



Pole powierzchni ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego

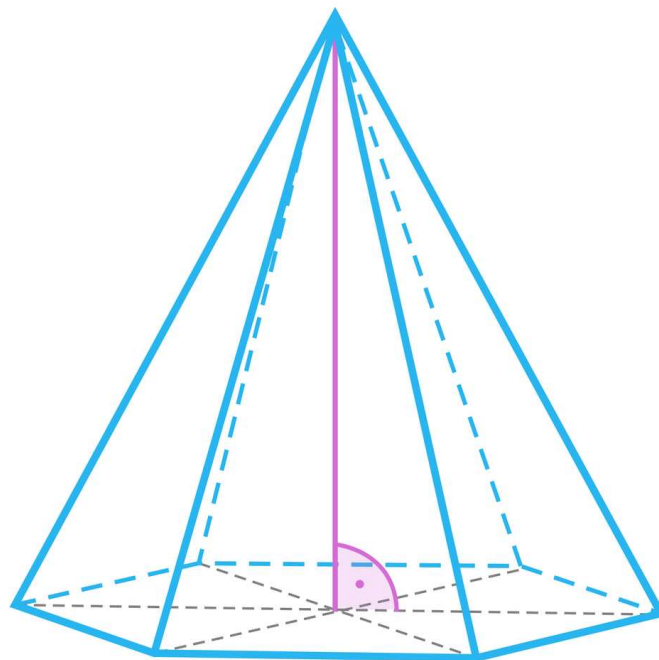
- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Pole powierzchni ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

Czy potrafiłbyś policzyć, ile materiału potrzeba na wykonanie namiotu w kształcie ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego? Czy wiedziałbyś, ile litrów farby musisz kupić, by pomalować dach o takim samym kształcie? W tym materiale dowiesz się, jakie obliczenia należy wykonać, aby odpowiedzieć na obydwa pytania.



Twoje cele

- Obliczysz pole ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego.
- Wykorzystasz poznany wzór w zadaniach, obliczysz długości odcinków ostrosłupa, znając jego pole i odwrotnie.

Przeczytaj

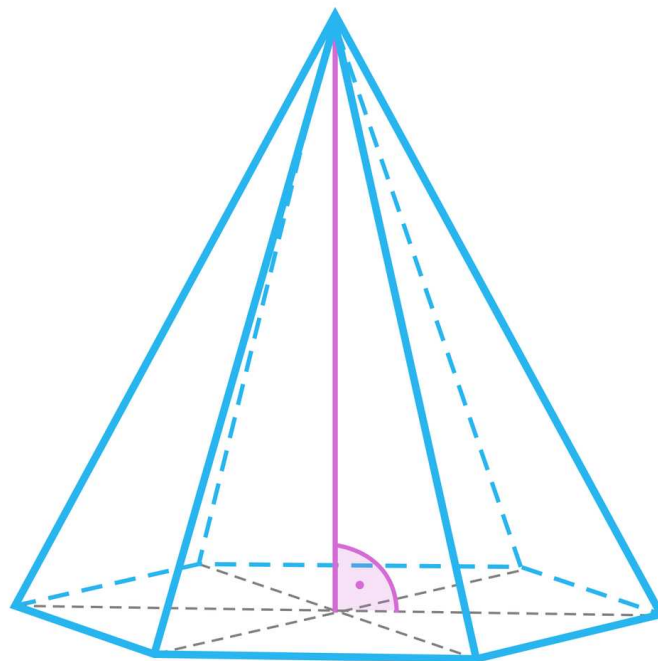
Zacznijmy od ogólnego wzoru na pole powierzchni ostrosłupa:

$$P_c = P_p + P_b,$$

gdzie:

P_p - pole podstawy,

P_b - pole powierzchni bocznej.



