



Równanie wymierne, którego licznik jest wielomianem stopnia drugiego

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Równanie wymierne, którego licznik jest wielomianem stopnia drugiego

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

W tym materiale zajmiemy się rozwiązywaniem równań wymiernych, w których licznik jest wielomianem stopnia drugiego. Nie zapomnimy oczywiście o wyznaczeniu dziedziny takiego równania. W rozwiązaniu równań skorzystamy z własności równań kwadratowych.

Metoda rozwiązywania równań stopnia drugiego, zapisana za pomocą wzorów na pierwiastki równania z wykorzystaniem „**delta**” znana była już od starożytności. W średniowiecznej Europie rozpowszechniła się od XII wieku wraz z tłumaczeniami dzieła z tytułu jego dzieła

Al-kitab al-muchtasar fi hisab al-dżabr wa-al-mukabala Mohammada ibn Musy z Choresmu.

Twoje cele

- Rozwiążesz równanie wymierne, w którym licznik jest wielomianem stopnia drugiego.
- Wyznaczysz dziedzinę równania wymiernego, w którym licznik jest wielomianem stopnia drugiego.

Przeczytaj

Pamiętasz?

Twierdzenie: Liczba rozwiązań równania kwadratowego

Rozważmy równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Jeżeli $\Delta > 0$, to równanie ma dwa pierwiastki $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
2. Jeżeli $\Delta = 0$, to równanie ma jeden pierwiastek, nazwany podwójnym pierwiastkiem $x_0 = \frac{-b}{2a}$.
3. Jeżeli $\Delta < 0$, to równanie nie ma pierwiastków.

Definicja: Równanie wymierne

Jeżeli $W(x)$ i $P(x)$ są wielomianami, $P(x)$ nie jest wielomianem zerowym ($P(x) \neq 0$) to równanie

$$\frac{W(x)}{P(x)} = 0$$

nazywamy równaniem wymiernym z jedną niewiadomą x .

Rozwiązać równanie to znaleźć takie pierwiastki wielomianu $W(x)$, które nie są miejscami zerowymi wielomianu $P(x)$.

W tym materiale wielomian $W(x)$, będzie wielomianem stopnia drugiego.

Przykład 1

Rozwiążemy **równanie wymierne** $\frac{3x^2 - 9x - 30}{2x + 1} = 0$.

$$2x + 1 \neq 0$$

$$x \neq -\frac{1}{2}$$

Dziedziną równania jest $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Zapiszemy teraz licznik ułamka algebraicznego w postaci iloczynowej.

$$\frac{3 \cdot (x+2)(x-5)}{2x+1} = 0$$

Ułamek równa się zero jeżeli licznik ułamka jest równy zero.

$$3 \cdot (x+2)(x-5) = 0$$

$$x = -2 \text{ lub } x = 5$$

$$-2 \in D, 5 \in D$$

Rozwiązaniem równania są liczby $(-2), 5$.

Przykład 2

Rozwiążemy równanie $\frac{x^2-4}{x+4} = x$.

Określimy dziedzinę równania.

$$x + 4 \neq 0$$

$$x \neq -4$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$$

$$\frac{x^2-4}{x+4} = \frac{x}{1}$$

Korzystając z własności proporcji otrzymujemy:

$$x^2 - 4 = x^2 + 4x$$

$$x = -1 \in D$$

Rozwiązaniem równania jest liczba (-1) .

Przykład 3

Rozwiążemy równanie, którego licznik i mianownik są wielomianami stopnia drugiego.

$$\frac{x^2+5x+4}{2x^2+8x+6} = \frac{1}{x}$$

Wyznamy najpierw dziedzinę równania.

$$2x^2 + 8x + 6 \neq 0 \text{ i } x \neq 0$$

$$2 \cdot (x + 3)(x + 1) \neq 0$$

$$x \neq -3 \text{ i } x \neq -1$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 0\}$$

Zapiemy równanie w postaci równoważnej:

$$\frac{(x+1)(x+4)}{2 \cdot (x+3)(x+1)} = \frac{1}{x}$$

Skracamy ułamek z lewej strony równania, dzieląc licznik i mianownik przez $x + 1$,
($x \neq -1$).

