



# Wielomiany

Definicja wielomianu. Obliczanie wartości wielomianu. Dodawanie wielomianów. Odejmowanie wielomianów. Ilustracja interaktywna: pierwiastki wielomianu. Funkcja  $W(x)=0$  - wielomian zerowy. Wielomian stopnia pierwszego. Wielomiany zmiennej  $x$  stopnia  $n$ . Przykłady wielomianów.

Mnożenie wielomianów. Rozwiązania zadań polegających na mnożeniu wielomianów.

Wskazywanie wielomianu, który dla danego argumentu ma podaną wartość. Wskazywanie wielomianu podanych własnościach. Zasób zawiera zadania interaktywne.

Wykonywanie działań na wielomianach. Obliczanie wartości wielomianu. Określanie stopnia wielomianu. Zadania na dowodzenie. Zasób zawiera zadania otwarte z wyjaśnieniami i rozwiązaniami.

# Wielomiany

W tym rozdziale zajmiemy się funkcjami zwanymi wielomianami. Każda funkcja liniowa  $f(x) = ax + b$  i każda funkcja kwadratowa  $g(x) = ax^2 + bx + c$  jest wielomianem. Innymi przykładami wielomianów są funkcje

$$W(x) = x^3 - 2x, V(x) = 2x^7 - 3x^2 + 3, R(x) = 10x^5.$$

## Definicja: Wielomian

Wielomianem zmiennej  $x$  stopnia  $n$ , ( $n$  – liczba naturalna dodatnia) nazywamy funkcję określoną wzorem

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

gdzie  $x \in \mathbb{R}$ ,  $a_n \neq 0$  oraz  $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$  są liczbami rzeczywistymi. Liczby  $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$  nazywamy współczynnikami wielomianu.

- Przyjmujemy ponadto, że funkcja liniowa stała  $W(x) = a_0$ , gdzie  $a_0 \neq 0$ , jest wielomianem stopnia zerowego, natomiast funkcję liniową  $W(x) = 0$  nazywamy **wielomianem zerowym** i nie określamy stopnia tego wielomianu.
- Zgodnie z tą definicją funkcja liniowa  $f(x) = ax + b$  jest wielomianem stopnia pierwszego, gdy  $a \neq 0$ , a funkcja kwadratowa

$$g(x) = ax^2 + bx + c,$$

jest wielomianem stopnia drugiego. Oczywiście  $a \neq 0$ , gdyż inaczej nie byłaby to funkcja kwadratowa.

## Przykład 1

- Funkcja określona wzorem  $W(x) = 2x^7 + x^2 - 3x$  jest wielomianem stopnia 7. Współczynniki tego wielomianu są równe odpowiednio  $a_7 = 2$ , bo taka liczba stoi przy  $x^7$ ,  $a_6 = a_5 = a_4 = a_3 = 0$ , bo te potęgi  $x$  nie występują we wzorze funkcji,  $a_2 = 1$ ,  $a_1 = -3$  oraz  $a_0 = 0$ , gdyż wyraz wolny nie występuje we wzorze funkcji. Wzór tej funkcji moglibyśmy zapisać w postaci

$$W(x) = 2x^7 + 0 \cdot x^6 + 0 \cdot x^5 + 0 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + x^2 - 3x + 0.$$

