



Prostopadłościan

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja 3D](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Bryły geometryczne otaczają nas każdego dnia i na każdym kroku. Sześciany, kule, ostrosłupy i przede wszystkim, prostopadłościany to bryły, z których zbudowane są otaczające nas przedmioty, budynki, czy środki transportu. W materiale omówimy jak zbudowany jest prostopadłościan oraz obliczymy sumę długości jego krawędzi. Bazując na części teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Zdefiniujesz pojęcie prostopadłościanu.
- Opisziesz, jak zbudowany jest prostopadłościan.
- Obliczysz sumę długości krawędzi dowolnego prostopadłościanu.
- Wykorzystasz poznaną wiedzę dotyczącą prostopadłościanów do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Przypomnijmy wiadomości dotyczące prostopadłościanu, poznane w szkole podstawowej.

Prostopadłościan to **bryła przestrzenna** (graniastosłup), która posiada dwie prostokątne podstawy oraz cztery prostokątne ściany boczne. Inna, równie trafna definicja prostopadłościanu to graniastosłup, którego każda ściana jest prostokątem, a dowolne dwie przeciwległe ściany są równoległe. Formalnie, definicję prostopadłościanu możemy zapisać jak poniżej.

Definicja: prostopadłościan

Prostopadłościanem nazywamy równoległościan, którego każda ściana jest prostokątem, a każde dowolne dwie ściany mające wspólną krawędź są prostopadłe.

Poniżej zaprezentujemy prostopadłościany, z którymi spotykamy się na co dzień:



Źródło: dostępny w internecie: www.pixabay.com, domena publiczna.

Aby rozpocząć swoją przygodę z praktycznym wykorzystywaniem wiedzy o prostopadłościanach, najpierw omówimy ich budowę.

Do podstawowych elementów z których zbudowany jest **prostopadłościan** zalicza się:

- podstawę,
- krawędź podstawy,
- ścianę boczną,

- krawędź boczną,
- wierzchołek,
- przekątną.

Model prostopadłościanu został zaprezentowany na poniższej ilustracji:

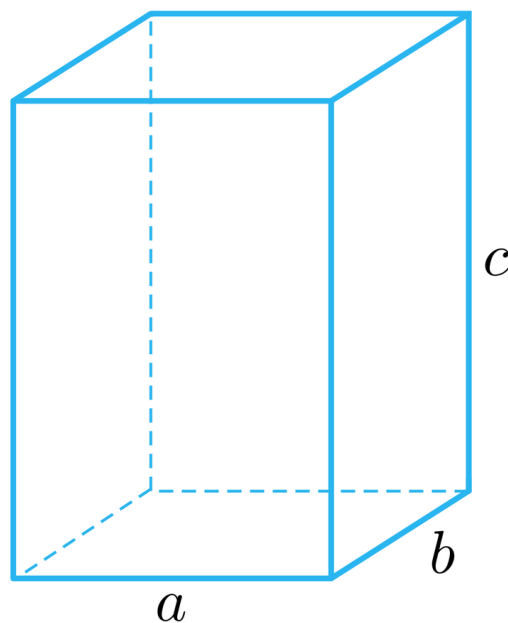
Każdy prostopadłościan jest zbudowany z:

- 12 krawędzi,
- 8 wierzchołków,
- 6 ścian.

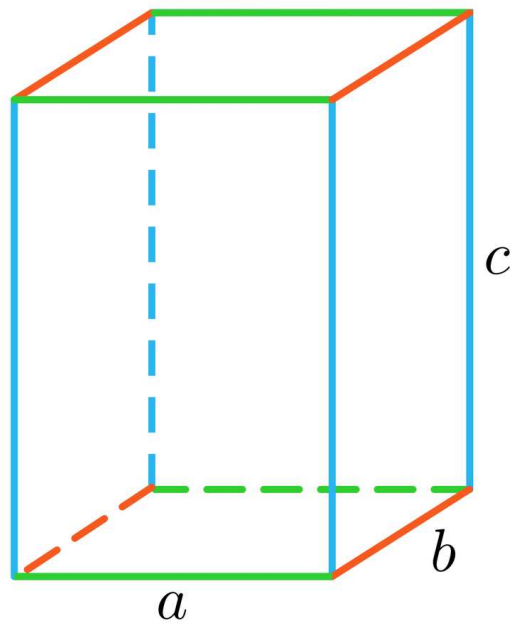
Od każdego wierzchołka prostopadłościanu odchodzą 3 krawędzie, które będziemy nazywać **wymiarami prostopadłościanu** i oznaczać jako:

- a - długość,
- b - szerokość
- c - wysokość.

