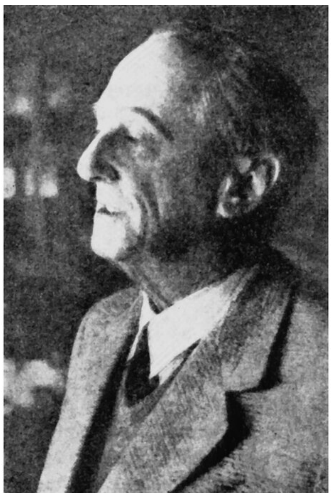
Wzór na wyraz ogólny ciągu geometrycznego

Wzór na wyraz ogólny ciągu geometrycznego

Źródło: Snnie Spratt, dostępny w internecie: unsplash.com, domena publiczna.

> *Matematyka podobna jest do wieży, której fundamenty położono przed wiekami, a do której dobudowuje się coraz wyższe piętra. Aby zobaczyć postęp budowy, trzeba iść na piętro najwyższe, a schody są strome i składają się z licznych stopni. Rzeczą popularyzatora jest zabrać słuchacza do windy, z której nie zobaczy ani pośrednich pięter, ani pracą wieków ozdobionych komnat, ale przekona się, że gmach jest wysoki i że wciąż rośnie.*
>
> Hugo Steinhaus, Źródło: *Wiadomości matematyczne*, t. 15–17, PWN, 1972, s. 61.



Hugo Dyonizy Steinhaus

Zaczęliśmy od złotej myśli Hugona Steinhausa, jednego z najwybitniejszych polskich matematyków, bowiem powoli wspinamy się coraz wyżej na wieżę umiejętności związanych z ciągiem geometrycznym, pojęciem na tyle abstrakcyjnym dla wielu, że po zakończeniu edukacji szkolnej, natychmiast starają się o nim zapomnieć. A przecież ciąg geometryczny to nic innego, jak pewna funkcja, którą można opisać również wzorem. Jakim – przekonasz się, po zapoznaniu się z treściami przedstawionymi w tym materiale.

Twoje cele

- Określisz wzór na wyraz ogólny ciągu geometrycznego.
- Obliczysz iloraz ciągu geometrycznego i wskazane jego wyrazy, mając dany wzór ogólny tego ciągu.
- Zapiszesz wzór na n–ty wyraz ciągu geometrycznego, na podstawie danych o tym ciągu.

Przeczytaj

Zastanowimy się teraz nad wzorem ogólnym ciągu geometrycznego (a_n), gdy dany jest pierwszy wyraz a_1 i iloraz q ciągu.

Z określenia ciągu geometrycznego wynika, że każdy wyraz tego ciągu począwszy od drugiego, powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez liczbę q.

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

$$\ldots$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-2} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Wyraz n−ty ciągu geometrycznego jest równy iloczynowi wyrazu pierwszego a_1 przez iloraz ciągu podniesiony do potęgi $n-1$, czyli q^{n-1}.

Twierdzenie: Wzór ogólny ciągu geometrycznego

Jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $q \neq 0$ to dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}_+$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Podamy teraz kilka prostych przykładów na zastosowanie zapisanego wzoru.

Przykład 1

Obliczymy trzeci wyraz ciągu geometrycznego (a_n), w którym $a_1 = 6$ i $q = 2$.

Korzystamy ze wzoru $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

$a_3 = 6 \cdot 2^{3-1} = 24$.

Przykład 2

Obliczymy pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n), w którym $a_4 = 1$ i $q = 2$.

Korzystamy ze wzoru $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

$1 = a_1 \cdot 2^{4-1}$

$1 = a_1 \cdot 8$

$a_1 = \frac{1}{8}$.

Przykład 3

Znajdziemy iloraz q ciągu geometrycznego (a_n), w którym $a_4 = 2$ i $a_1 = 6\frac{3}{4}$. Podamy wzór ogólny ciągu.

Korzystamy ze wzoru $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

$a_4 = a_1 \cdot q^{4-1}$

$2 = \frac{27}{4} \cdot q^3$

$q^3 = \frac{8}{27}$

$q = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$

Zapisujemy wzór ogólny ciągu geometrycznego.