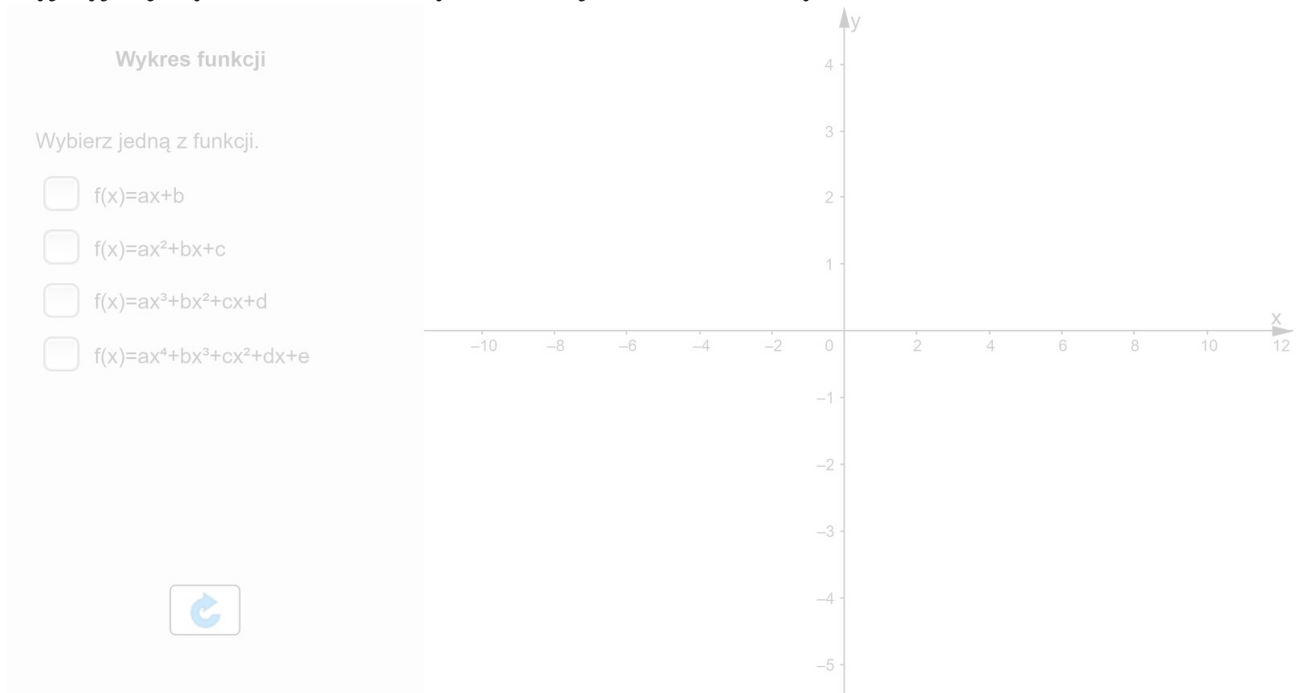
- Funkcja  $P(x) = \sqrt{5}x + 5x^3 + 7x^2$  jest wielomianem stopnia 3, choć wielomian ten nie został zapisany w postaci uporządkowanej, jaką byłaby postać

$$P(x) = 5x^3 + 7x^2 + \sqrt{5}x.$$

- Funkcja  $V(x) = 5x^3 + 7x^2 + \sqrt{5}x$  nie jest wielomianem, ponieważ we wzorze tej funkcji występuje  $\sqrt{5}x$ , czyli  $\sqrt{5} \cdot x^{\frac{1}{2}}$ , a więc zmienna  $x$  nie występuje tu w potęgę o wykładniku naturalnym.
- Funkcja  $Q(x) = \frac{2}{x} + 3x^2$  nie jest wielomianem, gdyż  $\frac{1}{x} = x^{-1}$  nie jest naturalną potęgą zmiennej  $x$ .
- Funkcja  $R(x) = 5$  jest wielomianem stopnia zerowego.

## Przykład 2

Przyjrzyj się wykresom niektórych funkcji wielomianowych.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/Pb0RMZMu3>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Przykład 3

Wielomian jest funkcją zmiennej  $x$ . Możemy obliczyć jego wartość dla danego argumentu  $x$ . Obliczmy na przykład wartość wielomianu  $W(x) = x^3 - 2x$  dla  $x = -2$  oraz dla  $x = -\sqrt{2}$ .

- W miejsce  $x$  podstawiamy liczbę  $(-2)$  i otrzymujemy

$$W(-2) = (-2)^3 - 2 \cdot (-2) = -8 + 4 = -4.$$

- W miejsce  $x$  podstawiamy liczbę  $(-\sqrt{2})$  i otrzymujemy

$$W(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^3 - 2 \cdot (-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 0.$$

Zauważmy, że  $W(-\sqrt{2}) = 0$ , zatem liczba  $x = \sqrt{2}$  jest miejscem zerowym wielomianu  $W(x) = x^3 - 2x$ . Miejsce zerowe wielomianu nazywamy często, podobnie jak miejsce zerowe funkcji kwadratowej, pierwiastkiem tego wielomianu.

Na wielomianach możemy wykonywać różne działania, między innymi możemy je dodawać, odejmować i mnożyć. Działania na wielomianach wykonujemy podobnie jak działania na wyrażeniach algebraicznych.

