



Interpretacja graficzna równania kwadratowego zupełnego

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Interpretacja graficzna równania kwadratowego zupełnego

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Umiesz już rozwiązywać równania kwadratowe: obliczać wyróżnik trójmianu kwadratowego oraz pierwiastki równania.

W tym materiale zapoznasz się z interpretacją graficzną równania kwadratowego zupełnego, odczytasz z wykresu rozwiązania równania kwadratowego (jeżeli istnieją).

Rozwiązania równania kwadratowego $ax^2 + bx + c + 0$, dla $a \neq 0$ to inaczej miejsca zerowe funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c + 0$, dla $a \neq 0$.

Twoje cele

- Rozpoznasz równanie kwadratowe, którego interpretacja graficzna jest przedstawiona na rysunku
- Odczytasz z rysunku liczbę rozwiązań równania kwadratowego.
- Określisz zależności między współczynnikami równania.

Przeczytaj

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, dla $a \neq 0$ jest **parabola**. Wykres funkcji kwadratowej może przecinać oś X w dwóch różnych punktach, „dotykać” osi X oraz być położony nad osią X lub pod osią X . Położenie paraboli w układzie współrzędnych jest uzależnione od współczynnika a oraz liczby miejsc zerowych danej funkcji kwadratowej.

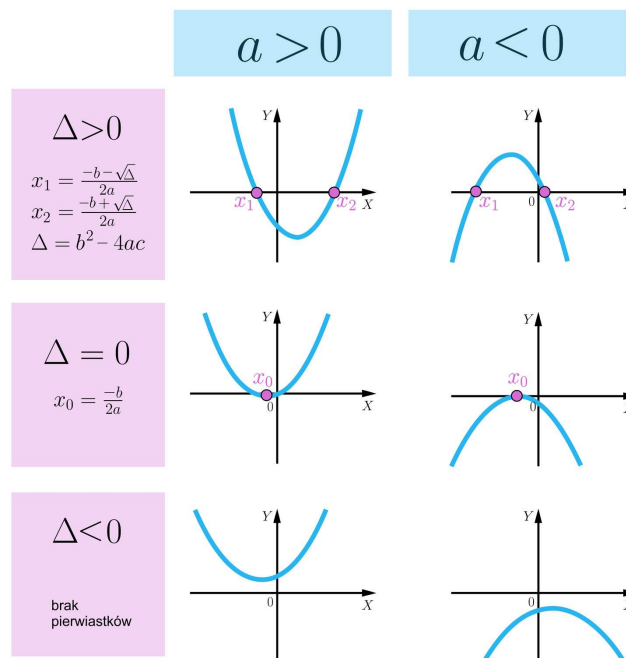
Twierdzenie: Postać iloczynowa trójkianu kwadratowego

Rozważmy trójkian kwadratowe $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

1. Jeżeli $\Delta > 0$, to trójkian można przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie x_1 i x_2 są pierwiastkami tego trójkianu.
2. Jeżeli $\Delta = 0$, to trójkian można przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_0)^2$, gdzie x_0 jest podwójnym pierwiastkiem tego trójkianu.
3. Jeżeli $\Delta < 0$, to trójkianu nie można zapisać w postaci iloczynowej.

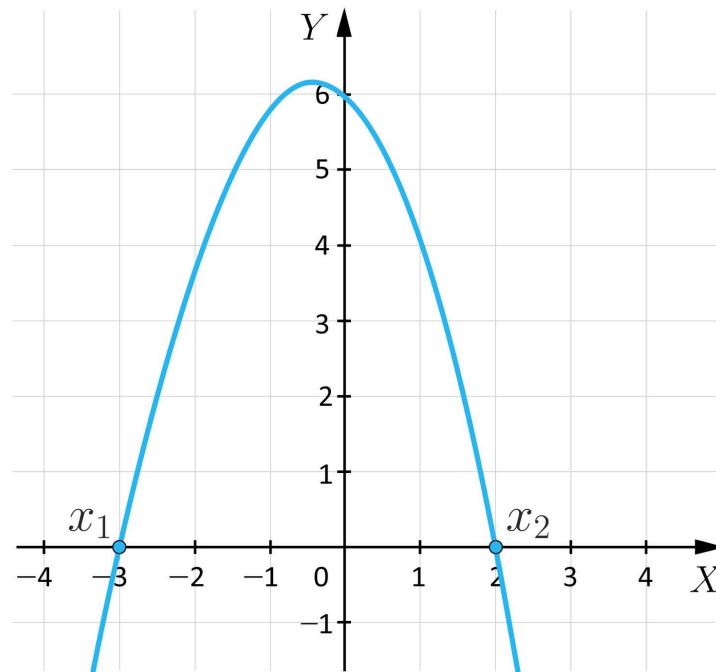
Gdy wyznaczymy miejsca zerowe funkcji kwadratowej, wyznaczymy również rozwiązania równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$, dla $a \neq 0$

