, otrzymując cztery odcinki, których sumę długości oznaczamy przez  $a_2$ . Konstrukcję tę powtarzamy nieskończenie wiele razy. Obliczmy sumę  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

## Rozwiązanie

Zaznaczmy na osi liczbowej odcinek o długości 1:  $\langle 0, 1 \rangle$ .



Wykonujemy pierwszy krok.

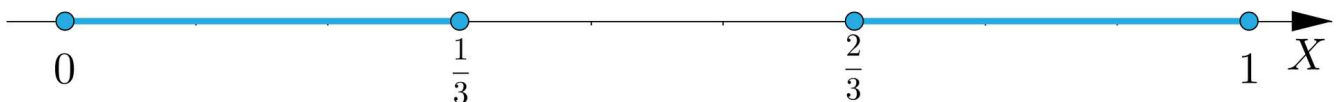
Podzielmy odcinek  $\langle 0, 1 \rangle$  na 3 równe części i usuńmy środkowy odcinek otwarty.

Otrzymujemy zbiór

$$\langle 0, \frac{1}{3} \rangle \cup \langle \frac{2}{3}, 1 \rangle.$$

Stąd otrzymujemy

$$a_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$



Wykonajmy drugi krok.

Otrzymujemy zbiór

$$\langle 0, \frac{1}{9} \rangle \cup \langle \frac{2}{9}, \frac{3}{9} \rangle \cup \langle \frac{6}{9}, \frac{7}{9} \rangle \cup \langle \frac{8}{9}, 1 \rangle.$$

A więc mamy 4 odcinki, a każdy ma długość  $\frac{1}{9}$ , czyli  $a_2 = \frac{4}{9}$ .



Możemy dokonać następującej obserwacji:

W kroku  $n$  powstaje dwa razy więcej odcinków niż powstało w kroku  $(n - 1)$ , ale każdy odcinek ma  $\frac{1}{3}$  długości odcinka z poprzedniego kroku. Zatem ciąg  $(a_n)$  jest ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie  $a_1 = \frac{2}{3}$  i ilorazie  $q = \frac{2}{3}$ .

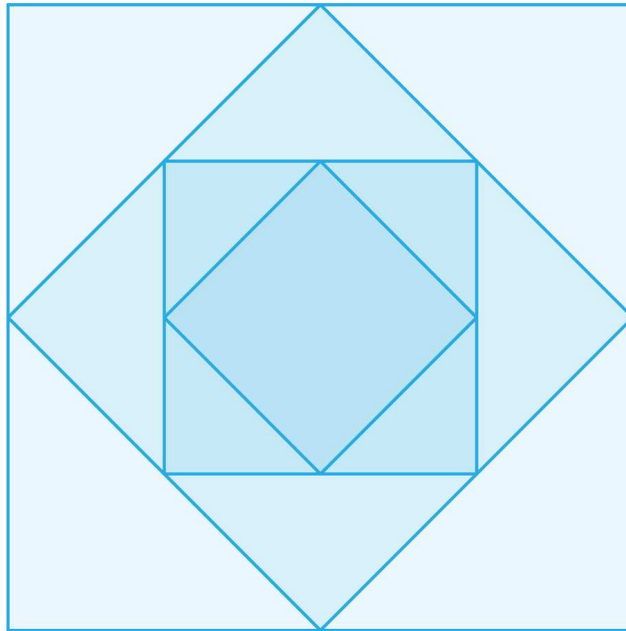
Stąd **suma szeregu geometrycznego**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest równa

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 2.$$

## Przykład 2

W kwadrat o boku długości 2 wpisano drugi kwadrat, którego wierzchołkami są środki boków danego kwadratu. W ten sam sposób w drugi kwadrat wpisano trzeci itd.

Wyznamy sumę obwodów i sumę pól otrzymanego nieskończonego ciągu kwadratów.