$$\frac{x+4}{2 \cdot (x+3)} = \frac{1}{x}$$

Mnożymy „na krzyż”.

$$x(x+4) = 2 \cdot (x+3)$$

$$x^2 + 4x = 2x + 6$$

$$x^2 + 2x - 6 = 0$$

$$\Delta = 4 + 24 = 28$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{7}$$

$$x_1 = \frac{-2-2\sqrt{7}}{2} = -1 - \sqrt{7} \in D$$

$$x_2 = \frac{-2+2\sqrt{7}}{2} = -1 + \sqrt{7} \in D$$

Rozwiązaniem równania są liczby $-1 - \sqrt{7}$, $-1 + \sqrt{7}$.

Przykład 4

Wykażemy, że równanie $\frac{9x^2+6x+1}{3x+1} = 0$ jest sprzeczne.

Dziedziną równania jest $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$.

Przyrównujemy licznik ułamka do zero.

$$9x^2 + 6x + 1 = 0$$

$$(3x + 1)^2 = 0$$

$$3x + 1 = 0$$

$$3x = -1$$

$$x = -\frac{1}{3} \notin D$$

Równanie nie posiada rozwiązania.

Przykład 5

Rozwiążemy równanie $\left| \frac{x^2-1}{x+4} \right| = 2$.

Dziedziną równania jest $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

Korzystając z własności wartości bezwzględnej otrzymujemy:

$$\frac{x^2-1}{x+4} = 2 \text{ lub } \frac{x^2-1}{x+4} = -2$$

$$x^2 - 1 = 2 \cdot (x + 4) \text{ lub } x^2 - 1 = -2 \cdot (x + 4)$$

$$x^2 - 2x - 9 = 0 \text{ lub } x^2 + 2x + 7 = 0$$

$$\Delta = 4 + 36 = 40 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{10} \text{ lub } \Delta = 4 - 28 = -24 < 0 - \text{brak rozwiązań}$$

$$x_1 = \frac{2-2\sqrt{10}}{2} = 1 - \sqrt{10}$$

$$x_2 = \frac{2+2\sqrt{10}}{2} = 1 + \sqrt{10}$$

Równanie ma dwa rozwiązania $1 - \sqrt{10}, 1 + \sqrt{10}$.

Przykład 6

Rozwiążemy równanie z niewiadomą x oraz przeprowadzimy dyskusję istnienia i liczby rozwiązań w zależności od wartości parametru a .

$$\frac{2ax^2-6ax}{x-3} = 4a^2$$

Dziedziną równania jest $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

$$\frac{2ax(x-3)}{x-3} = 4a^2$$

$$2ax = 4a^2$$

Jest to równanie liniowe. Rozwiązaniem rozpatrywanego równania wymiernego są te rozwiązania równania liniowego, które spełniają założenia.

$$1. \text{ Jeżeli } a \neq 0, \text{ to } x = \frac{4a^2}{2a}$$

$$x = 2a$$

$$2a \neq 3 \Rightarrow a \neq \frac{3}{2}$$

$$2. \text{ Jeżeli } a = 0, \text{ to } 0x = 0$$

Jest to równanie tożsamościowe, spełnione przez każdą liczbę x należącą do dziedziny równania.

Słownik

równanie wymierne

równanie $\frac{W(x)}{P(x)} = 0$ z jedną niewiadomą x , gdzie $W(x)$ i $P(x)$ są wielomianami, $P(x)$ nie jest wielomianem zerowym ($P(x) \neq 0$)

wielomian stopnia drugiego

wielomian postaci $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, zwany inaczej trójmianem kwadratowym

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem i przeanalizuj sposoby rozwiązywania równania wymiernego, którego licznik jest wielomianem stopnia drugiego.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D17o1bzJ9>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej równań wymiernych.

Polecenie 2

Rozwiąż równanie $\frac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2} = \frac{3}{5}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Rozwiąż równanie $\frac{2x^2+9x-5}{x-3} = 0$.

