Twierdzenie o istnieniu granicy funkcji w punkcie

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Galeria zdjęć interaktywnych
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Twierdzenie o istnieniu granicy funkcji w punkcie

Źródło: PxHere, dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

Granice jednostronne funkcji w punkcie (tj. granica lewostronna oraz granica prawostronna) mogą posłużyć do sformułowania warunku równoważnego definicji granicy funkcji w punkcie. Temat ten poświęcimy na przedstawienie odpowiedniego twierdzenia oraz pokażemy jak można wykorzystać granice jednostronne do sprawdzenia czy funkcja posiada granicę w danym punkcie.

Twoje cele

- Dowiesz się o związku granic jednostronnych funkcji z granicą funkcji w punkcie.
- Sprawdzisz, wykorzystując granice jednostronne, czy funkcja posiada granicę w punkcie.

Przeczytaj

Granice jednostronne - przypomnienie

Przypomnijmy definicję granic jednostronnych funkcji w punkcie w sensie Heinego.

Definicja: Granica lewostronna funkcji w punkcie według Heinego

Powiemy, że liczba g jest granicą lewostronną funkcji $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$, jeśli dla dowolnego ciągu (x_n) argumentów funkcji f, który jest zwarty w pewnym lewostronnym sąsiedztwie punktu x_0 (tzn. $x_n \in (x_0 - \delta, x_0)$ dla pewnej liczby $\delta > 0$ oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$) ciąg wartości $f(x_n)$ jest zbieżny do liczby g. Fakt ten zapisujemy następująco

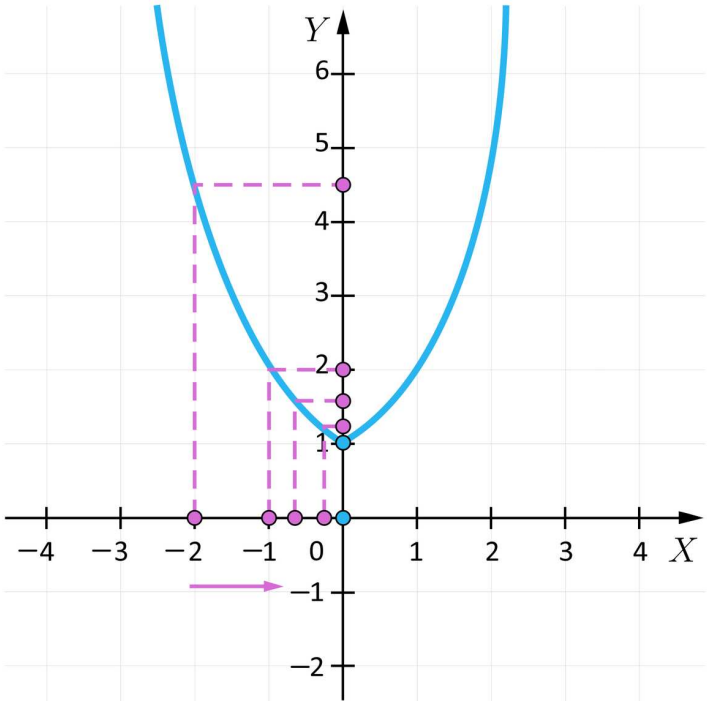
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g.$$

Definicja: Granica prawostronna funkcji w punkcie według Heinego

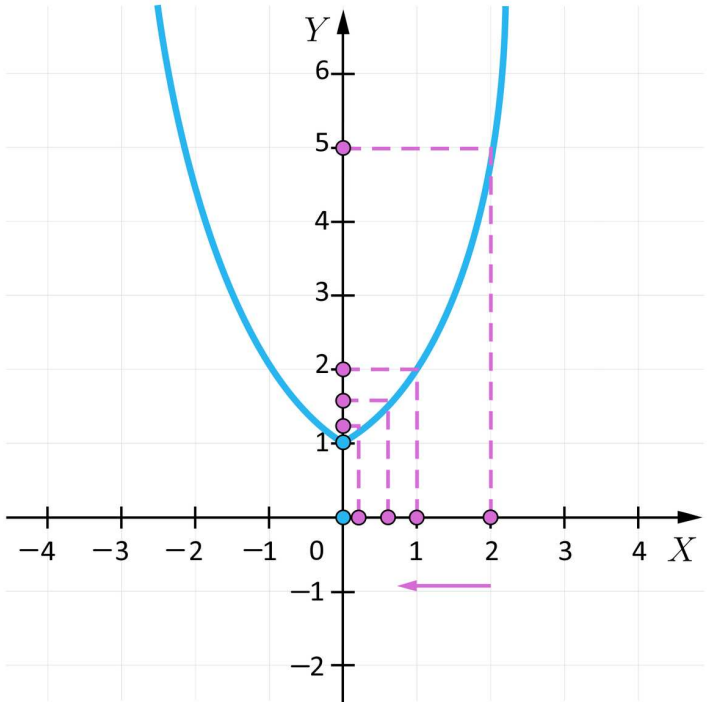
Powiemy, że liczba g jest granicą prawostronną funkcji $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$, jeśli dla dowolnego ciągu (x_n) argumentów funkcji f, który jest zwarty w pewnym prawostronnym sąsiedztwie punktu x_0 (tzn. $x_n \in (x_0, x_0 + \delta)$ dla pewnej liczby $\delta > 0$ oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$) ciąg wartości $f(x_n)$ jest zbieżny do liczby g. Fakt ten zapisujemy następująco

