



## Równania wymierne sprzeczne i nieoznaczone

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

# Równania wymierne sprzeczne i nieoznaczone

Źródło: [Tomislav Jakupec](#) z [Pixabay](#), domena publiczna.

Czasem spotykamy się z równaniami wymiernymi, które nie posiadają rozwiązań lub z równaniami, które są spełnione przez wiele liczb rzeczywistych.

W tym materiale zajmiemy się rozwiązywaniem równań wymiernych sprzecznych i nieoznaczonych.

Poznasz równania, których rozwiązanie nie istnieje, lub wręcz przeciwnie – jest ono spełnione przez każdą liczbę rzeczywistą należącą do dziedziny równania.

## Twoje cele

- Rozwiążesz równanie wymierne sprzeczne i równanie wymierne nieoznaczone.
- Rozpoznasz równania sprzeczne i równania nieoznaczone.
- Wyznaczysz dziedzinę równania sprzecznego i równania nieoznaczonego.

# Przeczytaj

---

## Definicja: równanie wymierne

Jeżeli  $W(x)$  i  $P(x)$  są wielomianami,  $P(x)$  nie jest wielomianem zerowym ( $P(x) \neq 0$ ), to równanie  $\frac{W(x)}{P(x)} = 0$  nazywamy równaniem wymiernym z jedną niewiadomą  $x$ .

Rozwiązać równanie to znaleźć takie pierwiastki wielomianu  $W(x)$ , które nie są miejscami zerowymi wielomianu  $P(x)$ .

Przed przystąpieniem do rozwiązywania równania wymiernego, należy określić jego dziedzinę.

Dziedziną równia wymiernego jest zbiór liczb rzeczywistych pomniejszony o zbiór pierwiastków wielomianu  $P(x)$ .

Równanie sprzeczne jest to równanie, które nie posiada rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.

Równanie tożsamościowe jest to równanie, którego rozwiązaniem jest każda liczba rzeczywista należąca do dziedziny równania. Równanie nieoznaczone posiada nieskończenie wiele rozwiązań.

Pokażemy przykłady rozwiązań równań wymiernych sprzecznych i **nieoznaczonych**.

## Przykład 1

Rozwiążemy równanie  $\frac{x^2-64}{x+8} = \frac{2x-16}{2}$ .

Ustalimy najpierw dziedzinę równania.

$$x + 8 \neq 0$$

$$x \neq (-8)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-8\}$$

Korzystając z własności proporcji, otrzymujemy:

$$2(x^2 - 64) = (x + 8)(2x - 16)$$

$$2(x^2 - 64) = 2(x^2 - 64)$$

$$0 = 0$$

Otrzymaliśmy równanie tożsamościowe. Rozwiązaniem równania są liczby  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-8\}$ .

### Przykład 2

Wykażemy, że równanie  $\frac{x^2-6x+9}{x-3} = 0$  jest sprzeczne.

Wyznamy najpierw dziedzinę równania.

$$x - 3 \neq 0$$

$$x \neq 3$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

Przyrównujemy licznik ułamka algebraicznego do zera.

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia otrzymujemy:

$$(x - 3)^2 = 0$$

$$x = 3$$

Ale  $3 \notin D$ , zatem **równanie jest sprzeczne**.

### Przykład 3

Obliczymy, dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $\frac{2 \cdot (2x)^4 \cdot x^8}{32 \cdot x^{2m}} = 1$  jest tożsamościowe.

Dziedziną równania jest  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Zapiszemy równanie w postaci równoważnej.

$$\frac{32 \cdot x^4 \cdot x^8}{32 \cdot x^{2m}} = 1$$

$$\frac{x^{12}}{x^{2m}} = 1$$

$$x^{12-2m} = x^0$$

$$12 - 2m = 0$$

$$-2m = (-12)$$

$$m = 6$$

Dla  $m = 6$  równanie jest tożsamościowe.

#### Przykład 4

Obliczymy, dla jakiej wartości parametru  $p$  równanie  $\frac{x+2}{x-p} = 4$  jest sprzeczne.