Podstawą ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest sześciokąt foremny, zatem

$$P_p = \frac{6a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Ściany boczne są trójkątami równoramiennymi o podstawie długości a i wysokości równej h , więc pole jednej ściany bocznej wyraża się wzorem:

$$P_{sb} = \frac{1}{2}ah.$$

W **ostrosłupie prawidłowym** sześciokątnym mamy sześć ścian bocznych, stąd otrzymujemy wzór na pole powierzchni bocznej:

$$P_b = 3ah.$$

Podsumowując wzór na pole całkowite **ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego** wyraża się wzorem:

$$P_c = \frac{6a^2\sqrt{3}}{4} + 3ah,$$

gdzie:

a - długość krawędzi podstawy,

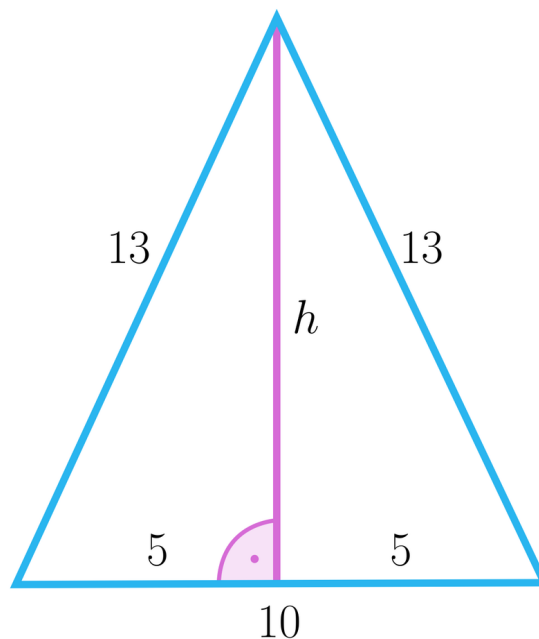
h - wysokość ściany bocznej.

Przykład 1

Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest trójkątem równoramiennym o ramionach długości 13 cm i podstawie 10 cm. Obliczymy **pole** tego ostrosłupa.

Rozwiązanie

Narysujemy jedną ze ścian bocznych rozpatrywanego ostrosłupa.



Obliczymy wysokość ściany bocznej. Na mocy twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$h^2 + 5^2 = 13^2,$$

$$h^2 = 144,$$

$$h = 12.$$

Podstawimy liczby do wzoru na pole ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego.

Obliczamy pole powierzchni podstawy $P_p = \frac{6 \cdot 10^2 \sqrt{3}}{4} = 150\sqrt{3}$,

pole powierzchni bocznej $P_b = 3 \cdot 10 \cdot 12$

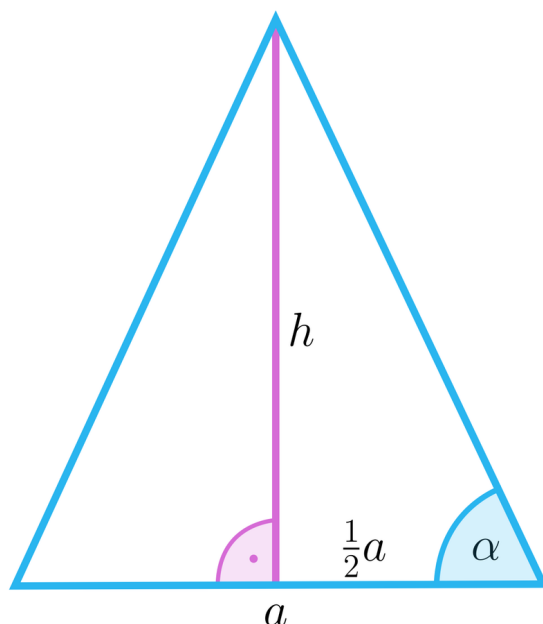
i ostatecznie pole całkowite powierzchni ostrosłupa $P_c = 150\sqrt{3} + 360$.