#### Przykład 4

Dodamy wielomiany  $V(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$  oraz  $P(x) = -2x^2 + x - 7$ .

Suma tych wielomianów jest równa

$$V(x) + P(x) = (2x^3 - 3x^2 + 3) + (-2x^2 + x - 7).$$

Wyrazy podobne to takie składniki sumy, w których  $x$  występuje w tej samej potęgze. W rozważanej sumie występują dwie pary wyrazów podobnych

$$V(x) + P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3 - 2x^2 + x - 7.$$

Wyrazy podobne redukujemy, a więc

$$-3x^2 - 2x^2 = -5x^2$$

oraz

$$+3 - 7 = -4.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$V(x) + P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x - 4.$$

Zatem sumą wielomianów  $V(x)$  i  $P(x)$  jest również wielomian.

#### Przykład 5

Odejmijmy wielomiany  $V(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$  i  $P(x) = -2x^2 + x - 7$ .

Różnica wielomianów  $V(x)$  i  $P(x)$  jest równa

$$V(x) - P(x) = (2x^3 - 3x^2 + 3) - (-2x^2 + x - 7).$$

Zapišmy tę różnicę bez użycia nawiasów, pamiętając, że znak minus przed drugim nawiasem powoduje, że opuszczając go, zmieniamy znaki wszystkich składników sumy w tym nawiasie na przeciwne.

$$V(x) - P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3 + 2x^2 - x + 7.$$

Następnie, tak jak przy dodawaniu, wykonujemy redukcję wyrazów podobnych. Otrzymujemy

$$V(x) - P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3 + 2x^2 - x + 7 = 2x^3 - x^2 - x + 10.$$

Zatem różnica dwóch wielomianów też jest wielomianem.

#### **Przykład 6**

Pomnożymy wielomiany  $W(x) = x^3 - 2x$  oraz  $Q(x) = 3x - 5$ .

Ich iloczyn jest równy

$$W(x) \cdot Q(x) = (x^3 - 2x) \cdot (3x - 5).$$

Mnożymy każdy wyraz sumy z pierwszego nawiasu przez każdy wyraz sumy z drugiego nawiasu

$$x^3 \cdot 3x + x^3 \cdot (-5) - 2x \cdot 3x - 2x \cdot (-5).$$

Po uporządkowaniu wyrażenia, otrzymujemy

$$W(x) \cdot Q(x) = 3x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 10x.$$

Zatem iloczyn dwóch wielomianów też jest wielomianem.

#### **Przykład 7**

Wykonamy działania

$$(x^2 - 3)^2 - 2x(x^3 - 2x + 4) = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 3 + 3^2 - 2x \cdot x^3 -$$

$$+ 2x \cdot (-2x) - 2x \cdot 4 = x^4 - 6x^2 + 9 - 2x^4 + 4x^2 - 8x.$$

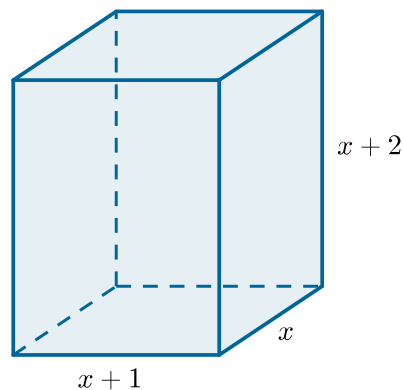
Wykonamy redukcję wyrazów podobnych

$$x^4 - 6x^2 + 9 - 2x^4 + 4x^2 - 8x = -x^4 - 2x^2 - 8x + 9.$$

### Przykład 8

Długości krawędzi prostopadłościanu są kolejnymi liczbami całkowitymi. Jakim wzorem wyrazi się pole powierzchni i objętość tego prostopadłościanu w zależności od długości najkrótszej krawędzi prostopadłościanu?