Interpretacja graficzna równania kwadratowego zupełnego



Przykład 1

Korzystając z interpretacji graficznej równania kwadratowego zupełnego, określimy znak współczynnika a dla funkcji $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ i znak wyróżnika trójmianu kwadratowego.



Ramiona paraboli są skierowane do dołu, zatem $a < 0$.

Funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe, zatem $\Delta > 0$.

Przykład 2

Przedstawimy interpretację graficzną równania $2x^2 + x + 3 = 0$.

Współczynniki równania kwadratowego to $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$.

Obliczymy Δ .

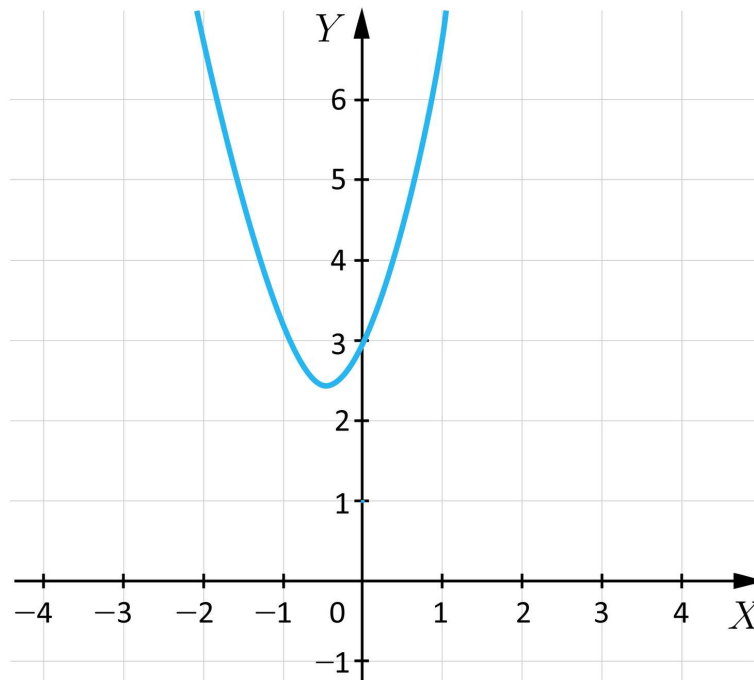
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1 - 24 = -23$$

Ponieważ $\Delta < 0$ zatem funkcja kwadratowa $f(x) = 2x^2 + x + 3$ nie ma miejsc zerowych.

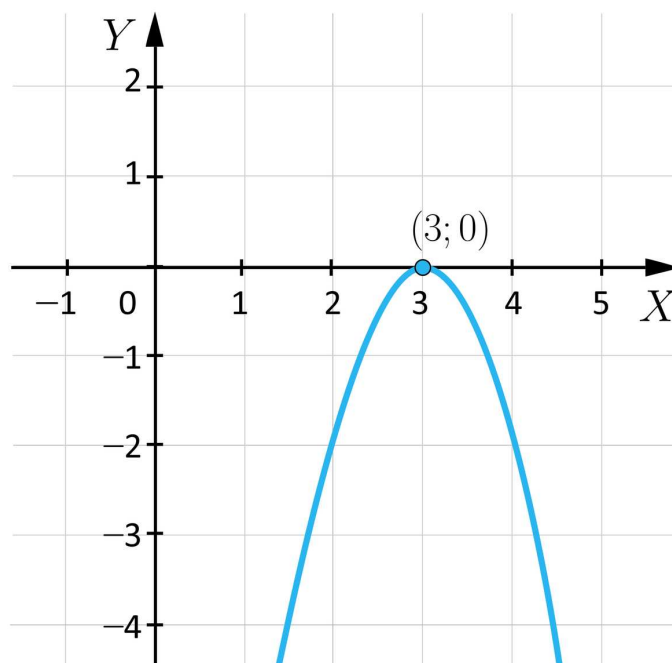
Ponieważ $a > 2$ zatem ramiona paraboli skierowane są do góry.