Przykład 2

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego wynosi S . Obliczmy długość krawędzi podstawy, jeśli krawędź boczna jest nachylona do krawędzi podstawy pod kątem α .

Rozwiązanie

Narysujmy jedną ze ścian bocznych rozpatrywanego ostrosłupa.



Wiemy, że pole powierzchni bocznej $P_b = S = 3ah$.

Korzystając z funkcji trygonometrycznych, mamy: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{\frac{1}{2}a}$.

Stąd wyznaczmy wysokość ściany bocznej $h = \frac{1}{2}a \cdot \operatorname{tg} \alpha$,

którą podstawiamy do wzoru na pole powierzchni bocznej $S = 3a \cdot \frac{1}{2}a \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

Ostatecznie wyprowadzamy wzór na długość krawędzi podstawy a .

$$2S = 3a^2 \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{2S}{3 \operatorname{tg} \alpha} = a^2$$

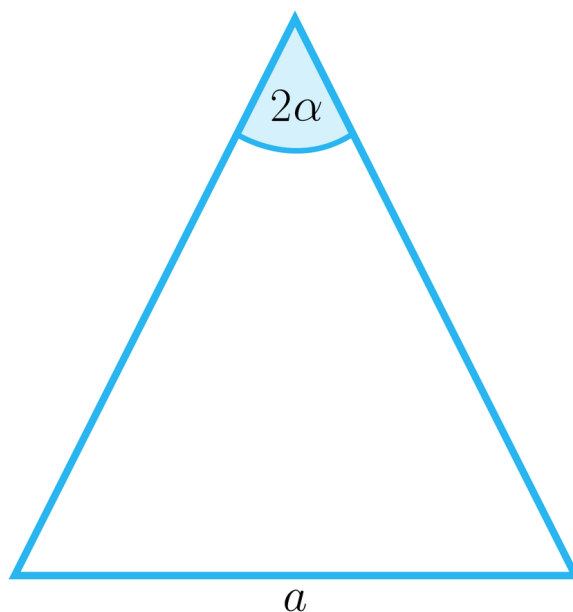
$$a = \sqrt{\frac{2S}{3 \operatorname{tg} \alpha}}$$

Przykład 3

Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy a i kącie płaskim przy wierzchołku ostrosłupa 2α jest dwukrotnie mniejsze od jego pola powierzchni bocznej. Obliczmy tangens kąta α .

Rozwiązanie

Narysujmy ścianę boczną ostrosłupa:

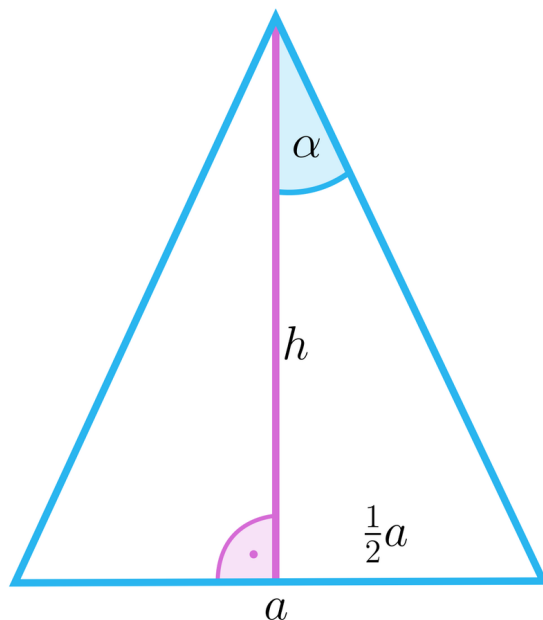


Wiemy, że $P_b = 2P_p$,

Niech h – wysokość ściany bocznej.

Wówczas $3ah = 2 \cdot \frac{6a^2\sqrt{3}}{4}$,

stąd otrzymujemy wysokość ściany bocznej $h = a\sqrt{3}$.