Oznaczmy przez  $x$  długość najkrótszej krawędzi prostopadłościanu. Wtedy pozostałe dwie krawędzie są równe  $x + 1$  oraz  $x + 2$ , gdzie  $x$  jest liczbą naturalną dodatnią.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przeciwległe ściany prostopadłościanu są przystającymi prostokątami. Zatem pole  $P_c$  powierzchni całkowitej prostopadłościanu jest równe

$$P_c = 2x(x + 1) + 2x(x + 2) + 2(x + 1)(x + 2) = 2x^2 + 2x + 2x^2 + 4x +$$

$$+ 2(x^2 + x + 2x + 2) = 4x^2 + 6x + 2x^2 + 2x + 4x + 4 = 6x^2 + 12x + 4.$$

Objętość  $V$  tego prostopadłościanu jest równa

$$V = x(x + 1)(x + 2) = (x^2 + x)(x + 2) = x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x = x^3 + 3x^2 + 2x.$$

### Przykład 9

Wyznacz wszystkie wartości  $a$ , dla których wartość wielomianu

$$W(x) = ax^3 + (1 - a^2)x^2 + 5ax + 3a + 3$$

dla argumentu 2 jest równa 3.

Chcemy wyznaczyć wszystkie te wartości parametru  $a$ , dla których  $W(2) = 3$ .

Podstawiamy więc 2 w miejsce  $x$  i otrzymujemy

$$a \cdot 2^3 + (1 - a^2) \cdot 2^2 + 5a \cdot 2 - 3a + 3 = 3.$$

Przekształcając to równanie do postaci

$$8a + 4 - 4a^2 + 10a - 3a = 0,$$

a następnie porządkując je, otrzymujemy równanie kwadratowe

$$-4a^2 + 15a + 4 = 0,$$

dla którego  $\Delta = 289$ .

Równanie to ma więc dwa rozwiązania  $a_1 = \frac{-15-17}{-8} = 4$  oraz  $a_2 = \frac{-15+17}{-8} = -\frac{1}{4}$ .

## Ćwiczenie 1



Zaznacz prawidłowe dokończenie zdania.

$W(x) = x^3 + x^2 + x + 1$  oraz  $V(x) = -x^2 + 3x - 1$ . Wtedy wielomian  $W(x) - V(x)$  jest równy:

$x^3 + 2x^2 - 2x + 2$

$x^3 + 4x$

$x^3 - 2x^2 - 2x - 2$

$3x^3 - 2x + 2$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 2



Zaznacz prawidłowe dokończenie zdania.

Wartość wielomianu  $W(x) = (x^4 - 9)(x + 3)$  dla argumentu  $\sqrt{3}$  jest równa:

$6(\sqrt{3} + 3)$

$-18\sqrt{3}$

$-6(\sqrt{3} + 3)$

$0$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 3



Zaznacz prawidłową odpowiedź.

Który z podanych wielomianów dla argumentu  $x = -2$  przyjmuje wartość 0?

$W(x) = 2x^4 + x^3 - 2x$

$W(x) = -2x^3 + 4x^2$

$W(x) = x^3 - 2x^2$

$W(x) = x^4 + 2x^3$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 4



Zaznacz prawidłową odpowiedź.

Wielomian  $W(x) = 2x^4 - ax^3 + x^2 - a$  dla argumentu  $(-2)$  przyjmuje wartość  $(-1)$ .  
Wtedy:

$a = -2$

$a = -\frac{37}{7}$

$a = 3$

$a = 2,5$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 5



Zaznacz prawidłową odpowiedź.

Dla wielomianu  $W(x) = x^4 - 2x^2 + 7$ .

$W(1) > W(-3)$

$W(2) > W(-2)$

$W(100) = W(-100)$

$W(0) > 7$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 6



Zaznacz prawidłową odpowiedź.

Wybierz wielomian, który przyjmuje tylko wartości ujemne.

$W(x) = -x^5 + 1$

$W(x) = x^2 - x^4$

$W(x) = -x^5 - x^3$

$W(x) = -x^4 - x^2 - 2$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 7



Zaznacz prawidłową odpowiedź.

Wielomian  $W(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5$  jest sumą wielomianu  $P(x) = x^4 + 4x^2 + 5$  oraz wielomianu  $Q(x)$ .

Wtedy:

$Q(x) = -x^4 + 2x^3$

$Q(x) = x^4 + 2x^3 + 10$

$Q(x) = x^4 - 8x^2$

$Q(x) = -x^4 + 2x^3 - 8x^2$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 8



Zaznacz prawidłowe dokończenie zdania.