### Rozwiązanie

Jeżeli bok pierwszego kwadratu ma długość  $a_1 = 2$ , to możemy obliczyć długość boku drugiego kwadratu korzystając z twierdzenia Pitagorasa

$$a_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Zatem  $\frac{a_2}{a_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Zauważmy, że długość boku  $a_3$  trzeciego kwadratu w stosunku do długości boku  $a_2$  drugiego kwadratu ma się tak, jak długość boku  $a_2$  drugiego kwadratu w stosunku do długości boku  $a_1$ , czyli  $\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Zatem długości boków kolejnych kwadratów tworzą ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie  $a_1 = 2$  i ilorazie  $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Suma obwodów wszystkich kwadratów jest zatem równa

$$L = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \cdot 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \dots = \frac{8}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{16}{2 - \sqrt{2}}.$$

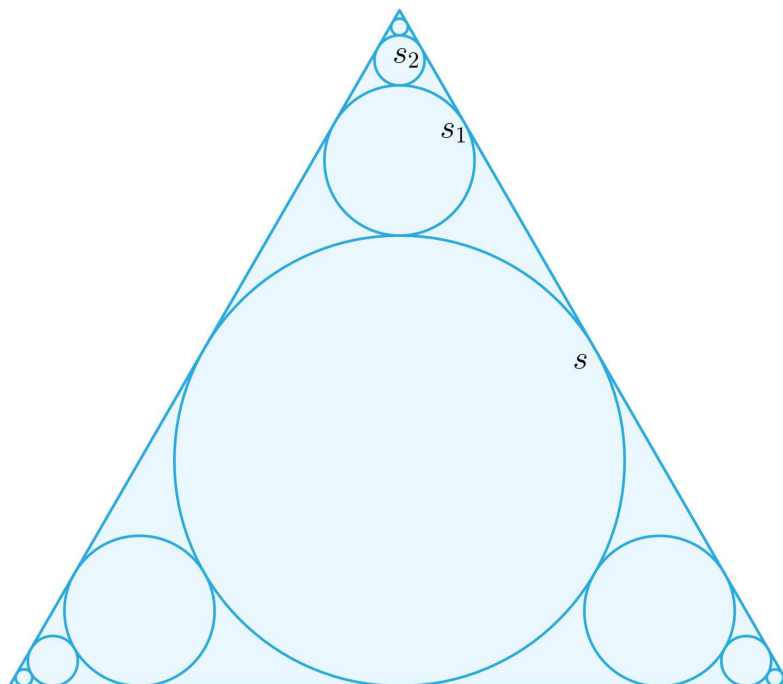
Suma pól wszystkich kwadratów jest zatem równa

$$P = 2^2 + \left(2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \dots = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}} = 8.$$

### Przykład 3

W trójkąt równoboczny o boku długości 1 wpisano koło. Następnie wpisano trzy koła styczne do wpisanego koła i boków danego trójkąta. Następnie wpisano trzy koła,

z których każde jest styczne do jednego koła powstałego w poprzednim kroku i dwóch boków. Czynność tę powtórzono nieskończenie wiele razy. Obliczmy sumę pól wszystkich tak wpisanych kół.



### Rozwiązanie

Promień pierwszego okręgu  $s$  wpisanego w trójkąt równoboczny o boku długości 1 ma długość  $r = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Następne trzy okręgi  $s_1$  styczne do okręgu  $s$  i dwóch boków trójkąta, to w istocie okręgi wpisane w trójkąt równoboczny o boku długości  $\frac{1}{3}$ . Zatem promień każdego z tych okręgów jest równy

$$r_1 = \frac{1}{3}r = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{18}.$$

Zauważamy, że promienie kolejnych okręgów stanowią  $\frac{1}{3}$  promienia okręgu z poprzedniego kroku.

Zatem zapiszmy sumę pól kół

$$S = \pi \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + 3\pi \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + 3\pi \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \dots$$