Zauważmy, że

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{1}{2}a}{h} = \frac{a}{2h},$$

$$2h \cdot \operatorname{tg} \alpha = a.$$

Podstawiając $\sqrt{3}a$ w miejsce h otrzymujemy:

$$2\sqrt{3}a \cdot \operatorname{tg} \alpha = a,$$

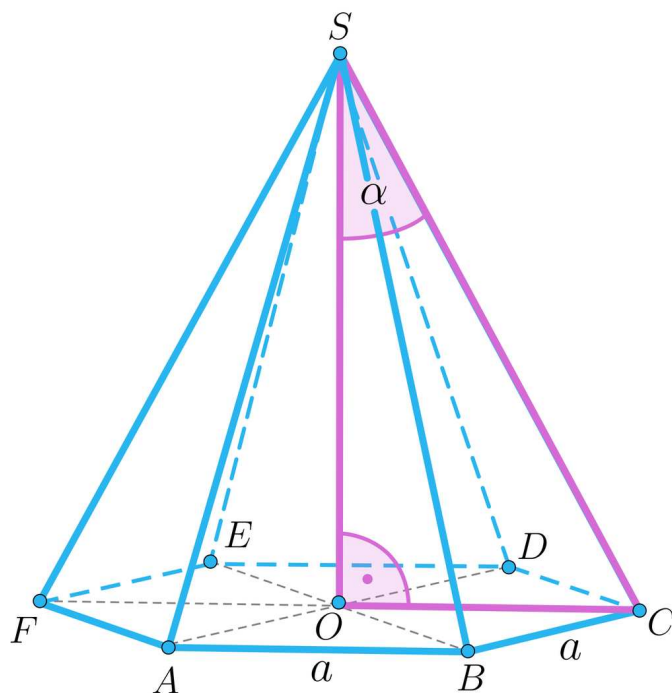
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Przykład 4

Oblicz pole ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy a , wiedząc, że kąt pomiędzy wysokością a krawędzią boczną ostrosłupa wynosi α .

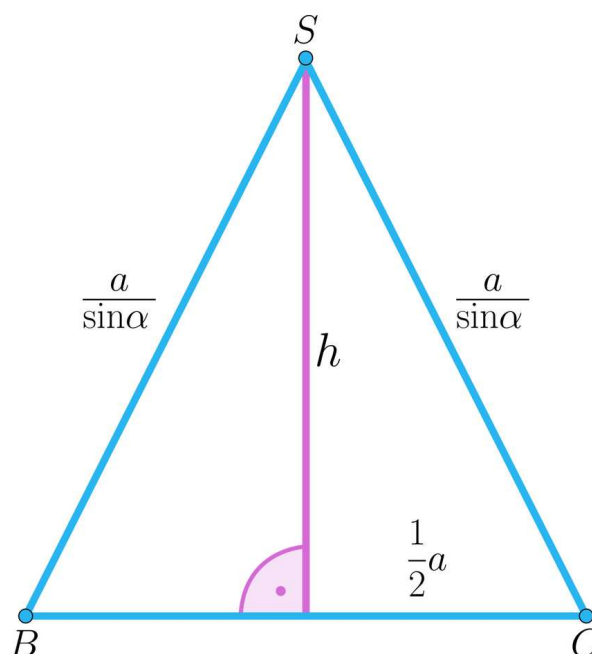
Rozwiązanie:

Wykonajmy rysunek pomocniczy.



Trójkąt SOC jest prostokątny, zatem wykorzystując funkcje trygonometryczne, mamy:
 $\frac{|OC|}{|SC|} = \sin \alpha$, gdzie $|OC| = \frac{a}{2}$. Zatem $\frac{a}{2|SC|} = \sin \alpha$.

Aby obliczyć pole powierzchni bocznej policzmy wysokość ściany bocznej. Oznaczmy ją jako h .