Zatem:



Przykład 3

Obliczmy taką wartość parametru m , dla której poniższy rysunek przedstawia interpretację graficzną równania $-x^2 + mx - 9 = 0$.



Miejszem zerowym funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + mx - 9$ jest liczba 3, natomiast współczynnik $a = -1$.

Zatem funkcja kwadratowa określona jest wzorem $f(x) = -(x - 3)^2$.

Czyli równanie kwadratowe ma postać $-(x - 3)^2 = 0$.

Przekształcając równoważnie równanie otrzymujemy

$$-(x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$-x^2 + 6x - 9 = 0$$

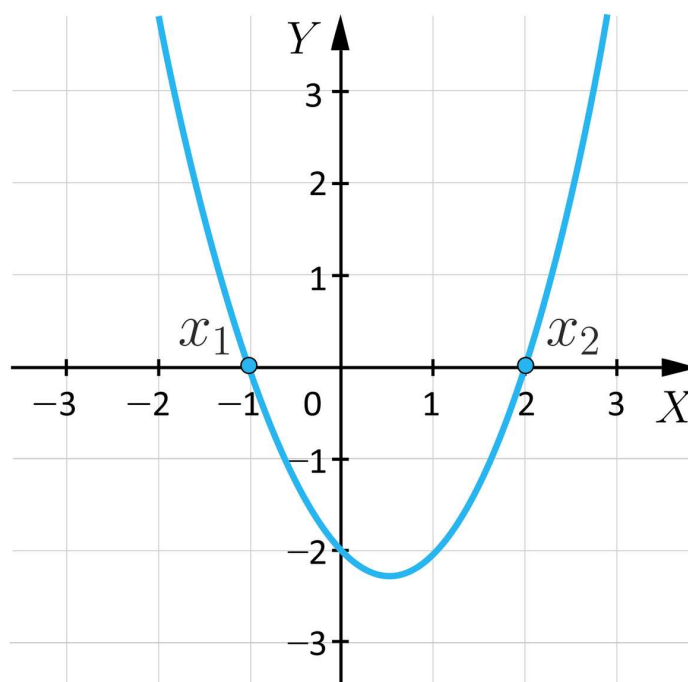
Z treści zadania wiemy, że równanie ma postać

$$-x^2 + mx - 9 = 0$$

Czyli $m = 6$.

Przykład 4

Obliczymy taką wartość parametru b , dla której poniższy rysunek przedstawia interpretację graficzną równania $x^2 - bx - 2 = 0$.



Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - bx - 2$ są liczby -1 i 2 .

Współczynnik $a = 1$, zatem funkcja kwadratowa określona jest wzorem $f(x) = (x - 2)(x + 1)$.

Czyli równanie kwadratowe ma postać $(x - 2)(x + 1) = 0$.

Przekształcając równoważnie równanie otrzymujemy:

$$x^2 + x - 2x - 2 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Z treści zadania wiemy, że