$a_n = 6\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

Wzór można przekształcić i zapisać w postaci

$a_n = \frac{27}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{81}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Przykład 4

Wyznaczymy liczbę n wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), w którym $a_1 = 4$, $q = \frac{3}{2}$, $a_n = \frac{81}{4}$.

Korzystamy ze wzoru $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

$\frac{81}{4} = 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \Big| : 4$

$\frac{81}{16} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

$4 = n - 1$

$n = 5$.

Przechodzimy do trudniejszych przykładów. Rozwiązanie zapisanych tam problemów będzie wymagało między innymi wykorzystania znajomości rozwiązywania układów równań oraz równań kwadratowych.

Przykład 5

W sześciowyrazowym ciągu geometrycznym (a_n) iloczyn wyrazów parzystych jest równy (-729), a iloczyn wyrazów nieparzystych 19683. Znajdziemy wzór ogólny tego ciągu.

Oznaczmy:
q – iloraz ciągu.

Iloczyn wyrazów parzystych jest równy (-729), czyli

$$a_2 \cdot a_4 \cdot a_6 = -729$$

Korzystamy ze wzoru na n–ty wyraz ciągu geometrycznego (czyli ze wzoru na wyraz ogólny ciągu).

$$a_1 q \cdot a_1 q^3 \cdot a_1 q^5 = -729$$

$$a_1^3 \cdot q^9 = -729$$

Iloczyn wyrazów nieparzystych jest równy 19683, czyli

$$a_1 \cdot a_3 \cdot a_5 = 19683$$

$$a_1 \cdot a_1 q^2 \cdot a_1 q^4 = 19683$$

$$a_1^3 \cdot q^6 = 19683$$

Otrzymaliśmy układ równań.

$$\begin{cases} a_1^3 \cdot q^9 = -729 \\ a_1^3 \cdot q^6 = 19683 \end{cases}$$

Dzielimy stronami oba równania układu i uzyskujemy:

$$q^3 = -\frac{729}{19683} = -\frac{1}{27}$$

$$q = -\frac{1}{3}$$

Podstawiamy wyznaczoną liczbę do drugiego równania układu i obliczamy pierwszy wyraz ciągu.

$$a_1^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^6 = 19683$$

$$a_1^3 \cdot \frac{1}{729} = 19683$$

$$a_1^3 = 19683 \cdot 729$$

Dla ułatwienia obliczeń, każdą z liczb stojących po prawej stronie znaku równości zapiszemy w postaci potęgi liczby 3.

$a_1^3 = 3^9 \cdot 3^6 = 3^{15}$

$a_1 = \sqrt[3]{3^{15}} = 3^5 = 243$

Zapisujemy wzór ogólny ciągu.

$a_n = 243 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, gdy $n = 1, 2, \ 3, 4, \ 5, 6$.

Przykład 6

Ciąg (a_n) jest pięciowyrazowym ciągiem geometrycznym. Suma pierwszych trzech wyrazów tego ciągu jest równa 21, a suma trzech ostatnich wyrazów jest równa 336. Znajdziemy wyrazy tego ciągu.

Oznaczmy:
a – pierwszy wyraz ciągu,
q – iloraz ciągu.

Zapisujemy układ równań, wynikający z treści zadania.

$$\begin{cases} a + aq + aq^2 = 21 \\ aq^2 + aq^3 + aq^4 = 336 \end{cases}$$

W obu równaniach wyłączamy wspólne czynniki przed nawias.

$$\begin{cases} a\left(1 + q + q^2\right) = 21 \\ aq^2\left(1 + q + q^2\right) = 336 \end{cases}$$

Dzielimy stronami oba równania (z treści zadania wynika, że $a \neq 0$ i $q \neq 0$, a równanie $1 + q + q^2 = 0$ nie ma pierwiastków).

$q^2 = 16$

$q = 4$ lub $q = -4$

Jeśli $q = 4$ to $a = 1$, $aq = 4$, $aq^2 = 16$, $aq^3 = 64$, $aq^4 = 256$.