Zauważmy, że krawędź boczna prostopadłościanu jest również jego **wysokością**.



Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu:



Ponieważ w prostopadłościanie możemy wyróżnić trzy rodzaje krawędzi o różnych długościach, zatem sumę długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu obliczamy za pomocą wyrażenia:

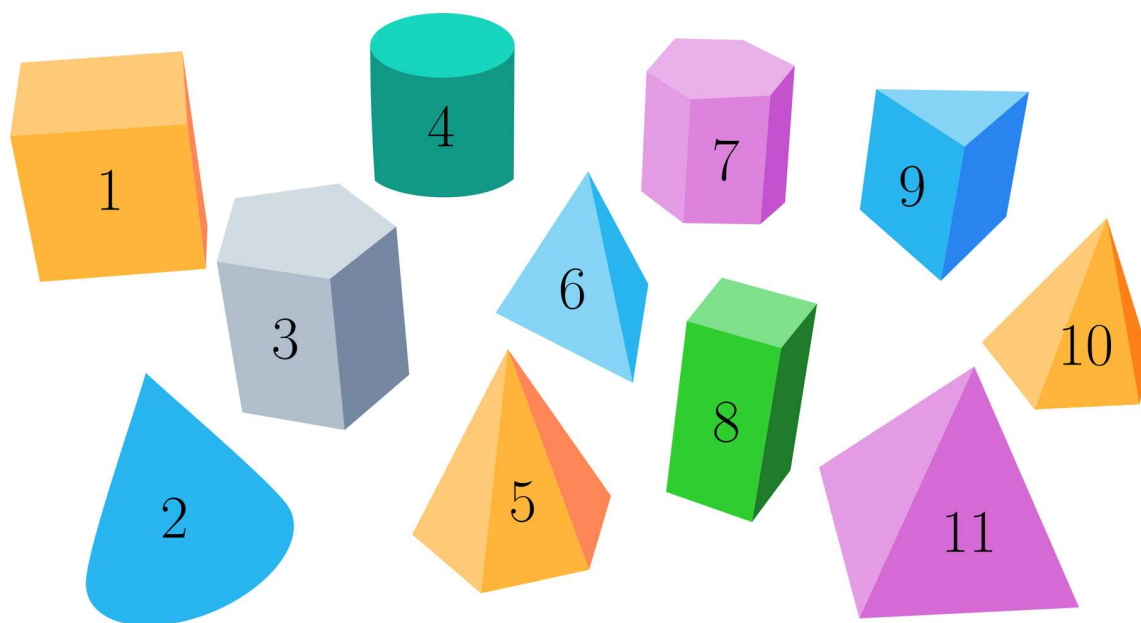
$$4 \cdot a + 4 \cdot b + 4 \cdot c = 4 \cdot (a + b + c)$$

Ważne!

Szczególnym przypadkiem prostopadłościanu jest **sześcian**, czyli bryła geometryczna, w której wszystkie ściany są przystającymi kwadratami.

Przykład 1

Na rysunku przedstawiono bryły geometryczne ponumerowane od 1 do 11. Podamy numery brył, które przedstawiają prostopadłościany.

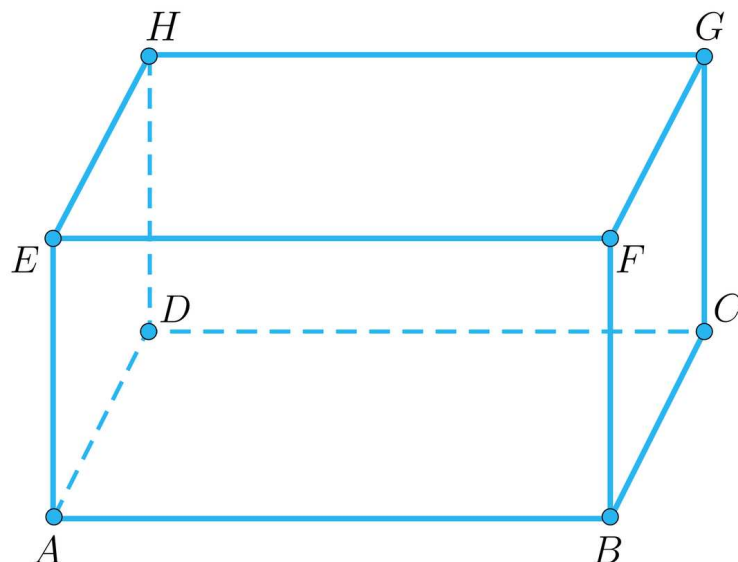


Rozwiązanie:

Prostopadłościanami są bryły z numerami 1 i 8.

Przykład 2

Na rysunku przedstawiono prostopadłościan $ABCDEFGH$.



Opiszemy krawędzie, wierzchołki oraz ściany tego prostopadłościanu.

Rozwiązanie:

Wierzchołkami prostopadłościanu są punkty: A, B, C, D, E, F, G, H .

Ścianami prostopadłościanu są prostokąty o wierzchołkach: $ABCD$, $EFGH$, $BCGF$, $DCGH$, $ADHE$, $ABFE$.

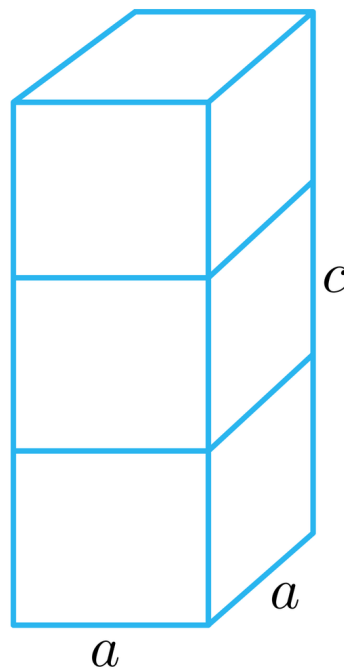
Krawędzie prostopadłościanu to: AB , BC , CD , AD , EF , FG , GH , EH , AE , BF , CG , DH

Przykład 3

Z trzech jednakowych sześcianów o krawędzi a zbudowano prostopadłościan. Obliczymy sumę długości krawędzi tego prostopadłościanu.

Rozwiązanie:

Jeżeli przez c oznaczmy wysokość prostopadłościanu, to jego rysunek przedstawia się następująco:

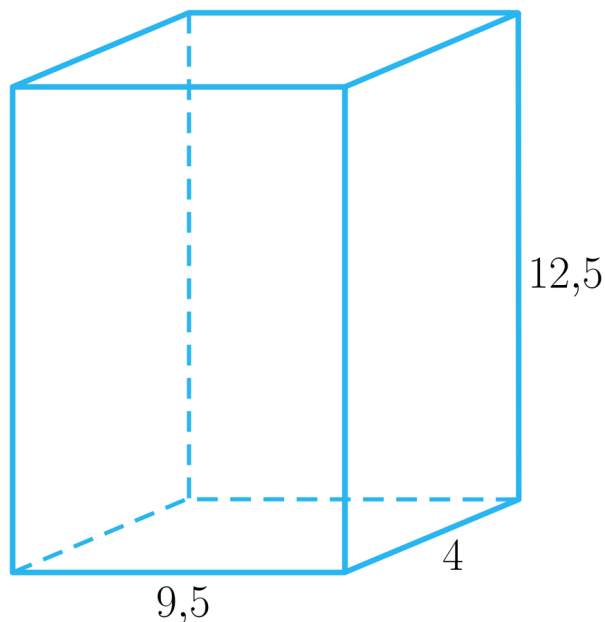


Wobec tego $c = 3a$, a suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu wynosi:

$$4 \cdot a + 4 \cdot a + 4 \cdot 3a = 20a$$

Przykład 4

Obliczymy sumę długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu z rysunku.

**Rozwiązanie:**

Suma długości krawędzi prostopadłościanu z rysunku wynosi:

$$4 \cdot 9,5 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 12,5 = 38 + 16 + 50 = 104$$

Przykład 5

Wyznamy wymiary prostopadłościanu, jeżeli krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy 3, a suma tych krawędzi wynosi 72.

Rozwiązanie:

Niech a, b, c będą długościami krawędzi prostopadłościanu wychodzącymi z tego samego wierzchołka.