Dziedziną równania jest zbiór  $D = \mathbb{R} \setminus \{p\}$ .

Mnożymy obie strony równania przez  $(x - p)$ .

$$x + 2 = 4(x - p)$$

$$x + 2 = 4x - 4p$$

$$-3x = -4p - 2$$

$$x = \frac{-4p-2}{-3}$$

$$x = \frac{4p+2}{3}$$

Uwzględniając dziedzinę równania mamy  $\frac{4p+2}{3} \neq p$ .

$$4p + 2 \neq 3p$$

$$p \neq (-2)$$

Sprawdzimy, co się stanie jak  $p = (-2)$  podstawimy do równania.

$$\frac{x+2}{x-(-2)} = 4$$

$$\frac{x+2}{x+2} = 4$$

$$1 = 4$$

Jest to równanie sprzeczne.

Dla  $p = (-2)$  równanie jest sprzeczne.

#### Przykład 5

Rozwiążemy równanie  $\frac{x+1}{x+2} - \frac{x-3}{x+4} = 2$ .

Ustalimy najpierw dziedzinę równania.

$$x + 2 \neq 0 \text{ i } x + 4 \neq 0$$

$$x \neq (-2) \text{ i } x \neq (-4)$$

$$D : \mathbb{R} \setminus \{-4, -2\}$$

Sprowadzimy lewą stronę równania do wspólnego mianownika.

$$\frac{(x+1)(x+4)-(x-3)(x+2)}{(x+2)(x+4)} = 2$$

Przekształćmy równoważnie równanie.

$$\frac{x^2+4x+x+4-x^2-2x+3x+6}{x^2+4x+2x+8} = 2$$

$$\frac{6x+10}{x^2+6x+8} = \frac{2}{1}$$

Korzystając z własności proporcji otrzymujemy:

$$6x + 10 = 2(x^2 + 6x + 8)$$

$$6x + 10 = 2x^2 + 12x + 16$$

$$2x^2 + 6x + 6 = 0$$

$$x^2 + 3x + 3 = 0$$

$$\Delta = 9 - 12 = -3 < 0$$

Równanie jest sprzeczne. Nie posiada rozwiązań.

## Słownik

### **równanie sprzeczne**

równanie, które nie posiada rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych

### **równanie nieoznaczone**

równanie, które ma nieskończenie wiele rozwiązań

# Galeria zdjęć interaktywnych

---

## Polecenie 1

Przeanalizuj sposób rozwiązania równania wymiernego.

## Polecenie 2

Rozwiąż równanie  $\frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)} - \frac{1}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x^2-2x+4} = 0$ .

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Rozwiąż równanie  $\frac{x^2-121}{x+11} = \frac{3x-33}{3}$ .

- Równanie jest sprzeczne.
- $x = -11, x = 11$
- Równanie jest tożsamościowe.
- $x = 11$

## Ćwiczenie 2



Wybierz rozwiązanie równania  $\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{3x+9}{3}$ .

- $\mathbb{R}$
- $x = 3, x = -3$
- $\mathbb{R} \setminus \{3\}$
- $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$



### Ćwiczenie 3



Przenieś w wyznaczone miejsce odpowiednią liczbę.

Równanie  $\frac{(2x)^3 \cdot x^5}{8x^{3k}} = 1$  jest tożsamościowe dla  $k =$

$\frac{5}{3}$

$\frac{8}{3}$

$-\frac{8}{3}$

$-\frac{5}{3}$

### Ćwiczenie 4



Przenieś w wyznaczone miejsce odpowiednie stwierdzenie.

Dla  $p = 1$  równanie  $\frac{x+1}{x+p} = 2$  .

 ma jedno rozwiązanie jest sprzeczne jest nieoznaczone

### Ćwiczenie 5



Wpisz w wyznaczone miejsce odpowiednią liczbę.

Równanie  $\frac{3x-6}{x+m} = 3$  jest tożsamościowe dla parametru  $m =$  .