$$x^2 - bx - 2 = 0$$

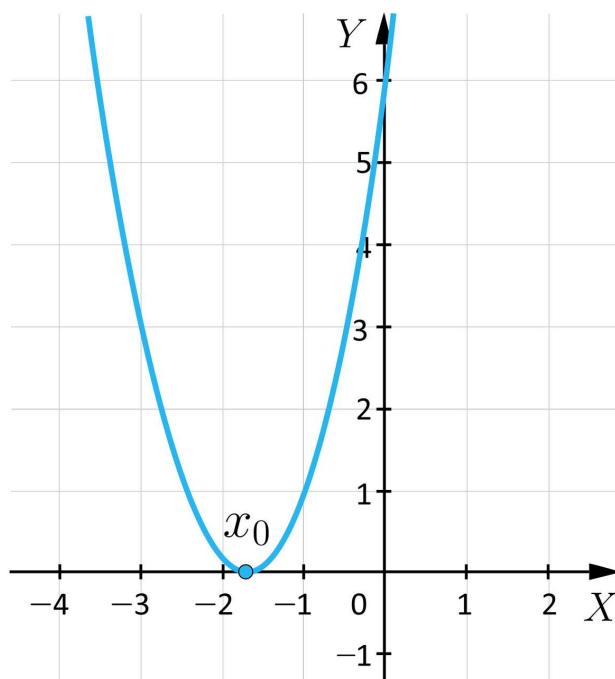
Czyli

$$-b = -1.$$

$$b = 1.$$

Przykład 5

Korzystając z interpretacji graficznej równania $ax^2 + bx + c = 0$, dla $a \neq 0$ ustalimy znaki współczynników a , b , i c .



Ponieważ ramiona **paraboli** są skierowane do góry, zatem $a > 0$.

Na podstawie wykresu możemy powiedzieć, że funkcja ma jedno miejsce zerowe, które jest liczbą ujemną.

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$-\frac{b}{2a} < 0$$

$$\frac{b}{2a} > 0$$

Ponieważ $a > 0$ zatem współczynnik b również musi być liczbą dodatnią.

Zatem $b > 0$.

Współczynnik c jest drugą współrzędną punktu przecięcia wykresu funkcji z osią Y .

$$f(0) = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c$$

$$f(0) = c$$

Zatem na podstawie wykresu widzimy, że $c > 0$.

Słownik

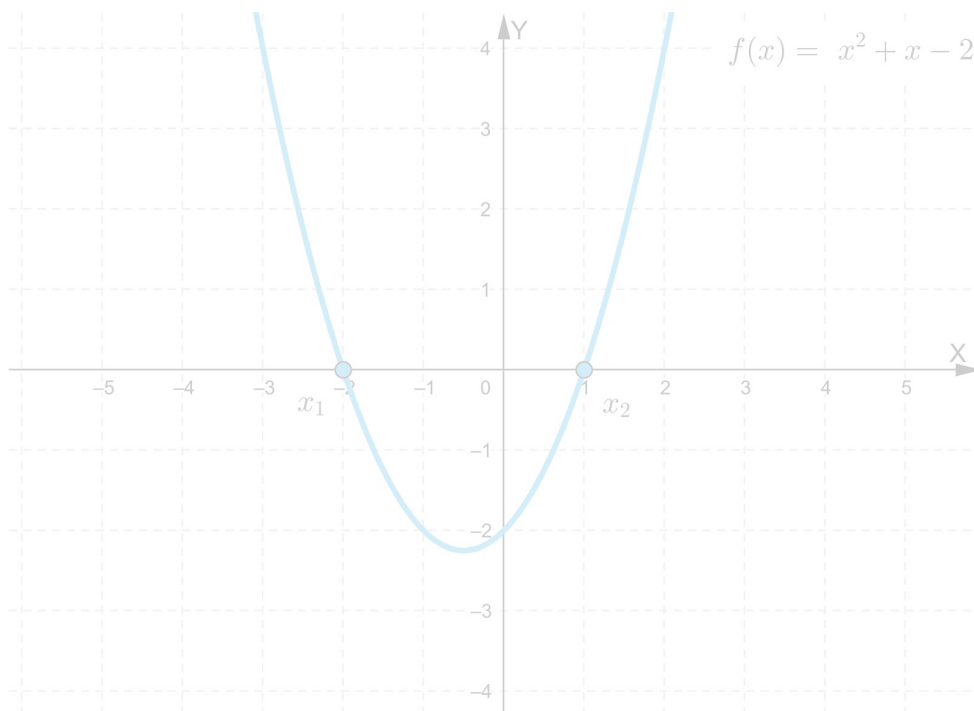
parabola

wykres funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, dla $a \neq 0$

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Zapoznaj się z symulacją interaktywną pokazującą interpretację graficzną równania kwadratowego. Poruszając suwakami obserwuj, jak zmienia się położenie paraboli względem osi.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DOUgTNIon>

Polecenie 2

Ustaw położenie paraboli w taki sposób, aby „dotykała” osi w jednym punkcie. Ile jest równy wyróżnik trójmianu kwadratowego, gdy wierzchołek paraboli leży na osi? Jak mogą być skierowane ramiona paraboli?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Przeciagnij układ warunków, które spełnia dane równanie kwadratowe.