Wtedy

$$b = a + 3$$

$$c = a + 6$$

Zatem do wyznaczenia wartości a rozwiązujemy równanie:

$$a + b + c = 72$$

Wobec tego

$$a + a + 3 + a + 6 = 72, \text{ czyli } a = 21.$$

Długości krawędzi tego prostopadłościanu wynoszą odpowiednio 21, 24, 27.

Przykład 6

Obliczymy długości krawędzi prostopadłościanu, jeżeli krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka są kolejnymi liczbami nieparzystymi, a ich iloczyn wynosi 693.

Rozwiązanie:

Jeżeli długości krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka prostopadłościanu są kolejnymi liczbami nieparzystymi, to wprowadźmy następujące oznaczenia długości tych krawędzi:

$$n - 2, n, n + 2, \text{ gdzie } n > 2 \text{ i } n \in \mathbb{N}$$

Wtedy do wyznaczenia wartości n rozwiązujemy równanie:

$$(n - 2) \cdot n \cdot (n + 2) = 693$$

$$n^3 - 4n - 693 = 0$$

$$(n - 9) \cdot (n^2 + 9n + 77) = 0$$

Rozwiązaniem równania jest liczba $n = 9$, zatem krawędzie tego prostopadłościanu mają długości odpowiednio: 7, 9, 11.

Słownik

bryła geometryczna

zbiór punktów przestrzeni trójwymiarowej homeomorficzny z pewnym wielościanem

prostopadłościan

graniastosłup, którego wszystkie ściany są prostokątami

Animacja 3D

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją zaprezentowaną poniżej. Następnie rozwiąż poniższe polecenie.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D18EAFtgO>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej prostopadłościanu.

Polecenie 2

Na podstawie obejrzanej animacji wypełnij odpowiednio luki w tekście.

Prostopadłościan to bryła przestrzenna składająca się z ścian. Prostopadłościan złożony jest z podstaw oraz ścian bocznych. Każdy prostopadłościan posiada wierzchołków i łącznie krawędzi.

osiem

dwóch

ośmiu

czterech

siedem

dziesięć

czternaście

trzech

czterech

sześciu

pięć

dwóch

dwanaście

trzech

jednej

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



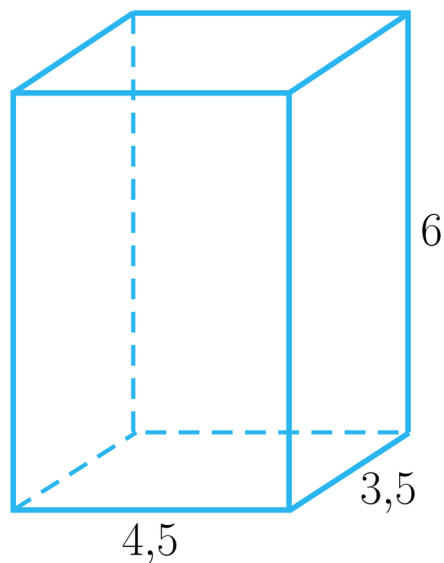
Zaznacz zdanie, które jest prawdziwe.

- ☐ Prostopadłościan ma 6 wierzchołków, 12 krawędzi i 8 ścian.
- ☐ Prostopadłościan ma 8 wierzchołków, 12 krawędzi i 6 ścian.
- ☐ Prostopadłościan ma 12 wierzchołków, 8 krawędzi i 6 ścian.

Ćwiczenie 2



Zapoznaj się z poniższym rysunkiem prostopadłościanu.



Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi dotyczące prostopadłościanu.

☐ Suma długości krawędzi bocznych prostopadłościanu z rysunku wynosi 24.

☐ Obwód podstawy prostopadłościanu z rysunku wynosi 16.