Jeśli $q = -4$ to $a = \frac{21}{13}$, $aq = -\frac{84}{13}$, $aq^2 = \frac{336}{13}$, $aq^3 = -\frac{1344}{13}$, $aq^4 = \frac{5376}{13}$.

Odpowiedź:

Istnieją dwa ciągi spełniające warunki zadania:

$(1, \ 4, \ 16, \ 64, \ 256)$ i $\left(\frac{21}{13}, \ -\frac{84}{13}, \ \frac{336}{13}, \ -\frac{1344}{13}, \ \frac{5376}{13}\right)$.

Przykład 7

W ciągu geometrycznym (a_n) iloraz $q = 1 + 2\sqrt{2}$ i pierwszy wyraz $a_1 \neq 0$. Wykażemy, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ prawdziwa jest równość

$7a_n + 2a_{n+1} = a_{n+2}$

Korzystamy ze wzoru $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ i zapisujemy wyrazy dowodzonej równości za pomocą pierwszego wyrazu i ilorazu ciągu.

$7a_1 \cdot q^{n-1} + 2 \cdot a_1 \cdot q^n = a_1 \cdot q^{n+1}$

Dzielimy obie strony równości przez $a_1 \cdot q^{n-1}$ (oba czynniki iloczynu są różne od 0).

$7 + 2q = q^2$

Podstawiamy $q = 1 + 2\sqrt{2}$.

$7 + 2 \cdot \left(1 + 2\sqrt{2}\right) = \left(1 + 2\sqrt{2}\right)^2$

$9 + 4\sqrt{2} = 9 + 4\sqrt{2}$

Otrzymaliśmy tożsamość, co kończy dowód.

Przykład 8

W ciągu geometrycznym (a_n) wszystkie wyrazy są dodatnie i spełniony jest warunek $2a_1 - a_2 = a_1^2 + a_2^2$. Wykażemy, że suma czterech początkowych wyrazów tego ciągu jest największa, gdy iloraz ciągu jest równy $\frac{1}{2}$.

Oznaczmy:
q – iloraz ciągu (a_n).

Na podstawie treści zadania zapisujemy równanie.

$2a_1 - a_1 q = a_1^2 + a_1^2 q^2$

Dzielimy obie strony równania przez a_1 (z treści zadania wynika, że $a_1 \neq 0$).

$2 - q = a_1\left(1 + q^2\right)$

Wyznaczamy a_1.

$a_1 = \frac{2-q}{1+q^2}$

Teraz zapisujemy sumę czterech początkowych wyrazów ciągu.

$S_4 = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 = a_1\left(1 + q + q^2 + q^3\right)$

Rozważymy dwa przypadki.

- $q = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}$ i $S_4 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$

  W tym przypadku ciąg jest stały, suma czterech pierwszych wyrazów jest równa 2.

- $q \neq 1$

  Przekształcamy otrzymaną sumę.

  $S_4 = a_1\left(1 + q + q^2 + q^3\right) = a_1\left[\left(1 + q^2\right) + q\left(1 + q^2\right)\right]$

  $S_4 = a_1(1 + q)\left(1 + q^2\right)$

  Do sumy, podstawiamy uzyskane wcześniej a_1.

  $S_4 = \frac{2-q}{1+q^2} \cdot (1 + q)\left(1 + q^2\right)$

  $S_4 = -q^2 + q + 2$

  Rozważmy funkcję $S_4(q) = -q^2 + q + 2$ i zbadajmy, dla jakich argumentów q funkcja przyjmuje wartość największą.

  Zgodnie z treścią zadania, dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich. Z dziedziny wyłączyliśmy też liczbę 1.

  Rozpatrywana funkcja jest funkcją kwadratową ($a = -1$, $b = 1$, $c = 2$), zatem największą wartość przyjmuje dla $q = -\frac{b}{2a}$, czyli w naszym przypadku dla $q = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$. Liczba ta należy do dziedziny funkcji.

  Obliczamy tę wartość największą.

  $S_4\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 2$

  $S_4\left(\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{4}$

Porównujemy uzyskane sumy.