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = g.$$

Intuicyjnie powyższe definicje oznaczają, że wyznaczając np. granicę lewostronną funkcji w pewnym punkcie, dążymy do tego punktu jedynie z jego lewej strony, tzn. uwzględniamy tylko argumenty mniejsze od tego punktu.



Analogicznie w przypadku granicy prawostronnej funkcji w punkcie dążymy do tego punktu jedynie z jego prawej strony, tzn. uwzględniamy tylko argumenty większe od tego punktu.



Związek granic jednostronnych z granicą funkcji w punkcie

Poniższe twierdzenie podaje związek pomiędzy granicami jednostronnymi funkcji w punkcie oraz granicą funkcji w punkcie.

> **Twierdzenie: o istnieniu granicy funkcji w punkcie**

Jeśli $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ posiada w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ granicę lewo – oraz prawostronną oraz granice te są równe, to wówczas posiada ona także granicę w tym punkcie oraz

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne, tzn. jeśli funkcja posiada granicę w pewnym punkcie, to posiada w tym punkcie również granice jednostronne. Ponadto granice te są sobie równe i dodatkowo równe wartości granicy funkcji w tym punkcie.

Przykład 1

Sprawdzimy czy funkcja dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 4 & \text{dla } x \leqslant -1 \\ 2 - x^2 & \text{dla } x > -1 \end{cases}$$

posiada granicę w punkcie $x_0 = -1$. Obliczymy w tym celu granice jednostronne funkcji f w tym punkcie. Weźmy najpierw dowolny ciąg argumentów funkcji f taki, że $x_n < -1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = -1$. Wówczas $f(x_n) = 3x_n + 4$. Stąd oraz z twierdzeń o arytmetyce granic ciągów zbieżnych otrzymujemy

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = 3 \cdot \lim_{n \to +\infty} x_n + 4 = 3 \cdot (-1) + 4 = 1.$$

Zatem

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = 1.$$

Niech teraz ciąg argumentów (x_n) będzie taki, że $x_n > -1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = -1$. Wówczas $f(x_n) = 2 - x_n^2$. Stąd oraz z twierdzeń o arytmetyce granic ciągów zbieżnych otrzymujemy

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = 2 - \left(\lim_{n \to +\infty} x_n\right)^2 = 2 - (-1)^2 = 2 - 1 = 1.$$

Zatem również w tym przypadku

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1.$$

Ponieważ granice jednostronne funkcji f w punkcie $x_0 = -1$ są takie same i równe 1, więc funkcja f posiada granicę w tym punkcie oraz

$$\lim_{x \to -1} f(x) = 1.$$

Przykład 2

Niech funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana będzie wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{2x+1} & \text{dla } x \geqslant \frac{1}{2} \\ 3-4x & \text{dla } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sprawdzimy czy dana funkcja posiada granicę w punkcie $x_0 = \frac{1}{2}$. W tym celu weźmy ciąg (x_n) argumentów funkcji f taki, że $x_n > \frac{1}{2}$ oraz $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2}$. Wówczas $f(x_n) = \frac{4}{2x_n+1}$ i z twierdzenia o arytmetyce granic ciągów zbieżnych dostajemy

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \frac{4}{2\cdot\frac{1}{2}+1} = \frac{4}{2} = 2.$$

Wynika stąd, że

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = 2.$$

Niech teraz ciąg (x_n) argumentów funkcji f będzie taki, że $x_n < \frac{1}{2}$ oraz $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2}$. Wówczas $f(x_n) = 3 - 4x_n$. Stąd oraz z twierdzenia o arytmetyce granic ciągów zbieżnych dostajemy

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 3 - 4\cdot\frac{1}{2} = 3 - 2 = 1.$$

Oznacza to, że

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = 1.$$

Jak widzimy granice jednostronne funkcji f w punkcie $x_0 = \frac{1}{2}$ są różne. Wnioskujemy stąd, że funkcja f nie posiada w tym punkcie granicy.