Wielomian  $W(x) = (2 - 3x)(2 + 3x)(4 + 9x^2)$  jest równy:

$(4 + 9x^2)^2$

$16 - 81x^4$

$(4 - 9x^2)^2$

$16 + 81x^4$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 9



Zaznacz prawidłową odpowiedź.

Dane są wielomiany  $W(x) = 3x^7 + 4x^3 - 2x^5$  oraz  $V(x) = 2x^7 - 2x^5 - x^3$ .

Wtedy:

$W(x) + V(x) = 5x^7 + 3x^3 - 4x^5$

$W(x) + V(x) = 5x^7 + 2x^3 - 3x^5$

$W(x) - V(x) = x^7 + 5x^3$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 10



Zaznacz zdanie prawdziwe.

Funkcja  $P(x) = 7x$  jest wielomianem stopnia 1.

Funkcja  $W(x) = \sqrt{7}x^3 + 2x - 9$  jest wielomianem stopnia 9.

Funkcja  $V(x) = 2^x + 7$  jest wielomianem stopnia 2.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 11



Wykonaj działanie  $W(x) \cdot V(x)$ , gdy  $W(x) = -4x^5 + 2x^4 + x^3$  oraz  $V(x) = x^2 - 2x$ .

Wynikiem tego działania jest wielomian:

$-6x^7 + 15x^6 - 5x^5 - 1x^4$

$-4x^7 + 10x^6 - 3x^5 - 2x^4$

$-4x^7 + 20x^6 - 6x^5 - 2x^4$

$-2x^7 + 10x^6 - 3x^5 - 4x^4$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 12



Dane są wielomiany  $P(x) = -3x^3 - 3x^2 + 7$  oraz  $Q(x) = 2x^3 + 3x^2$ . Oblicz i przeciągnij odpowiednie wielomiany w puste pola.

1.  $P(x) + Q(x) =$

2.  $P(x) - Q(x) =$

3.  $2P(x) - 3Q(x) =$

4.  $P(x) \cdot Q(x) =$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 13



Oblicz wartość wielomianu  $W(x) - 3V(x) + 2P(x)$  dla  $x = -1$ , gdy

$W(x) = 3x^5 - x^4 + 6x^2$ ,  $V(x) = x^5 + x^4 + 2x$ ,  $P(x) = 3x^4 - 3x + 7$ . Wynik wpisz w puste pole.

Wartość wielomianu wynosi .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 14



Znajdź wielomian  $W(x) = V(x) \cdot P(x) - 2Q(x)$  i określ jego stopień, jeżeli  $V(x) = 2x - 3$ ,  $P(x) = x^2 + 3$ ,  $Q(x) = x^3 - 3x^2 - 7$ .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 15



Sprawdź, które z liczb  $a = 0$ ,  $b = 7$ ,  $c = 4$  są pierwiastkami wielomianu  $W(x) = x^3 - 7x^2$ . Zaznacz prawidłową odpowiedź.

$b$  oraz  $c$

$a$  oraz  $b$

$a$  oraz  $c$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 16



Dla jakiej wartości  $a$  wartość wielomianu  $W(x) = x^5 - 5x^3 + (a^2 - 1)x - 7$  dla argumentu  $x = 2$  jest równa 1? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

$a = 4$  lub  $a = -4$

$a = 3$  lub  $a = -3$

$a = 5$  lub  $a = -5$

$a = 2$  lub  $a = -2$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 17



Dla jakiej wartości  $a$  wielomian  $W(x) = ax^3 - (5 - a)x^2 - a^2x$  przyjmuje dla argumentu  $(-1)$  taką samą wartość jak wielomian  $P(x) = 5x^4 + 7x$ ? Przeciągnij prawidłowe rozwiązanie w puste pole.

Wielomian przyjmuje taką samą wartość dla

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 18



Udowodnij, że wielomiany  $P(x) = (x^2 - 9)(x^2 - 16)$  oraz  $Q(x) = (x^2 - x - 12)(x^2 + x - 12)$  przyjmują taką samą wartość dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x$ .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 19



Udowodnij, że dla dowolnego  $x$  wartość wielomianu  $W(x) = -x^4 + 10x^2 - 25$  jest liczbą niedodatnią.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 20



Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  takiej, że  $|x| \neq \sqrt{3}$  wartość wielomianu  $W(x) = -x^4 + 6x^2 - 9$  jest liczbą ujemną.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.