$2 < 2\frac{1}{4}$

Wynika z tego, że suma czterech początkowych wyrazów tego ciągu jest największa, gdy iloraz ciągu jest równy $\frac{1}{2}$, co należało udowodnić.

Słownik

wzór ogólny ciągu geometrycznego

jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $q \neq 0$ to dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}_+$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją, spróbuj najpierw samodzielnie wykonać zapisane tam zadania, a następnie porównaj z proponowanymi rozwiązaniami.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DMZNETFBz

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej wzoru na wyraz ogólny ciągu geometrycznego.

Polecenie 2

W ciągu geometrycznym (a_n), w którym wszystkie wyrazy są dodatnie suma pierwszego i drugiego wyrazu jest równa 5, a wyrazu trzeciego i czwartego jest równa 80. Znajdź wzór ogólny ciągu.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

W ciągu geometrycznym (a_n), w którym wszystkie wyrazy są dodatnie suma pierwszych trzech wyrazów jest równa 26, a suma odwrotności tych wyrazów jest równa $\frac{13}{18}$. Znajdź wzór ogólny tego ciągu.

Ćwiczenie 8

Ciąg geometryczny (a_n) określony jest wzorem $a_n = 5^n + 5^{n+1}$. Oblicz, ile wyrazów tego ciągu jest mniejszych od 36000.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzór na wyraz ogólny ciągu geometrycznego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

6) stosuje wzór na n–ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego;

7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- ustala wzór na wyraz ogólny ciągu geometrycznego
- oblicza iloraz ciągu geometrycznego i wskazane jego wyrazy, mając dany wzór ogólny tego ciągu
- zapisuje wzór na n–ty wyraz ciągu geometrycznego, na podstawie danych o tym ciągu
- prowadzi rozumowania kilkuetapowe, celem udowodnienia własności danego ciągu geometrycznego

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- mapa myśli
- praca z obserwatorem

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie powtarzają wspólnie wiadomości dotyczące ciągu geometrycznego – może to być na przykład szybki test przygotowany wcześniej przez nauczyciela, na pytania którego uczniowie odpowiadają kolejno.
2. Dyskusja – w jaki sposób można opisywać ciągi geometryczne (ciąg jest pewną funkcją, zatem uczniowie powinni opierać się na znajomości sposobów opisu funkcji). Jednym ze spostrzeżeń podsumowujących dyskusję, powinno być stwierdzenie, że ciąg można opisać za pomocą wzoru i jest to w praktyce jeden z najwygodniejszych sposobów opisu ciągu.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie wspólnie ustalają wzór na wyraz ogólny ciągu geometrycznego – korzystając z definicji lub z poznanych wcześniej własności ciągu.
2. Uczniowie pracują w 4 grupach. Najpierw każda z grup zapoznaje się z przykładami 1–4 z sekcji „Przeczytaj” i z animacją.
Następnie zadaniem każdej z grup jest zapoznanie się z jednym z przykładów 5–8 (wskazanym przez nauczyciela) w taki sposób, aby uzyskane wiadomości przekazać innym grupom. W każdej grupie jeden z uczniów pełni rolę obserwatora. Jego zadaniem jest zaobserwowanie, jak uczniowie pracują w grupie – czy pełnią powierzone im role, jaka jest strategia rozwiązywania problemów, itp.
3. Następnym etapem zajęć jest zaprezentowanie przez grupy uzyskanych wiadomości i pokazanie sposobu rozwiązania zadania zamieszczonego w odpowiednim przykładzie.
4. Uczniowie w parach rozwiązują ćwiczenia interaktywne 1–4.

Faza podsumowująca:

1. Każdy z obserwatorów przedstawia wyniki swoich obserwacji, jednocześnie konfrontując je z obserwacjami lidera danej grupy.
2. Dyskusja – czy łatwo jest pełnić wyznaczona role w grupie i dlaczego.
3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych 5 – 8 z sekcji „Sprawdź się".

Materiały pomocnicze:

Ciąg geometryczny

Wskazówki metodyczne:

Animację będzie można wykorzystać na zajęciach podsumowujących wiadomości i umiejętności o ciągu geometrycznym.