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 5 = 0 \text{ dla } \boxed{}$$

$$\sqrt{2}x^2 - 4x + 2\sqrt{2} = 0 \text{ dla } \boxed{}$$

$$-2\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3} = 0 \text{ dla } \boxed{}$$

$$-x^2 + \sqrt{7}x - 2 = 0 \text{ dla } \boxed{}$$

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

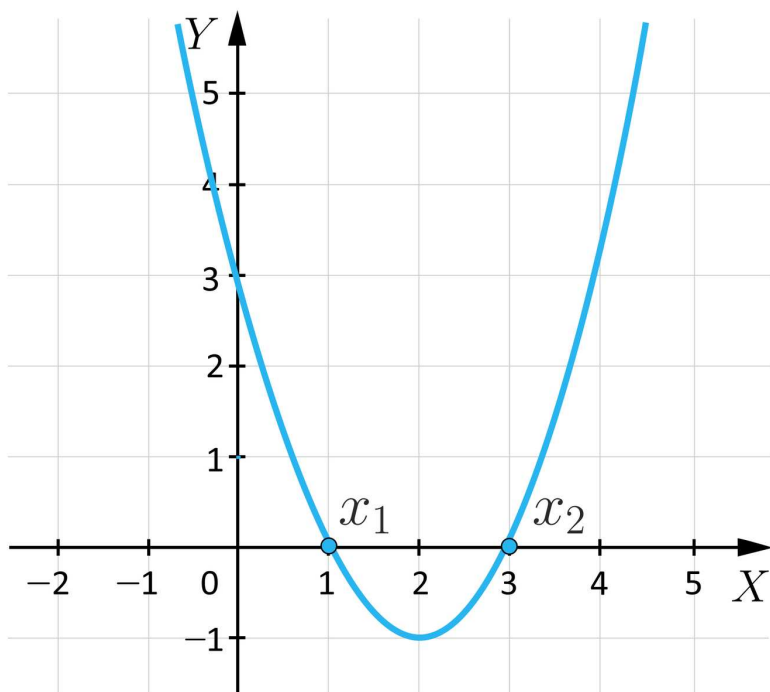
Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



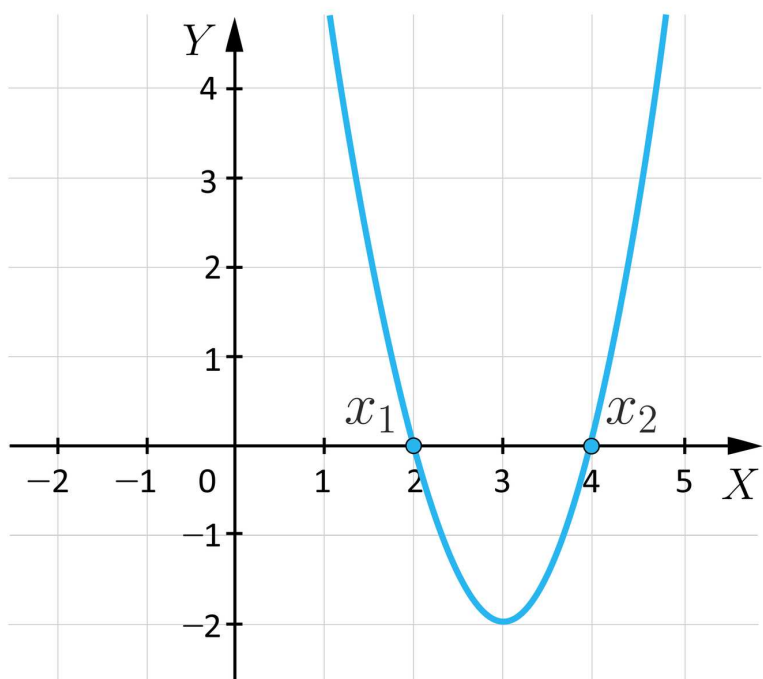
Wpisz w wyznaczone miejsce taką liczbę, aby rysunek przedstawiał interpretację graficzną otrzymanego równania.



$$x^2 - \boxed{} \cdot x + 3 = 0$$

Ćwiczenie 4

Zapoznaj się z ilustracją i na jej podstawie określ, jaki wzór opisuje przedstawioną funkcję.



Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $2 \cdot (x + 2)(x + 4) = 0$

☐ $2 \cdot (x + 2)(x - 4) = 0$

☐ $2 \cdot (x - 2)(x - 4) = 0$

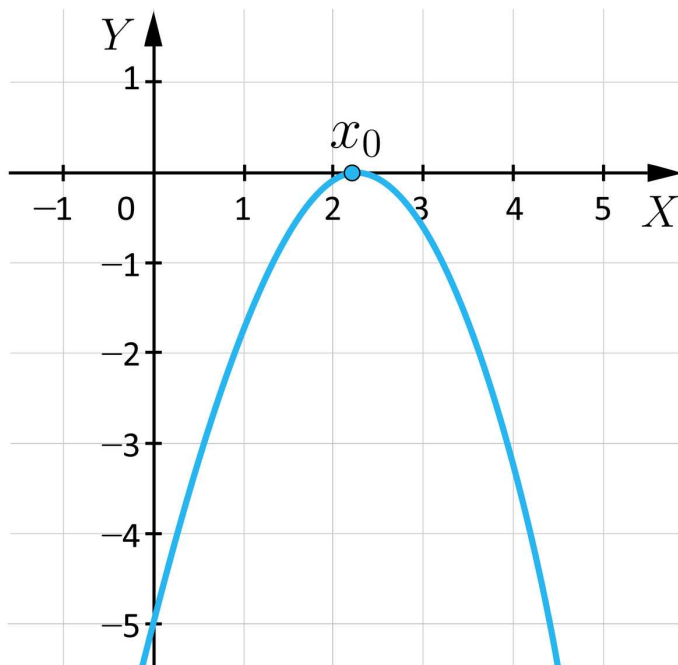
☐ $2 \cdot (x - 2)(x + 4) = 0$

Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6

Przenieś w wyznaczone miejsce taką liczbę, aby rysunek przedstawiał interpretację graficzną równania.



$$-x^2 + \boxed{} \cdot x - 5 = 0$$

Ćwiczenie 7



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Równanie $x^2 - \sqrt{2} = 0$ ma dwa różne rozwiązania ujemne.

☐ Równanie $-x^2 + 4x - 4 = 0$ ma jedno rozwiązanie.

☐ Równanie $x^2 + 4 = 0$ nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.

☐ Równanie $x^2 - \sqrt{2} = 0$ ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków.

☐ Równanie $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 = 0$ ma jeden, dodatni pierwiastek.

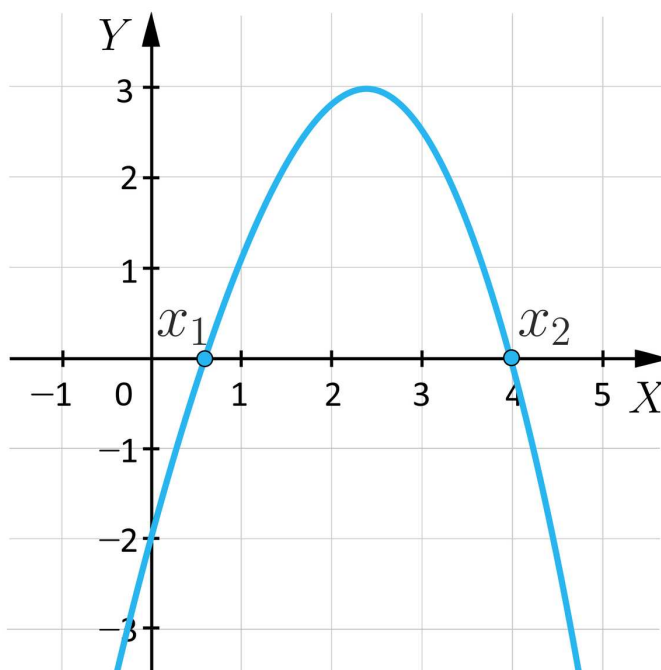
☐ Równanie $x^2 + 6x + 9 = 0$ jest równaniem sprzecznym.