Mamy więc:

$$h^2 = \left(\frac{a}{\sin \alpha}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = \frac{a^2}{\sin^2 \alpha} - \frac{a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{4a^2 - a^2 \sin^2 \alpha}{4 \sin^2 \alpha}$$

$$h = \frac{a \sqrt{4 - \sin^2 \alpha}}{2 \sin \alpha}.$$

Zatem pole powierzchni ściany bocznej wynosi:

$$P_{sb} = \frac{1}{2} a \frac{a \sqrt{4 - \sin^2 \alpha}}{2 \sin \alpha} = \frac{a^2 \sqrt{4 - \sin^2 \alpha}}{4 \sin \alpha}.$$

Pole powierzchni bocznej:

$$P_b = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{4 - \sin^2 \alpha}}{4 \sin \alpha} = \frac{3a^2 \sqrt{4 - \sin^2 \alpha}}{2 \sin \alpha}.$$

Pole podstawy:

$$P_p = \frac{6a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

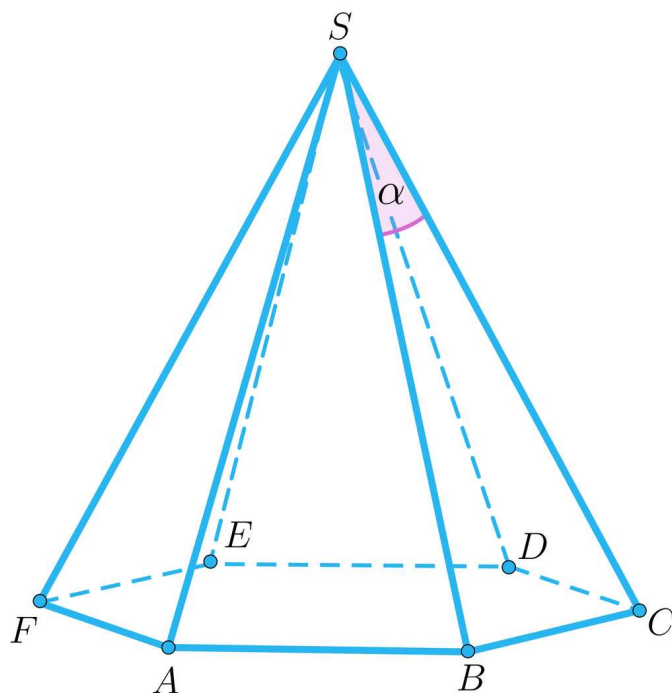
Pole całkowite:

$$P_c = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2} + \frac{3a^2 \sqrt{4 - \sin^2 \alpha}}{2 \sin \alpha} = \frac{3}{2} a^2 \left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{4 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} \right).$$

Przykład 5

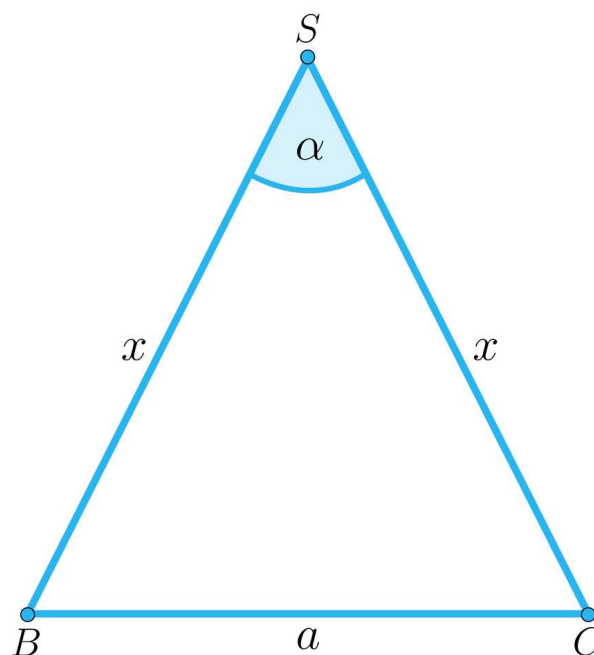
Dany jest ostrosłup prawidłowy sześciokątny, w którym kąt płaski przy wierzchołku ostrosłupa ma miarę α . Oblicz długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa, wiedząc, że jego pole ściany bocznej jest równe polu czworościanu foremnego o tej samej długości krawędzi podstawy a , co w ostrosłupie sześciokątnym.