## Ćwiczenie 6



Posortuj w odpowiedniej kolejności rozwiązanie równania  $\frac{x+1}{x+3} - \frac{x-2}{x+4} = 2$ , dla  $x \neq -4$  i  $x \neq -3$ .

$$\Delta = 25 - 28 = -3 < 0$$

$$\frac{x^2+5x+4-x^2-x+6}{x^2+7x+12} = 2$$

równanie nie posiada rozwiązań.

$$2(2x + 5) = 2(x^2 + 7x + 12)$$

$$\frac{4x+10}{x^2+7x+12} = 2$$

$$\frac{x^2+4x+x+4-(x^2+3x-2x-6)}{x^2+4x+3x+12} = 2$$

$$\frac{x+1}{x+3} - \frac{x-2}{x+4} = 2$$

$$2x + 5 = x^2 + 7x + 12$$

$$\frac{(x+1)(x+4)-(x-2)(x+3)}{(x+3)(x+4)} = 2$$

$$4x + 10 = 2(x^2 + 7x + 12)$$

$$x^2 + 5x + 7 = 0$$

## Ćwiczenie 7



Wybierz wszystkie wartości parametru  $p$ , dla których równanie  $\frac{x}{x-1} = \frac{x+2}{x-2} + p$  jest sprzeczne.

$p = 3$

$p = 4$

$p = 2$

$p = 1$

## Ćwiczenie 8



Przenieś do odpowiedniego obszaru równanie.

równania sprzeczne

$$\frac{x^2-9}{x+3} = 0$$

$$\frac{x+1}{x-1} = 2$$

$$\frac{2(x+1)}{x+1} = 2$$

$$\frac{x+1}{x-1} = 1$$

równania nieoznaczone

$$2x^2 + 8 = \frac{x-4}{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{x+3}{x^2-9} = 0$$

pozostałe równania

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Jolanta Schilling

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat zajęć:** Równanie wymierne sprzeczne i nieoznaczone

**Grupa docelowa:** III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa**

III. Równania i nierówności. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

2) rozwiązuje równania i nierówności wymierne nie trudniejsze niż

$$\frac{x+1}{x(x-1)} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{2x}{(x-1)(x+1)}$$

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje w zakresie wielojęzyczności,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- rozwiązuje równanie wymierne sprzeczne i równanie wymierne nieoznaczone,
- rozpoznaje równania sprzeczne i równania nieoznaczone,
- wyznacza dziedzinę równania wymiernego sprzecznego i równania nieoznaczonego,
- przeprowadza rozumowania związane z analizą równania wymiernego, formułuje wnioski i uzasadnia ich poprawność.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

**Metody i techniki nauczania**

- analiza przypadku,

- dyskusja,
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem galerii zdjęć interaktywnych

### **Formy zajęć:**

- praca indywidualna,
- praca w grupach,
- praca całego zespołu klasowego

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami i dostępem do internetu, słuchawki,
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale,
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

### **Przebieg lekcji**

#### **Faza wprowadzająca:**

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają w grupach definicję równania wymiernego.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel prosi uczniów o samodzielne rozwiązanie przykładów z sekcji Przeczytaj.
2. Uczniowie podzieleni na grupy 6 osobowe omawiają rezultaty swojej pracy i porównują wyniki. Tworzą wspólny plakat ilustrujący sposoby rozwiązania równań sprzecznych i nieoznaczonych.
3. Uczniowie oglądają galerię zdjęć interaktywnych i omawiają ją wraz z nauczycielem.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

#### **Faza podsumowująca:**

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń interaktywnych.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

#### **Praca domowa:**

Polecenie 2 umieszczone pod galerią zdjęć interaktywnych

#### **Materiały pomocnicze:**

[Wyrażenia wymierne. Równania wymierne](#)

### **Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania danego multimedium:**

Przykład zawarty w galerii uczniowie mogą wykorzystać jako materiał powtórzeniowy przed sprawdzianem. Galerię zdjęć interaktywnych można wykorzystać jako materiał pokazujący zastosowanie wzorów skróconego mnożenia.