Ćwiczenie 8



Korzystając z interpretacji graficznej równania $ax^2 + bx + c = 0$, dla $a \neq 0$, ustal znaki współczynników a , b , i c .

a)

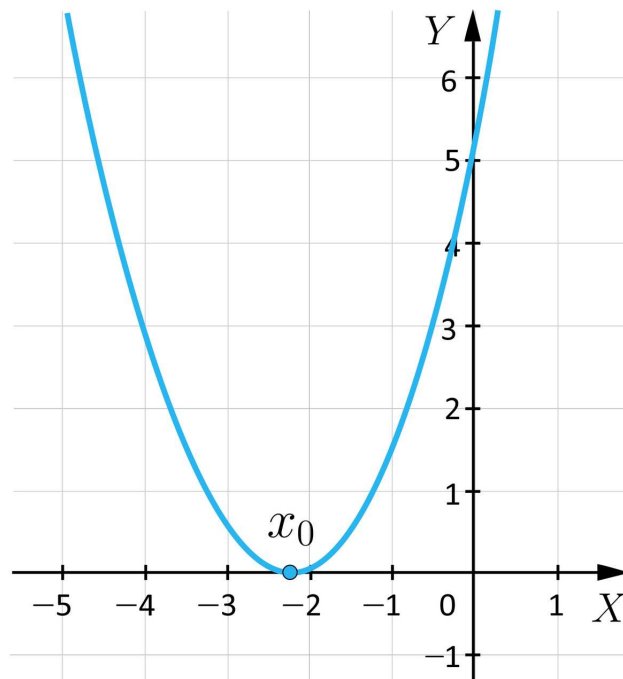


Przeciągnij w wyznaczone miejsca znak $>$ lub $<$.

a		0
b		0
c		0

$>$	$<$	$<$	$<$	$>$	$>$
------------------------------	------------------------------	------------------------------	------------------------------	------------------------------	------------------------------

b)



Przeciągnij w wyznaczone miejsca znak $>$ lub $<$.

a		0
b		0
c		0

<	<	>	<	>	>
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Interpretacja graficzna równania kwadratowego zupełnego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje równanie kwadratowe, którego interpretacja graficzna jest przedstawiona na rysunku
- odczytuje z rysunku liczbę rozwiązań równania kwadratowego
- określa zależności między współczynnikami równania
- dobiera sposób rozwiązania do określonej sytuacji problemowej

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa
- burza mózgów

- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają podstawowe pojęcia związane z równaniami kwadratowymi: pierwiastek równania, wyróżnik trójmianu kwadratowego, miejsce zerowe funkcji kwadratowej, wykres funkcji kwadratowej.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą odwróconej klasy. Najpierw wymieniają się między sobą wiadomościami dotyczącymi miejsc zerowych i wykresu funkcji kwadratowej, które przypomnieli w domu.
2. Każdy uczeń otrzymuje od nauczyciela 10 przykładów różnych równań kwadratowych. Następnie na podstawie wyróżnika i współczynnika a dzieli je na grupy, według własnych kryteriów.
3. Uczniowie podzieleni na grupy 4 – 6 osobowe omawiają rezultaty swojej pracy i porównują dokonane podziały. Tworzą wspólny plakat przedstawiający interpretację graficzną równania kwadratowego zupełnego.
4. Uczniowie oglądają symulację interaktywną i wykonują polecenia w niej przedstawione. Następnie wraz z nauczycielem przyporządkowują równania do odpowiedniego rysunku przedstawionego na plakacie.
5. Uczniowie w parach lub indywidualnie wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące interpretacji graficznej równania kwadratowego zupełnego.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie przykładu 2 i 3.

Materiały pomocnicze:

[Równanie kwadratowe](#)

Wskazówki metodyczne:

Symulacja interaktywna może być wykorzystana przez uczniów jako inspiracja do stworzenia prezentacji multimedialnej.