Wykonajmy rysunek pomocniczy.



Skoro pole ściany bocznej jest równe polu czworościanu foremnego o krawędzi a , to $P_{sb} = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.

Oznaczmy długość krawędzi bocznej ostrosłupa jako x . Wykorzystamy wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$, gdzie a, b są to długości dwóch boków trójkąta, a α jest miarą kąta zawartego między nimi.



Mamy więc:

$$a^2\sqrt{3} = \frac{1}{2}x^2 \sin \alpha$$

$$2a^2\sqrt{3} = x^2 \sin \alpha$$

$$x^2 = \frac{2a^2\sqrt{3}}{\sin \alpha}$$

$$x = \sqrt{\frac{2a^2\sqrt{3}}{\sin \alpha}}.$$

Ostatecznie długość krawędzi bocznej ostrosłupa wynosi:

$$x = a\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{\sin \alpha}}.$$

Słownik

ostrosłup prawidłowy

ostrosłup prosty, w którym podstawa jest wielokątem foremnym

ostrosłup prawidłowy sześciokątny

ostrosłup, w którego podstawie jest sześciokąt foremny, a wszystkie ściany boczne są przystającymi trójkątami

kąt płaski przy wierzchołku ostrosłupa

kąt pomiędzy ramionami ściany bocznej ostrosłupa

pole ostrosłupa

suma pól wszystkich ścian ostrosłupa

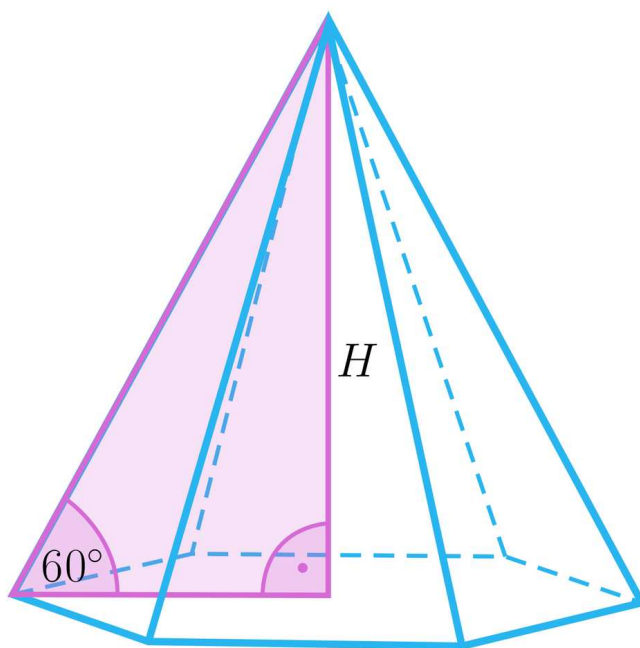
Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Oglądając galerię zdjęć interaktywnych, spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązać zamieszczone tam zadania, a dopiero następnie porównaj rozwiązania.

Polecenie 2

Obliczmy pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego przedstawionego na rysunku.



Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Wysokość ostrosłupa ma długość H . Połącz wielkości z odpowiadającymi im wzorami.

pole powierzchni bocznej

$$\frac{2}{3} H \sqrt{3}$$

długość krawędzi podstawy

$$\frac{4}{3} H^2 \sqrt{3}$$

pole podstawy

$$\frac{2}{3} H^2 \sqrt{3}$$

wysokość ściany bocznej

$$\frac{2}{3} H$$

Ćwiczenie 2



Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego krawędź podstawy jest trzy razy krótsza od krawędzi bocznej, wynosi $S^2(\sqrt{35} + \sqrt{3})$. Długość krawędzi podstawy wynosi:

☐ $\frac{S\sqrt{6}}{2}$

☐ $\frac{S\sqrt{6}}{3}$

☐ $S\sqrt{6}$

Ćwiczenie 3



Tangens kąta nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego do płaszczyzny podstawy o krawędzi długości a wynosi $\frac{4}{3}$. Uzupełnij zdania, przeciągając prawidłowe odpowiedzi w puste miejsca.

Wysokość ostrosłupa ma długość . Krótsza przekątna podstawy ostrosłupa ma długość . Wysokość ściany bocznej ma długość . Kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy wynosi .

Ćwiczenie 4



Kąt płaski przy wierzchołku ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma miarę 40° . Pole podstawy wynosi $6a^2\sqrt{3}$. Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa wynosi:

☐ $6a^2 \cdot \operatorname{tg} 20^\circ$

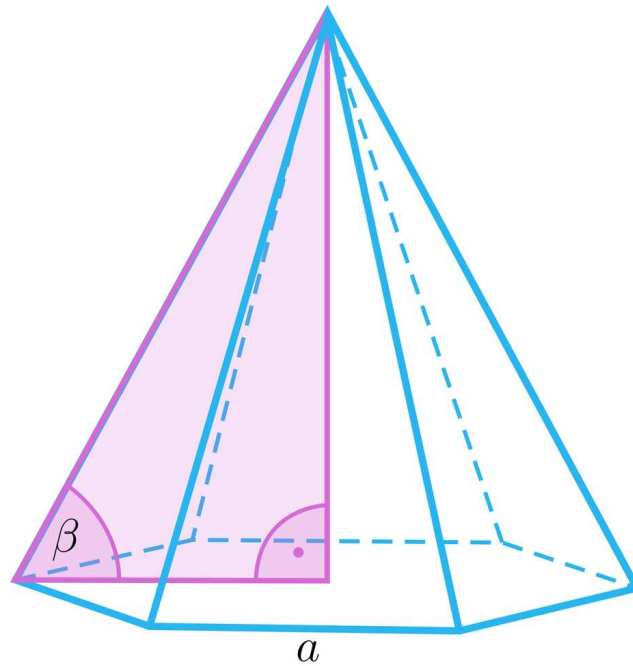
☐ $6a^2 \cdot \operatorname{tg} 40^\circ$

☐ $\frac{6a^2}{\operatorname{tg} 20^\circ}$

Ćwiczenie 5



Na rysunku przedstawiono rzut ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego. Na podstawie ilustracji uzupełnij przeciągając prawidłową odpowiedź.



Wysokość ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego:

Wysokość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego:

$$\frac{a\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+3}}{4}$$

$$a \operatorname{ctg} \beta$$

$$\frac{a\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+3}}{2}$$

$$a \sin \beta$$

$$\frac{a\sqrt{\operatorname{tg}^2\beta+3}}{2}$$

$$a \operatorname{tg} \beta$$

Ćwiczenie 6



Dany jest ostrosłup prawidłowy sześciokątny. Różnica między polem koła opisanego na podstawie a polem koła wpisanego w podstawę wynosi 9π . Cosinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy wynosi $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa wynosi:

☐ $54\sqrt{3} + 162$

☐ $54\sqrt{3} + 54$

☐ $36\sqrt{3} + 54$

Ćwiczenie 7

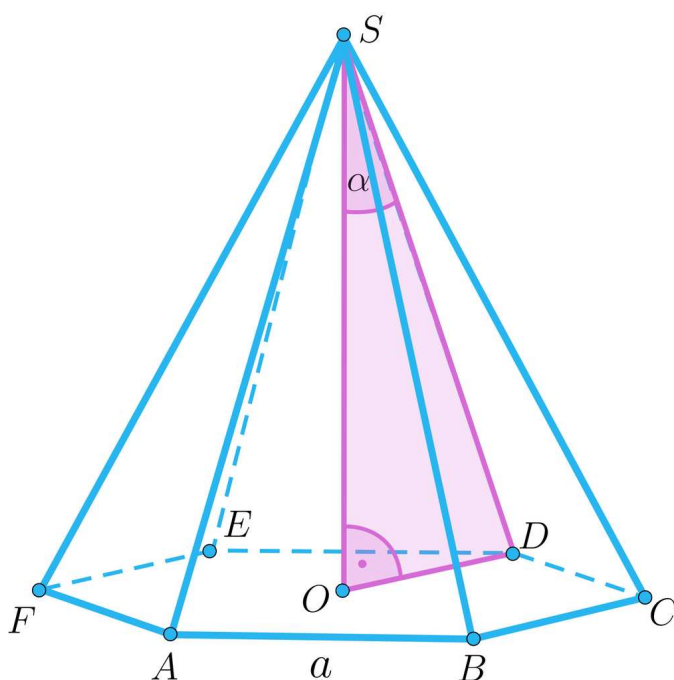


Krawędź boczna b ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego tworzy z krawędzią podstawy kąt α . Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.

Ćwiczenie 8



Uzasadnij, że pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego przedstawionego na rysunku poniżej wynosi $\frac{3a^2}{2\sin\alpha} \sqrt{4 - \sin^2\alpha}$.



Dla nauczyciela

Autor: Grażyna Kielczykowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pole powierzchni ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

X. Stereometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza pole powierzchni ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego;
- wykorzystuje trygonometrię w zadaniach na obliczanie pola.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- pogadanka,
- analiza pomysłów,
- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca indywidualna,

- praca w grupach,
- praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne:

- przykład bryły w kształcie ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego,
- komputery z dostępem do Internetu,
- projektor multimedialny,
- e-podręcznik,
- arkusze papieru, pisaki.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- Zapoznanie się z tematem lekcji. Ustalenie kryteriów sukcesu.
- Wprowadzenie do lekcji. Przypomnienie wzoru na pole ostrosłupa, wprowadzenie wzoru na pole ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego. Do tego etapu lekcji możemy wykorzystać część „Przeczytaj”, w której wzór jest wyprowadzony.
- Pokazanie przykładowej bryły. Policzenie jej pola. Nauczyciel zapisuje obliczenia, tak, aby wszyscy widzieli każdy krok (papier i mazaki).

Faza realizacyjna:

- Uczniowie siadają w parach przy komputerach (lub nauczyciel wyświetla treść na projektorze). Analizują treści z galerii zdjęć interaktywnych. Następnie rozwiązują zadanie umieszczone poniżej (Polecenie 2). Po rozwiązaniu zadania, wspólnie z nauczycielem omawiają wyniki.
- Uczniowie dobierają takie wymiary ostrosłupów prawidłowych sześciokątnych, aby ich pole było równe odpowiednio: a) około 615 m^2 b) około 1230 m^2 c) około 310 m^2 – analiza pomysłów.
- Burza mózgów dotycząca rozwiązania ćwiczeń 7, 8 ze Sprawdź się. Wybrani uczniowie rozwiązują ćwiczenia na tablicy.
- Uczniowie rozwiązują w parach zadania 1-4 z części Sprawdź się.

Faza podsumowująca:

Uczniowie podsumowują lekcję w oparciu o wcześniej ustalone kryteria sukcesu.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują w domu ćwiczenia 5, 6 z części Sprawdź się

Materiały pomocnicze:

[Pole powierzchni ostrosłupa](#)

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą rozwiązać zadanie przedstawione w galerii zdjęć interaktywnych samodzielnie, następnie porównać z rozwiązaniem przedstawionym w medium.