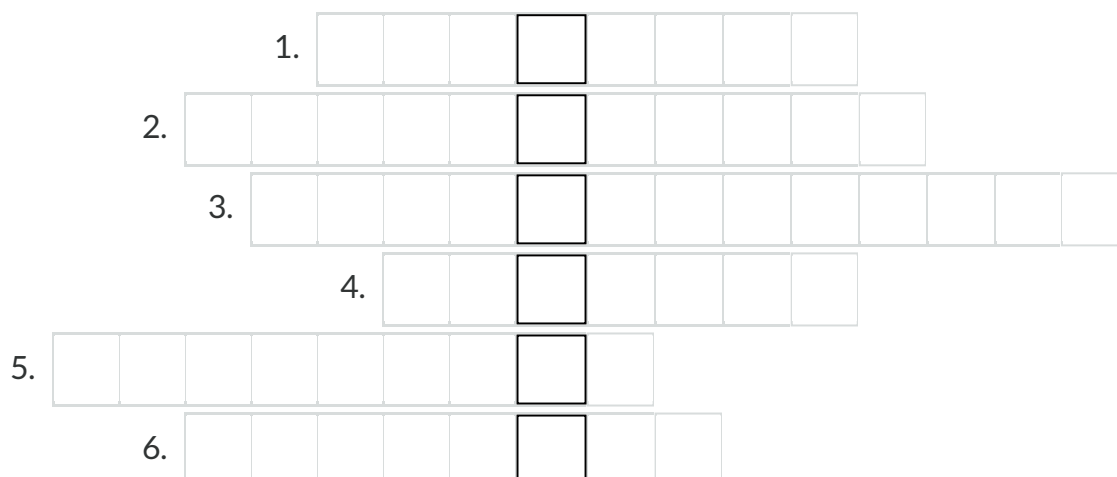
☐ Suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu wynosi 52.

☐ Prostopadłościan jest zbudowany z krawędzi, których długości tworzą ciąg arytmetyczny.

Ćwiczenie 3



Rozwiąż krzyżówkę.



1. Prostopadłościan, którego wszystkie ściany są jednakowymi kwadratami.
2. Jeden z ośmiu w prostopadłościanie.
3. Jest nim prostopadłościan.
4. Odcinek łączący dwa wierzchołki, będący wspólnym brzegiem dwóch ścian prostopadłościanu.
5. Odcinek łączący dwa przeciwległe wierzchołki tej samej ściany prostopadłościanu.
6. Górna lub dolna w prostopadłościanie.

Ćwiczenie 4



Wpisz w tabelę liczbę odpowiadającą wskazanym własnościom prostopadłościanu.

Opis	Liczba
Liczba wierzchołków	
Liczba przekątnych	
Liczba przekątnych ścian bocznych	
Liczba krawędzi bocznych	

Ćwiczenie 5



Wstaw w tekst odpowiednie liczby.

Jeżeli podstawą prostopadłościanu jest kwadrat o obwodzie 48, a wysokość prostopadłościanu wynosi 11, to suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu wynosi , a suma długości krawędzi bocznych jest równa .

Ćwiczenie 6



Suma długości krawędzi prostopadłościanu wynosi 140, a jego podstawą jest kwadrat o obwodzie równym 30. Wyznacz długość krawędzi bocznej tego prostopadłościanu.

Ćwiczenie 7



Uzupełnij tekst odpowiednimi liczbami.

Oznaczmy długości krawędzi prostopadłościanu wychodzących z jednego wierzchołka jako a , b , c . Załóżmy, że te długości są kolejnymi liczbami nieparzystymi. Wiadomo, że suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu wynosi 396. Wówczas:

$a =$

$b =$

$c =$

Ćwiczenie 8



Długości krawędzi prostopadłościanu wychodzących z tego samego wierzchołka są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o ilorazie równym 2, a suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu wynosi 56. Wyznacz wymiary tego prostopadłościanu.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Prostopadłościan

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

X. Stereometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje pojęcie prostopadłościanu,
- opisuje, jak zbudowany jest prostopadłościan,
- oblicza sumę długości krawędzi dowolnego prostopadłościanu,
- wykorzystuje w praktyce zdobytą wiedzę.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- liga zadaniowa;
- rozmowa kierowana.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji**Faza wstępna:**

1. Nauczyciel określa temat lekcji: „Prostopadłościan” oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów. Uczniowie tworzą pytania dotyczące tematu zajęć, na które odpowiedzą w trakcie lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania podczas rozmowy kierowanej z całą klasą. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie wspólnie rozwiązują ćwiczenia numer 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 3 -8. Następnie konsultują swoje rozwiązania z pozostałymi uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Prostopadłościan](#).

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać materiał z części „Animacja 3d” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i wykonują zawarte w tej części polecenia.