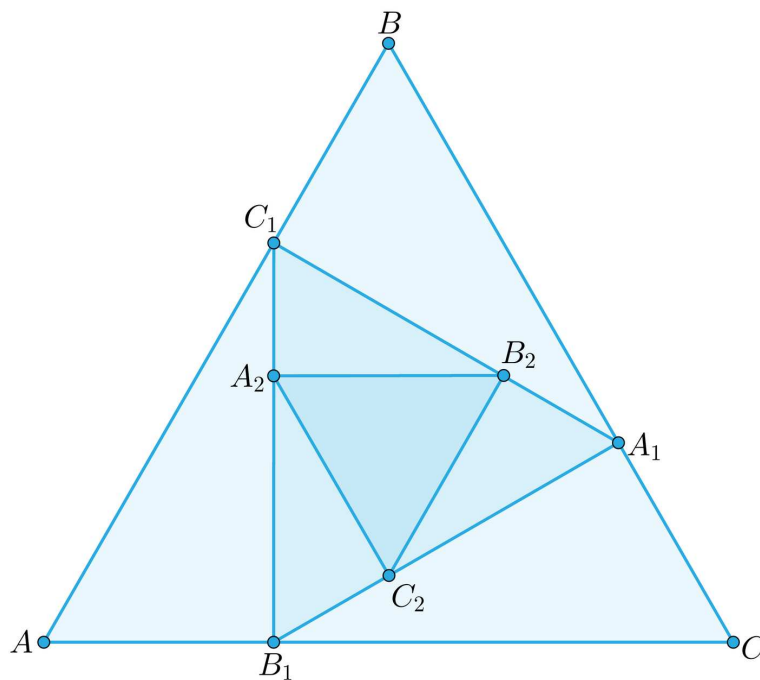
Zauważmy, że począwszy od drugiego składnika suma stanowi szereg geometryczny o ilorazie  $q = \frac{1}{9}$ .

$$\text{Zatem } S = \pi \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{3\pi \cdot \frac{1}{108}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{32} = \frac{11\pi}{96}.$$

#### Przykład 4

Na bokach  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  trójkąta równobocznego  $ABC$  o boku długości 1, wyznaczamy punkty odpowiednio:  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  w taki sposób, że  $\frac{|AC_1|}{|AB|} = \frac{|BA_1|}{|BC|} = \frac{|CB_1|}{|CA|} = a$ , gdzie  $a$  jest pewną liczbą dodatnią mniejszą od 1. Na bokach  $A_1B_1$ ,  $B_1C_1$ ,  $C_1A_1$  trójkąta równobocznego  $A_1B_1C_1$  wyznaczamy punkty odpowiednio:  $C_2$ ,  $A_2$ ,  $B_2$  w taki sposób, że  $\frac{|A_1C_2|}{|A_1B_1|} = \frac{|B_1A_2|}{|B_1C_1|} = \frac{|C_1B_2|}{|C_1A_1|} = a$ . W taki sposób postępujemy w nieskończoność. Obliczymy sumę obwodów tych wszystkich trójkątów  $ABC$ ,  $A_1B_1C_1$ ,  $A_2B_2C_2$ , ...

#### Rozwiązanie



Najpierw ustalimy związek między bokami trójkąta  $ABC$  i  $A_1B_1C_1$ .

Przeanalizujmy trójkąt  $AC_1B_1$ ,  $|AB_1| = 1 - a$ ,  $\sphericalangle C_1AB_1 = 60^\circ$ .

Korzystając z twierdzenia cosinusów, obliczamy długość odcinka  $|C_1B_1|$ :

$$|C_1B_1|^2 = |AC_1|^2 + |AB_1|^2 - 2 \cdot |AC_1| \cdot |AB_1| \cos(\sphericalangle C_1AB_1)$$

$$|C_1B_1|^2 = a^2 + (1 - a)^2 - 2a(1 - a)\frac{1}{2}$$

$$|C_1B_1|^2 = a^2 + a^2 - 2a + 1 - a + a^2$$

$$|C_1B_1|^2 = 3a^2 - 3a + 1$$

$$|C_1B_1| = \sqrt{3a^2 - 3a + 1}$$

Zatem otrzymujemy:  $\frac{|C_1B_1|}{|CB|} = \sqrt{3a^2 - 3a + 1}$

Zatem długości boków kolejnych trójkątów tworzą ciąg geometryczny o ilorazie  $q = \sqrt{3a^2 - 3a + 1}$ .

Zatem suma długości obwodów jest równa:

$$3 + 3\sqrt{3a^2 - 3a + 1} + 3\left(\sqrt{3a^2 - 3a + 1}\right)^2 + \dots = \frac{3}{1 - \sqrt{3a^2 - 3a + 1}}.$$

## Słownik

**suma szeregu geometrycznego**

jeżeli  $|q| < 1$  lub  $a_1 = 0$ , to szereg geometryczny  $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$  jest zbieżny.

Jeżeli  $a_1 = 0$ , to  $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1} = 0$ .

Jeżeli  $|q| < 1$ , to  $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$

# Animacja

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą animacją, a następnie wykonaj następane polecenie.