☐ $x = -5, x = \frac{1}{2}$

☐ $x = 3$

☐ $x = -\frac{1}{2}, x = 3, x = 5$

☐ $x = -5, x = \frac{1}{2}, x = 3$

Ćwiczenie 2



Połącz równanie z liczbami, które spełniają to równanie.

$\frac{(x^2+x-2)(x-4)}{x+2} = 0$

$x = -1, x = 4$

$\frac{x^2+3x-4}{x+1} = 0$

$x = -4, x = 1$

$\frac{x^2+5x+4}{x-1} = 0$

$x = 1, x = 4$

$\frac{(x^2-6x+8)(x+1)}{x-2} = 0$

$x = -4, x = -1$

Ćwiczenie 3



Zaznacz poprawną odpowiedź. Określ liczbę rozwiązań równania $\frac{x^2-1}{x+4} = x$.

☐ 4

☐ 2

☐ 0

☐ 1

Ćwiczenie 4



Wpisz w wyznaczone miejsca rozwiązania równania $\frac{x^2+8x+20}{x+4} = \frac{5}{x+4}$ (w kolejności rosnącej).

$x =$, $x =$

Ćwiczenie 5



Przeciągnij w wyznaczone miejsce taką sumę algebraiczną, aby rozwiązaniem poniższego równania była liczba $\frac{3}{4}$.

$$\frac{4x^2}{2x+3} =$$

Ćwiczenie 6



Wybierz wszystkie liczby, które spełniają równanie $\frac{x^2-6x+3}{4} - 2 = \frac{5}{x^2-6x+3}$.

☐ -5

☐ 0

☐ 1

☐ -1

☐ 5

☐ 7

☐ -7

Ćwiczenie 7



Rozwiąż równanie $\left| \frac{x^2-9}{x+3} \right| = 1$. Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ Równanie jest tożsamościowe.

☐ Rozwiązaniem równania są dwie liczby przeciwne.

☐ Równanie jest sprzeczne.

☐ Rozwiązaniem równania są dwie liczby naturalne.

Ćwiczenie 8



Uzupełnij zdanie.

Równanie $\frac{(2x^2+4x)(m+1)}{x+2} = 4m + 4$ dla $m = -1$, dla $m \neq -1$.

jest sprzeczne

jest spełnione przez każdą liczbę ze zbioru $\mathbb{R} \setminus -2$

ma jedno rozwiązanie $x = 2$

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równanie wymierne, którego licznik jest wielomianem stopnia drugiego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) rozwiązuje równania i nierówności wymierne nie trudniejsze niż

$$\frac{x+1}{x(x-1)} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{2x}{(x-1)(x+1)}.$$

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje równanie wymierne, w którym licznik jest wielomianem stopnia drugiego
- wyznacza dziedzinę równania wymiernego, w którym licznik jest wielomianem stopnia drugiego
- przeprowadza rozumowania związane z analizą równania wymiernego, formułuje wnioski i uzasadnia ich poprawność

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- stoliki zadaniowe
- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają w grupach definicję równania wymiernego i definicję oraz twierdzenie o liczbie rozwiązań wielomianu stopnia drugiego.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi uczniów o samodzielne rozwiązanie trzech przykładów z sekcji „Przeczytaj”.
2. Uczniowie podzieleni na grupy 6 osobowe omawiają rezultaty swojej pracy i porównują rozwiązania.
3. Następnie wspólnie omawiają kolejne przykłady.
4. Uczniowie oglądają samouczek i analizują go wraz z nauczycielem.
5. Uczniowie w parach rozwiązują zadania metodą stolików zadaniowych. Na każdym stoliku zadaniowym znajdują się 2 zadania interaktywne. Warunkiem przejścia do następnego stolika jest poprawne rozwiązanie danych zadań. Para, która najszybciej rozwiąże wszystkie zadania otrzymuje bardzo dobrą ocenę.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń interaktywnych.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Przykład 2 umieszczony pod filmem samouczkiem.

Materiały pomocnicze:

Wyrażenia wymierne. Równania wymierne

Wskazówki metodyczne:

Przykłady zawarte w samouczku uczniowie mogą wykorzystać jako materiał powtórzeniowy. Film samouczek można również wykorzystać jako materiał pokazujący zastosowanie wzorów skróconego mnożenia.