Przykład 3

Sprawdzimy czy funkcja dana wzorem

$$f(x) = \frac{x^2-7x+6}{|x-1|}$$

posiada granicę w punkcie $x_0 = 1$. Korzystając z definicji wartości bezwzględnej możemy rozpatrzeć przypadki

1. Jeśli $x > 1$, to wówczas $x - 1 > 0$ oraz

$$f(x) = \frac{x^2-7x+6}{|x-1|} = \frac{(x-1)(x-6)}{x-1} = x - 6$$

2. Jeśli $x < 1$, to wówczas $x - 1 < 0$ oraz

$$f(x) = \frac{x^2-7x+6}{|x-1|} = \frac{(x-1)(x-6)}{-(x-1)} = 6 - x$$

Wzór funkcji możemy zatem zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} x - 6 & \text{dla } x > 1 \\ 6 - x & \text{dla } x < 1 \end{cases}$$

Weźmy teraz dowolny ciąg argumentów (x_n) funkcji f taki, że $x_n > 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$. Wówczas $f(x_n) = x_n - 6$. Z twierdzenia o arytmetyce granic ciągów zbieżnych wynika zatem, że

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 1 - 6 = -5.$$

Stąd $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -5$. Z drugiej strony biorąc dowolny ciąg argumentów (x_n) funkcji f taki, że $x_n < 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$, otrzymujemy $f(x_n) = 6 - x_n$. Z twierdzenia o arytmetyce granic ciągów zbieżnych wynika tym razem, że

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 6 - 1 = 5.$$

Stąd $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 5$. Ponieważ granice jednostronne funkcji f w punkcie $x_0 = 1$ są różne, więc funkcja ta nie posiada granicy w tym punkcie.

Przykład 4

Sprawdzimy czy funkcja dana wzorem

$$f(x) = \frac{6}{|x|+2}$$

posiada granicę w punkcie $x_0 = 0$. Zauważmy, że dziedziną funkcji f jest cały zbiór liczb rzeczywistych, tzn. $D_f = \mathbb{R}$. Na początek zapiszemy powyższy wzór bez użycia wartości bezwzględnej. Rozważmy przypadki

1. Jeśli $x \geqslant 0$, to wówczas

$$f(x) = \frac{6}{x+2}$$

2. Jeśli $x < 0$, to wówczas

$$f(x) = \frac{6}{2-x}$$

Zatem wzór funkcji możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{x+2} & \text{dla } x \geqslant 0 \\ \frac{6}{2-x} & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Wyznaczymy granice jednostronne funkcji f w punkcie $x_0 = 0$. Niech najpierw (x_n) będzie dowolnym ciągiem argumentów (x_n) funkcji f takim, że $x_n > 0$ dla każdego

$n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. Wówczas korzystając z twierdzenia o arytmetyce granic ciągów zbieżnych otrzymujemy

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{6}{x_n+2} = \frac{6}{0+2} = 3.$$

Stąd $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 3$.

Niech teraz (x_n) będzie dowolnym ciągiem argumentów (x_n) funkcji f takim, że $x_n < 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. Wówczas korzystając z twierdzenia o arytmetyce granic ciągów zbieżnych otrzymujemy

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{6}{2-x_n} = \frac{6}{2-0} = 3.$$

Stąd $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 3$. Ponieważ granica lewostronna funkcji f w punkcie $x_0 = 0$ jest równa granicy prawostronnej funkcji w tym punkcie więc funkcja ta posiada granicę w punkcie $x_0 = 0$ oraz

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 3.$$

Słownik

wartość bezwzględna liczby

wartość bezwzględną (moduł) liczby x definiujemy następująco

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geqslant 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

ciąg argumentów funkcji

ciąg (x_n) którego wszystkie wyrazy należą do dziedziny funkcji f, tzn. ciąg spełniający warunek

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\, x_n \in D_f$$

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

W poniższej galerii przedstawiono sposób na sprawdzenie, czy funkcja dana dwoma różnymi wzorami na dwóch różnych przedziałach posiada w danym punkcie granicę. Zapoznaj się z przedstawioną metodą, a następnie wykonaj zamieszczone poniżej polecenia.