# Wystąpił błąd

Film nawiązujący do treści lekcji przedstawiający przykłady szeregów geometrycznych.

---

## Polecenie 2

Na bokach  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  kwadratu  $ABCD$  o boku długości 1, wyznaczamy punkty odpowiednio:  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$  w taki sposób, że

$\frac{|AA_1|}{|AB|} = \frac{|BB_1|}{|BC|} = \frac{|CC_1|}{|CD|} = \frac{|DD_1|}{|DA|} = a$ , gdzie  $a$  jest pewną liczbą dodatnią mniejszą od

1. Na bokach  $A_1B_1$ ,  $B_1C_1$ ,  $C_1D_1$ ,  $D_1A_1$  kwadratu  $A_1B_1C_1D_1$  wyznaczamy punkty odpowiednio:  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ ,  $D_2$  w taki sposób, że

$\frac{|A_1A_2|}{|A_1B_1|} = \frac{|B_1B_2|}{|B_1C_1|} = \frac{|C_1C_2|}{|C_1D_1|} = \frac{|D_1D_2|}{|D_1A_1|} = a$ . Tak postępujemy w nieskończoność. Oblicz sumę pól tych wszystkich kwadratów.

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4

Na każdym rysunku przedstawiono krzywą, zbudowaną z nieskończonej liczby półokręgów. Wiedząc, że promienie kolejnych półokręgów są ciągami geometrycznymi, połącz krzywą z jej długością.



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7

Odcinek długości 1 dzielimy na 5 równych części i usuwamy drugi i czwarty odcinek otwarty. Sumę długości odcinków, które pozostały oznaczamy przez  $a_1$ . Następnie każdy z tych odcinków ponownie dzielimy na 5 równych części i usuwamy drugi i czwarty odcinek otwarty z każdego z nich, otrzymując dziewięć odcinków, których sumę długości oznaczamy przez  $a_2$ . Konstrukcję tę powtarzamy nieskończenie wiele razy. Oblicz sumę  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$



## Ćwiczenie 8



Na bokach  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  trójkąta równobocznego  $ABC$  o boku długości  $x$ ,  
wyznaczamy punkty odpowiednio:  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  w taki sposób, że

$\frac{|AC_1|}{|AB|} = \frac{|BA_1|}{|BC|} = \frac{|CB_1|}{|CA|} = \frac{2}{3}$ . Na bokach  $A_1B_1$ ,  $B_1C_1$ ,  $C_1A_1$  trójkąta równobocznego

$A_1B_1C_1$  wyznaczamy punkty odpowiednio:  $C_2$ ,  $A_2$ ,  $B_2$  w taki sposób, że

$\frac{|A_1C_2|}{|A_1B_1|} = \frac{|B_1A_2|}{|B_1C_1|} = \frac{|C_1B_2|}{|C_1A_1|} = \frac{2}{3}$ . Tak postępujemy w nieskończoność. Dla jakich

wartości  $x$  suma pól tych wszystkich trójkątów jest równa  $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ ?

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Jacek Dymel

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Szeregi geometryczne w geometrii

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

VI. Ciągi. Zakres rozszerzony.

Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- rozwiązuje zadania geometryczne za pomocą szeregów geometrycznych,
- stosuje związki w metryczne w figurach geometrycznych.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- dyskusja;
- burza mózgów;
- liga zadaniowa.

## **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

## **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

## **Przebieg lekcji**

### **Faza wstępna:**

1. Przedstawienie uczniom tematu: „Szeregi geometryczne w geometrii” oraz celów lekcji, a następnie określenie kryteriów sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

### **Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszycie minimum dwa pytania. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
2. Uczniowie zapoznają się z animacją, zapisują ewentualne wątpliwości i niezrozumiałe aspekty, które zostały w niej przedstawione - nauczyciel tłumaczy je na forum klasy. Następnie wykonują polecenie związane z animacją.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy komentowane są przez nauczyciela po ich zakończeniu.

### **Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

### **Praca domowa:**

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Szeregi geometryczne w geometrii”).

2. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”.

**Materiały pomocnicze:**

[Szeregi geometryczne zbieżne](#)

**Wskazówki metodyczne:**

Animację można wykorzystać jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy przed sprawdzianem wiadomości.