Dana jest funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{dla } x \geqslant 1 \\ 2x + 1 & \text{dla } x < 1 \end{cases}$$

Polecenie 2

Oblicz granicę lewostronną funkcji f w punkcie $x_0 = 1$.

Polecenie 3

Oblicz granicę prawostronną funkcji f w punkcie $x_0 = 1$. Czy funkcja f posiada granicę w tym punkcie?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Czy funkcja $f(x) = |x|$ posiada granicę z punkcie $x_0 = 0$?

- Nie.
- Tak.

Ćwiczenie 2

Czy funkcja $f(x) = \frac{|x+2|}{x+2}$ posiada granicę w punkcie $x_0 = -2$?

- Tak. Posiada granicę równą -1.
- Nie.
- Tak. Posiada granicę równą 1.

Ćwiczenie 3

Uzupełnij tekst, przeciągając w puste pola odpowiednie wyrażenia.

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{|2x-4|}{x-2}$. Funkcja ta _____ w punkcie $x_0 = 2$, ponieważ granice jednostronne tej funkcji w tym punkcie są _____.

takie same | ma granicę | nie ma granicy | różne

Ćwiczenie 4

Wskaż funkcje posiadające granicę w punkcie $x_0 = 0$.

- ○ $f(x) = \frac{x}{|x|}$
- ○ $f(x) = \frac{2x}{|x|+1}$
- ○ $f(x) = \frac{x^2+2x}{|x|}$

Ćwiczenie 5

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$. Wskaż prawdziwe równości.

- ☐ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -2$
- ☐ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -2$
- ☐ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$
- ☐ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$

Ćwiczenie 6

Uzupełnij tekst, przeciągając w puste pola odpowiednie wyrażenia.

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^2+3x-4}{|x+4|}$. Ponieważ $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x) =$ ____ oraz $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x) =$ ____ więc funkcja ta ____ w punkcie $x_0 = -4$.

ma granicę | -5 | -3 | -3 | -5 | nie ma granicy | 5 | 3

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Połącz w pary funkcje ze zdaniami dla nich prawdziwymi.

$f(x) = \frac{\lvert x+1 \rvert}{2x+2}$	Funkcja posiada granicę w punkcie $x_0 = -1$ równą 0.
$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } x \leqslant -1 \\ x^2 - 1 & \text{dla } x > -1 \end{cases}$	Funkcja posiada granicę w punkcie $x_0 = -1$ równą $-\frac{1}{2}$.
$f(x) = \frac{x}{\lvert x \rvert + 1}$	Funkcja nie posiada granicy w punkcie $x_0 = -1$.

Ćwiczenie 9

Przenieś podane funkcje do odpowiednich obszarów.

Posiada granicę w punkcie $x_0 = 1$.

Nie posiada granicy w punkcie $x_0 = 1$.

$f(x) = \frac{x^2 - x}{\lvert x-1 \rvert}$

$f(x) = \frac{3x-3}{\lvert x-1 \rvert}$

$f(x) = \frac{\lvert x \rvert - 1}{\lvert x \rvert + 1}$

$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{dla } x \leqslant 1 \\ \sqrt{x+3} & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{dla } x \leqslant 1 \\ -x & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

Dla nauczyciela

Autor: Mariusz Doliński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Twierdzenie o istnieniu granicy funkcji w punkcie

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1. oblicza granice funkcji (w tym jednostronne);

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- potrafi sformułować twierdzenie o istnieniu granicy funkcji w punkcie;
- stosuje twierdzenie o istnieniu granicy funkcji w punkcie do badania istnienia granicy funkcji w punkcie;
- stosuje twierdzenie o istnieniu granicy funkcji w punkcie do obliczania granic funkcji w punkcie.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;

- tworzenie przez analogię.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wprowadza uczniów szczegółowo w temat lekcji: „Twierdzenie o istnieniu granicy funkcji w punkcie" i jej cele. Może posłużyć się wyświetloną na tablicy zawartością sekcji „Wprowadzenie".
2. Nauczyciel prosi o przygotowanie w parach pytań związanych z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj" i zapisują w zeszycie minimum dwa pytania. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
2. Uczniowie wykonują wspólnie na forum klasy ćwiczenia nr 1-2.
3. Kolejny etap to liga zadaniowa - uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się", a następnie omawiają je na forum.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8. Następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i ustalają jedną wersję odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się".

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Twierdzenie o istnieniu granicy funkcji w punkcie").

Materiały pomocnicze:

- Definicja funkcji. Sposoby przedstawiania funkcji

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Twierdzenie o istnieniu granicy funkcji w punkcie”.